Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

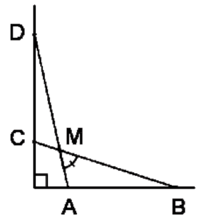
ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

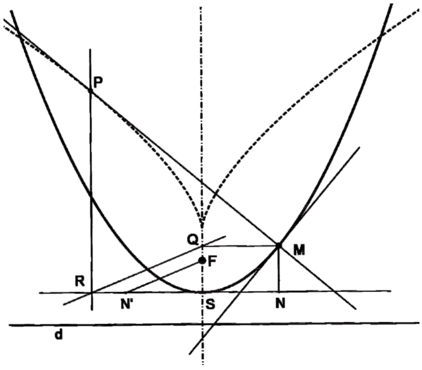
Exercices

Exercice 519 – 1 (Michel Lafond – Dijon).



Dans la figure ci-contre, les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires et les segments [AD] et [BC] se coupent en M. Démontrer que si MB = 3 MA et MD = 5 MC alors l'angle AMB mesure 60°.

Exercice 519 – 2 (Robert March – Paris)



F et S sont le foyer et le sommet de la parabole (P).
M un point de cette parabole.
N et Q sont les projetés orthogonaux de M respectivement sur la tangente au sommet et sur l'axe.
N′ est le symétrique de N par rapport à S.
La parallèle menée par Q à [FN′] coupe la tangente au sommet en R.
La parallèle menée par R à l'axe coupe la normale en M au point P.

Montrer que le lieu de P quand M décrit la parabole est sa développée.

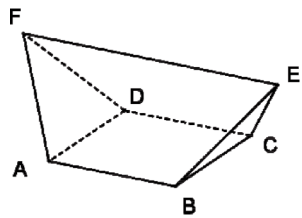
Exercice 519 – 3 *Pour nos élèves.*

A. Prouver que pour tout réel k, l'équation

$$x^3 + 4x^2 + 6x + k = 0$$

ne peut pas avoir 3 racines réelles distinctes.

B. Dans le solide ABCDEF ci-contre, ABCD est un carré de côté $c = 3\sqrt{2}$ cm ; les triangle BCE et ADF sont équilatéraux. De plus l'arête [EF] est parallèle à la face ABCD et EF = $2c$.
Calculer le volume de ce solide.



Exercice 519 – 4 (Paul-Alain Bonvert – Alpha du Ginseng).

Dans $\mathbb{C}$ on considère l'équation (E) :

$$z^2 + (a + \mathrm{i}b)z + (c + \mathrm{i}d) = 0.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur les réels a, b, c et d pour que (E) admette une racine réelle et l'autre complexe.

Solutions

Exercice 517 – 1 *Pour nos élèves.*

A – Dans un repère inconnu sur feuille blanche, on donne trois points non alignés A, B, C et leurs coordonnées. Retrouver les axes et le repère $(\mathrm{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

B – Déterminer tous les couples (a, b) de réels strictement positifs solutions du système

$$\begin{cases} a + \ln(a) = b \\ b + \ln(b) = a \end{cases}.$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon), L-G Vidiani (Fontaine les Dijon).

Voici la solution de L-G Vidiani.

A – Le problème, consiste à trouver les nouvelles coordonnées (les repères n'ont aucune raison d'être orthonormés) des points d'anciennes coordonnées $(0,0)$, $(1,0)$ et $(0,1)$.
Soit X′ la matrice colonne des nouvelles coordonnées d'un point et X celle de ses anciennes coordonnées.
$(\mathrm{A}, \overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}})$ forme un nouveau repère.

La formule de changement de repère est $\mathrm{X} - \mathrm{A} = \mathrm{PX}'$, où A désigne la matrice colonne des coordonnées de A et P la matrice de passage. P est connue : ses colonnes sont les composantes, sur l'ancienne base, des nouveaux vecteurs de base $\vec{e}_1' = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{e}_2' = \overrightarrow{AC}$. P est inversible puisque ABC est un vrai triangle.

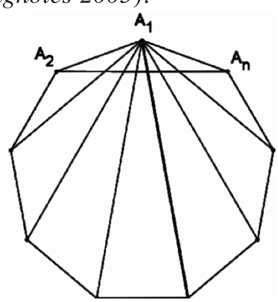
On a donc $X' = P^{-1}(X - A)$, P^{-1} étant l'inverse de P.

Ainsi la matrice des nouvelles coordonnées de l'origine de l'ancien repère est $O' = P^{-1}A$; et si on pose $I = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $J = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ les matrices des nouvelles coordonnées sont $I' = P^{-1}(I - A)$ et $J' = P^{-1}(J - A)$.

Remarque : la formule de changement de repère est généralisable en dimension n, en se donnant un simplexe (généralisation d'un triangle).

B – Comme la fonction $x \mapsto f(x) = x + \ln(x)$ est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ et par symétrie des rôles de a et b en les échangeant au besoin :
si $a < b$ alors $b = f(a) < f(b) = a$… Contradiction !
Donc seul $a = b$ convient ce qui donne $\ln(a) = 0$ donc $a = b = 1$ est la seule solution.

Exercice 517 – 2 (*Tiré des olympiades mathématique espagnoles 2005*).



On dit qu'un triangle est multiplicatif si le produit des longueurs de deux de ses côtés est égal à la longueur du troisième côté.
On considère un polygone régulier $A_1A_2…A_n$ ($n \geq 4$) à n côtés, tous de longueur 1.
Les $n - 3$ diagonales issues de A_1 partagent le triangle $A_1A_2A_n$ en $n - 2$ petits triangles.
Prouver que chacun de ceux-ci est multiplicatif.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Pierre Lapôtre (Calais), Michel Sarrouy (Mende).

Voici les solutions de Raymond Heitz.

Première démonstration.
Elle repose sur le fait que chaque diagonale issue de A_1 (sauf les extrêmes) est bissectrice de l'angle formé par celles qui l'entourent.

Prenons les cas de la figure : le premier triangle « à gauche » est $A_1A_2A_3'$ et le suivant $A_1A_3'A_4'$.

(A_1A_3') est bissectrice de $\widehat{A_2A_1A_4'}$ et on a la relation classique :

$$\frac{A_1A_2}{A_2A_3'} = \frac{A_1A_4'}{A_3'A_4'},$$

d'où

$$\frac{A_1A_2 \times A_1A'_3}{A_2A'_3} = \frac{A_1A'_4 \times A_1A'_3}{A'_3A'_4}.$$

Or le premier rapport est égal à 1 (i.e le triangle est multiplicatif) car $A_1A_2A'_3$ est isocèle et $A_1A_2 = 1$.

Donc le deuxième rapport est lui aussi égal à 1 et le triangle $A_1A'_3A'_4$ est multiplicatif.

Et ainsi, par une sorte de récurrence, on voit qu'il en est de même pour tous ces triangles.

Seconde démonstration.

Considérons le cercle circonscrit au polygone. Il est transformé en la droite (A_2A_n) par l'inversion de pôle A_1 de puissance 1 (car $A_1A_2 = 1$). Considérons également « le grand » triangle $A_1A_kA_{k+1}$ ($2 \le k \le n - 1$) contenant « le petit » triangle $A_1A'_kA'_{k+1}$.

Par suite de l'inversion les droites $(A'_kA'_{k+1})$ et (A_kA_{k+1}) sont antiparallèles par rapport à (A_1A_k, A_1A_{k+1}) et les triangles $A_1A'_kA'_{k+1}$ et $A_1A_kA_{k+1}$ sont semblables. Ainsi :

$$\frac{A_1A'_k}{A_1A_{k+1}} = \frac{A_1A'_{k+1}}{A_1A_k} = \frac{A'_kA'_{k+1}}{A_kA_{k+1}}\ ;$$

mais $A_1A_k \times A_1A'_k = A_1A_{k+1} \times A_1A'_{k+1}$ (inversion). D'où $A_1A'_k \times A_1A'_{k+1} = A'_kA'_{k+1}$ car $A_kA_{k+1} = 1$.

Remarque. Raymond Heitz précise qu'il ne trouve pas satisfaisante la définition d'un triangle multiplicatif puisqu'elle n'est pas stable par changement d'échelle.

Exercice 517 – 3 (Jean-Christophe Laugier – Rochefort) *Dénombrement et application.*

Dénombrer les applications $f : X \to X$, X ensemble fini de cardinal égal à n ($n \ge 1$), telles que :

1. Pour un élément a donné de X, $f \circ f(x) = a$ pour tout x de X.

2. Pour un sous ensemble B de X, non vide, de cardinal p, $f \circ f(x) \in B$ pour tout x de X.

Solution : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Question 1.

Pour l'élément a, n choix sont possibles.

Soit $A = f^{-1}(\{a\})$ l'ensemble des antécédents de a par f et soit m le cardinal de A, où $1 \le m \le n$.

L'ensemble A contient a, car si $f(a)=b$, alors :

$a=(f\circ f)(a)=f(b)$

$b=f(a)=(f\circ f)(b)=a.$

Il y a C_{n-1}^{m-1} choix possibles de l'ensemble $A'=A-\{a\}$.
L'application f envoie les éléments de X – A dans A′.

Et le nombre d'applications possibles de X – A vers A′ est $(m-1)^{n-m}$.

Le nombre de possibilités pour f est donc : $n\cdot\sum_{m=1}^{n} C_{n-1}^{m-1}(m-1)^{n-m}$.

(La formule est valable pour $n = 1$ avec la convention $0^0 = 1$)

Nota. J'ai changé la formulation des questions initiales posées par Jean-Christophe Laugier.
Particulièrement, la demande de la deuxième question était de dénombrer les applications $f : X \to X$ telles que $f\circ f(X)\subseteq B$, B étant une partie donnée de X de cardinal p.
Jean-Christophe Laugier me fait remarquer que la question 2 du 517-3 était nettement plus ardue … !
Pierre Renfer en a donné une démonstration qui paraîtra dans le prochain numéro.

Exercice 517 – 4 (Michel Lafond – Dijon) *Équation diophantienne*

Résoudre en nombres entiers l'équation

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2} \qquad (*)$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Maurice Bauval (Versailles), Raymond Heitz (Névez), Hervé Legrand (Tournefeuille), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé).

Voici la solution de Hervé Legrand. On va raisonner par condition nécessaire et condition suffisante :

1) Supposons que (a,b,c) soit une solution de (*) (a, b, c entiers relatifs non nuls).
On a :

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{1}{c^2}\Leftrightarrow c^2\left(a^2+b^2\right)=a^2b^2 \qquad (**)$$

Comme $\left(a^2+b^2\right)$ est un entier naturel, on a : c^2 divise a^2b^2, d'où c divise ab.
Il existe donc un entier relatif d tel que $ab = dc$.

La relation (**) donne alors $c^2\left(a^2+b^2\right)=c^2d^2$, d'où $a^2 + b^2 = d^2$.

Bilan : si (a,b,c) est solution de (*) alors $\frac{ab}{c}$ est un entier naturel et $\left(a,b,\frac{ab}{c}\right)$ est un triplet pythagoricien.

2) Supposons que (p,q,r) est un triplet pythagoricien (dans $\mathbb{Z}$), on alors $p^2 + q^2 = r^2$.

En divisant cette relation par $p^2q^2r^2$ on obtient : $\frac{1}{q^2r^2}+\frac{1}{p^2r^2}=\frac{1}{p^2q^2}$.

Soit en posant $a = qr$, $b = pr$ et $c = pq$, on obtient bien un triplet (a,b,c) solution de (*).

Conclusion : l'ensemble des solutions de (*) est :

$$\left\{(pr,qr,pq) \text{ tels que les entiers relatifs } p, q \text{ et } r \text{ vérifient } p^2+q^2=r^2\right\}.$$

Par exemple, pour le triplet pythagoricien (3,4,5), cela donne :

$a = 3 \times 5 = 15$, $b = 4 \times 5 = 20$ et $c = 3 \times 4 = 12$ et on vérifie que $\frac{1}{15^2}+\frac{1}{20^2}=\frac{1}{12^2}$.

Remarque : Si (a,b,c) est solution de (*), alors pour tout entier relatif k non nul, (ka,kb,kc) est aussi solution de (*).