

Introduire le logarithme décimal avant l'exponentielle

Rémi Belloeil(*)

I Les défauts d'une introduction prématurée de l'exponentielle

Le programme actuel de Terminale S incite à introduire la fonction exponentielle avant la fonction logarithme et évoquent à peine le logarithme décimal bien que le préambule indique que « Son plan n'indique pas la progression à suivre ». La fonction exponentielle est citée en premier avec le commentaire « La fonction exponentielle est présentée comme l'unique fonction f dérivable sur \mathbb{R} telle que : $f' = f$ et $f(0) = 1$. L'existence est admise. » Puis après vient la fonction logarithme népérien avec le commentaire « On peut introduire la fonction logarithme népérien grâce aux propriétés de la fonction exponentielle ou à partir de l'équation fonctionnelle. ». L'option d'introduire la fonction exponentielle à partir de la fonction logarithme népérien semble exclue ! Les fonctions exponentielles de base a ($a > 0$) sont absentes du programme.

Pour la filière ES-L, le programme évoque d'abord les fonctions exponentielles : « Fonction $x \mapsto q^x$ avec $q > 0$ » « Ces fonctions sont présentées comme un prolongement continu des suites géométriques. » « Une seule semble avoir 1 pour nombre dérivé en 0. L'existence et l'unicité de cette fonction sont admises. », cette fonction est la fonction exponentielle. La fonction logarithme népérien est ensuite définie comme la fonction réciproque de la fonction exponentielle. Dans cette filière la résolution de $x^n = k$ sur $]0; +\infty[$ avec $k > 0$ apparaît comme une application du logarithme népérien alors que $k^{1/n}$ est en fait déjà défini dans le cadre des fonctions exponentielles, ce qui permet de calculer le taux moyen.

Certains manuels, et certains enseignants de terminale S, introduisent très tôt la fonction exponentielle, parfois avant même de revenir sur la définition du nombre dérivé. Les élèves qui arrivent de Première ne maîtrisent pas tous, et de loin, le lien entre une fonction et sa fonction dérivée. On voit assez souvent des élèves qui étudient le signe d'une fonction pour en déduire ses variations ! Avoir remarqué que la fonction dérivée est différente de la fonction elle-même pour toutes les fonctions étudiées en Première est déjà une étape importante. Admettre alors sans restriction qu'il existe des fonctions qui sont égales à leur dérivée, c'est un véritable acte de foi ! Et utiliser cette propriété pour démontrer l'unicité sous la condition $f(0) = 1$, c'est clairement voyager dans l'inconnu ! La démarche proposée en ES-L a au moins l'avantage de « baliser » le terrain, d'autant plus que l'on peut trouver des valeurs intermédiaires entre deux termes d'une suite géométrique.

(*) remi.belloeil@orange.fr

Je trouve aussi contradictoire d'énoncer « Des éléments d'épistémologie et d'histoire des mathématiques s'insèrent naturellement dans la mise en œuvre du programme » et d'imposer une démarche de construction des fonctions exponentielles et logarithmes qui soit si contraire à l'épistémologie. Dans une précédente réforme, l'introduction des équations différentielles et leur résolution expérimentale dès le début de l'année étaient devenues incontournables. Il semble ne rester de cette période que l'ordre d'exposition : exponentielle puis logarithme. C'est évidemment contraire à l'histoire, mais surtout le seul intérêt semble l'introduction assez tôt des règles d'opération et de dérivation de la fonction exponentielle. Au vu des programmes, il n'est pas certain que les élèves sachent en sortant de Terminale S quel est l'ensemble des fonctions égales à leur dérivée. Et les connaissances sur les autres fonctions exponentielles et logarithmes (en particulier en base 10) ne sont pas garanties.

L'enseignement des Sciences en Terminale S nécessite l'utilisation très tôt de la fonction log voire des fonctions exponentielles de base a . Au lieu d'être une opportunité de croiser les disciplines cela devient une difficulté pour les élèves car la progression proposée en Mathématiques reporte assez tard la définition de ces fonctions.

II L'intérêt d'introduire d'abord la fonction logarithme décimal : log

Je plaide pour une introduction qui permet de donner du sens aux fonctions exponentielles et logarithmes à partir d'un phénomène exponentiel en utilisant d'abord la fonction logarithme décimal et cela sans parler de fonctions dérivées. À ce niveau, l'élève de ES-L peut calculer un taux moyen, résoudre les problèmes de seuil avec une suite géométrique et celui de S peut comprendre la méthode de datation des roches, la mesure de la puissance du son en décibel et calculer le PH (si les enseignants de SVT et Physique Chimie veulent bien se limiter aux fonctions exponentielles de base 2 ou 0,5 ou 10 et la fonction log). Si la fonction log paraît encore mystérieuse, on peut montrer qu'il est possible de calculer $\log(x)$ avec une calculatrice « 4 opérations » (Bulletin Vert n° 488 page 263). Ainsi non seulement l'élève se trouve sur un terrain « balisé » par les suites géométriques qu'il connaît, mais la fonction log découverte a une signification concrète et l'épistémologie est respectée.

Puis je propose de montrer que les dérivées des fonctions logarithmes sont de la forme k/x et que l'une en particulier a pour dérivée la fonction inverse sur $]0; +\infty[$, on la note \ln . Il est possible de faire le lien avec l'aire sous la courbe de la fonction inverse pour montrer qu'on peut calculer ses images avec une bonne approximation. En S on peut montrer que toutes les fonctions logarithmiques sont de la forme $k \log$ (ou $k \ln$) où k est une constante fixée. Dès lors, on peut varier les calculs de dérivées et de primitives et s'entraîner au calcul des dérivées logarithmiques. Au passage on montrera que l'équation $\ln(x) = 1$ a une solution unique notée e dans $]0; +\infty[$.

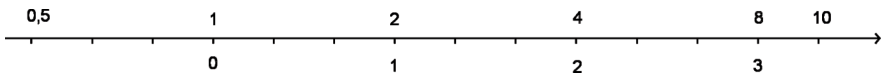
Enfin, on peut définir la fonction exponentielle \exp comme réciproque de la fonction \ln , découvrir, grâce à la dérivée de la fonction composée, que $(\exp)' = \exp$. Étant réciproque de la fonction $\ln = \log_e$, son expression est $\exp(x) = e^x$ et elle a naturellement les propriétés des fonctions exponentielles. En Terminale S, on peut s'intéresser à la question de déterminer toutes les fonctions égales à leur dérivée et démontrer que \exp est la seule pour laquelle l'image de 0 est 1. On peut aussi s'intéresser à la dérivée d'une fonction exponentielle de base a et montrer qu'il n'y a égalité que si $a = e$. On peut alors réaliser un schéma qui présente les liens entre quatre familles de fonctions : les logarithmes, les exponentielles, les primitives de la fonction inverse et les fonctions strictement positives égales à leur dérivée.

III Exemple d'activité pour introduire la fonction log

Les chiffres de la population aux États Unis au XIX^e siècle tous les 20 ans sont très proches d'une suite géométrique.

Année	1800	1820	1840	1860	1880
Population (en millions)	5,7	9,6	17	31	50

Si on souhaite faire une interpolation, on voit qu'un repère orthonormé usuel n'est pas adapté. Il paraît raisonnable de graduer l'axe des ordonnées selon une suite géométrique. On pourra fixer l'origine à $u_0 = 1$ et doubler tous les 3 cm (soit quasiment 1 dm pour multiplier par 10). On obtient ainsi une double graduation (On a représenté ici l'axe horizontalement).



Disons que la graduation en dessous de l'axe est « arithmétique » et celle au dessus de l'axe est « géométrique » (ou logarithmique).

Après avoir prolongé la graduation géométrique jusqu'à 128 ou 256, on peut se poser la question de réaliser une graduation intermédiaire de centimètre en centimètre de façon à garder une suite géométrique. Il suffit pour cela que la raison soit q avec $q^3 = 2$ donc $q = \sqrt[3]{2}$. Ce nombre ne pose pas vraiment de problème et il permet de parler de la racine n -ième d'un nombre positif ce qui est intéressant pour le calcul du taux moyen en ES-L. On peut alors compléter la graduation avec 2 ou 3 chiffres significatifs. On peut aussi imaginer continuer la graduation « avant » l'origine en divisant par 2 puis par $\sqrt[3]{2}$. On peut réaliser une graduation de millimètre en millimètre avec pour raison $\sqrt[30]{2}$ (mais elle devient illisible). L'important est que l'on puisse graduer aussi finement que l'on souhaite ce qui suggère l'existence d'une fonction continue des nombres réels (de la graduation arithmétique) vers les nombres réels positifs (de la graduation géométrique) et réciproquement.

Reste la question où placer des nombres tels que 9,6 ou 17 sur la graduation géométrique ? On remarque alors que le 10 de la graduation géométrique est approximativement à 10 cm de l'origine. Ceci va nous permettre de passer à une graduation fondée sur une suite géométrique de raison 10 et d'utiliser la fonction

logarithme décimal présente sur les calculatrices : la fonction \log donne la distance (plus exactement la mesure algébrique) en dm par rapport à l'origine.

Notons p la valeur sur la graduation géométrique et y la valeur correspondante sur la graduation arithmétique (avec une unité de 1 dm) alors $p = 10^y$ et $y = \log(p)$. On peut alors achever l'activité en plaçant les points, en les reliant par une droite (approximativement) et en déterminant quelques valeurs intermédiaires.

Il reste à faire remarquer que lorsqu'on multiplie 4 par 8 lus sur la graduation géométrique, qui correspondent à 2 et 3 sur la graduation arithmétique, on obtient 32 qui correspond à $2 + 3$ (on peut aussi raisonner en dm), à chercher d'autres exemples puis finalement à justifier que cela sera vrai pour tous les nombres lus sur la graduation géométrique. On peut alors parler de l'importance historique de la relation $f(ab) = f(a) + f(b)$ (relation fonctionnelle des fonctions logarithmes). La fonction \log est définie par cette relation fonctionnelle et $f(10) = 1$; la fonction logarithme de base a (\log_a) est définie par la relation fonctionnelle et par $\log_a(a) = 1$. On déduit de la relation fonctionnelle les propriétés sur les quotients, les inverses et les puissances.

On peut observer que toutes les fonctions f définies par $f(x) = k \log(x)$ vérifient la relation fonctionnelle. D'ailleurs entre \log_2 et \log il n'y a qu'un changement d'unité sur la graduation arithmétique. On admettra que si $a > 1$, la fonction \log_a est strictement croissante, ce qui est le cas en particulier pour la fonction \log . Ceci permet de résoudre des équations ou inéquations avec \log (comme on pourra le faire plus tard avec \ln). On pourra aussi démontrer que $\log_a n$ n'est ni majorée ni minorée sur $]0; +\infty[$ pour déterminer les limites aux bornes.

À ce moment, il y a quantité de problèmes que les élèves peuvent résoudre :

En S : Résoudre l'équation $2^{t/T} - 1 = a$ où $T = 48,8 \times 10^9$ et $a = 0,005$. (pour la datation des roches). Les problèmes de puissance sonore, de nombre de chiffres ou ordre de grandeur... On peut aussi chercher à réaliser une règle à calcul circulaire...

En ES : Dans combien d'années tel capital placé à 1,5 % aura doublé, à partir de combien d'années le capital de l'un placé à 3 % aura dépassé celui d'un autre à 2 %...

Cette activité conduit à définir les fonctions logarithmes et exponentielles de base a sans introduire les fonctions \ln et \exp qui seront définies plus tard lorsque les élèves auront retravaillé sur la notion de dérivée comme indiqué au paragraphe II.

IV Conclusion

De nombreuses situations peuvent conduire à des phénomènes exponentiels. Reconnaître que le modèle sous-jacent fait appel à la même notion mathématique et travailler sur cette notion pour elle-même est pour moi véritablement l'enjeu de cette formation. Découvrir au passage des familles de fonctions parfois définies par une relation fonctionnelle, se poser des questions sur l'exhaustivité ou les conditions qui spécifient certaines d'entre elles, c'est vraiment mener un travail mathématique. Les

problèmes posés sont plus que des prolongements utiles, certains d'entre eux sont à l'origine même des notions.

Il faut préciser que cette démarche concerne le lycée pour lequel les notions de continuité, d'ensemble des réels, de densité ne peuvent être définies dans toute leur rigueur. Par contre, il est intéressant de les rencontrer et de percevoir qu'elles méritent d'être approfondies. À l'université, l'approche peut alors être différente ; il peut être opportun de reconstruire les notions sur des bases axiomatiques plus solides et la définition de la fonction exponentielle peut alors précéder celle de la fonction ln. Cela sera d'autant plus accessible que l'élève aura eu le sentiment de bien maîtriser ses connaissances antérieures et retrouvera un paysage connu.

J'espère que cette contribution aidera à mieux enseigner cette notion et je joins un schéma récapitulatif de ces familles de fonctions.

Schéma des ensembles de fonctions logarithmiques et exponentielles

