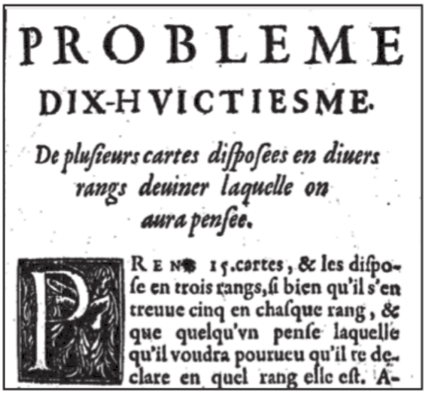
Un joli tour de cartes

Pierre Legrand

Les *Problèmes plaisans et délectables*[1] de Claude Gaspar Bachet de Méziriac comportent peu de tours de cartes. Le plus intéressant[2] figure sous le numéro 18 dans la seconde partie de l'édition de 1624. Comme il le fait souvent, Bachet présente d'abord un exemple. Puis il affirme que sa solution est générale et appuie ses dires d'un second exemple.


PROBLEME
DIX-HVICTIESME.
De pluſieurs cartes diſpoſées en diuers rangs deuiner laquelle on aura penſée.
PRENS 15.cartes, & les diſpoſe en trois rangs, ſi bien qu'il s'en treuue cinq en chaſque rang, & que quelqu'vn penſe laquelle qu'il voudra pourueu qu'il te declare en quel rang elle eſt. A-

Et si Bachet s'était trompé ? Pour le savoir, il faut mettre le problème en forme mathématique, ce qui amène à étudier un curieux problème de point fixe, qui a ceci d'inhabituel qu'il porte sur une application d'un segment de $\mathbb{N}$ dans lui-même.

Dans ce qui suit, la notation $\lceil y \rceil$ désigne la « partie entière par excès » de y, c'est-à-dire le plus petit entier supérieur au sens large à y :

$$\lceil y \rceil - 1 < y \leq \lceil y \rceil .$$

1. Le premier cas étudié par Bachet

1.1. L'énoncé

Dans tous les tours étudiés ici, les cartes sont présentées côté **face**.

Le meneur de jeu dispose quinze cartes sur trois lignes de cinq. Il demande à son cobaye de choisir mentalement une carte et de dire seulement dans quelle ligne elle est.

Puis il ramasse chaque ligne de gauche à droite en respectant l'ordre des cartes (la gauche devenant le haut et la droite le bas), les met ensuite en une pile, ***la ligne de la carte étant mise en seconde position (donc au milieu)****.*

Il remet alors les cartes en trois lignes comme ceci, en commençant par la gauche : 1re carte en ligne 1, 2e en ligne 2, 3e en ligne 3, 4e en ligne 1, 5e en ligne 2, 6e en ligne 3, et ainsi de suite. Il redemande au cobaye dans quelle ligne la carte se trouve.

(1) Voir l'article paru dans le B.V. n° 516.
(2) Sur le site « gallica.bnf.fr », recherche avancée, taper *Problèmes plaisans*, Bachet, 1624. La description du tour est aux pages 143-147.

Puis il ramasse les cartes de la même façon que précédemment. Il les redistribue sur trois lignes selon la même règle et demande pour la troisième fois dans quelle ligne elle se trouve. La carte choisie est alors toujours la troisième de sa ligne.

1.2. La solution

Seule importe la colonne de la carte K cherchée, puisqu'on demande à chaque fois dans quelle ligne elle est.

Appelons (A B C D E) les cartes de la ligne initiale de K. Quand on ramasse les cartes, leur ordre dans la pile obtenue est :

$$\begin{pmatrix} \Delta\ \Delta\ \Delta\ \Delta\ \Delta\ \mathrm{A\ B\ C\ D\ E}\ \nabla\ \nabla\ \nabla\ \nabla\ \nabla \\ \text{haut} \hfill \text{bas} \end{pmatrix}.$$

La première redistribution, colonne par colonne et de gauche à droite, fait passer à la disposition ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} \Delta\ \Delta\ \mathrm{B}\ \mathrm{E}\ \nabla \\ \Delta\ \Delta\ \mathrm{C}\ \nabla\ \nabla \\ \Delta\ \mathrm{A}\ \mathrm{D}\ \nabla\ \nabla \end{pmatrix}.$$

Si la carte K cherchée était dans la colonne 1 (donc si K est A), elle est maintenant dans la colonne 2 ; si elle était dans la colonne 2, 3 ou 4 (donc si K est B, C ou D), elle est dans la colonne 3 ; si elle était dans la colonne 5 (donc si K est E), elle est dans la colonne 4.

Au second ramassage et à la seconde redistribution, les règles sont les mêmes ; donc la carte K, qui était dans la colonne 2, 3 ou 4, vient dans la colonne 3.

Formalisons le travail. Au premier ramassage la carte est en position x dans la ligne ramassée en second. Quand le paquet est ramassé, elle se trouve dans ce paquet en position 5 + x à partir du haut. Quand on redistribue colonne par colonne, elle va donc dans la colonne $f(x)=\left\lceil \frac{5+x}{3} \right\rceil$.

Après le second ramassage et la seconde redistribution, les règles restant les mêmes, la carte finit dans la colonne $f(f(x))$.

Reste à vérifier que $\forall x \in \{1,2,3,4,5\}$, $f(f(x))=3$, ce que montre le tableau :

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	2	3	3	3	4
$f(f(x))$	3	3	3	3	3

N.B. : on notera que 3 est l'unique « point fixe » de f, c'est-à-dire l'unique valeur telle que $f(x)=x$.

2. L’erreur de Bachet

À la fin de sa solution, Bachet ajoute un « Advertissement » dont le début est reproduit ci-après :

> **ADVERTISSEMENT.**
>
> *Si tu comprens bien le fondement de ce ieu il te sera bien aisé de le faire en tout nombre de cartes, & en plusieurs differentes façons, Car la finesse cõsiste en cela, que*

2.1. Le second exemple de Bachet

À l’appui de son affirmation, il donne un exemple. Avec 16 cartes disposées en 2 lignes de 8 cartes, il applique le même processus :

Il demande au cobaye d’en choisir une et de dire dans quelle ligne elle est. Puis il ramasse chaque ligne de gauche à droite en respectant l’ordre des cartes et les met en pile, la ligne de la carte étant mise en seconde position. Il remet les cartes en deux lignes comme ceci, en commençant par la gauche : 1re carte en ligne 1, 2e en ligne 2, 3e en ligne 1, 4e en ligne 2, 5e en ligne 1, 6e en ligne 2, et ainsi de suite. Il demande à nouveau de dire dans quelle ligne elle est. Il applique trois fois de suite ce processus. La carte choisie est au bout de sa ligne.

Le lecteur pourra aisément vérifier que la première fois la carte se trouve dans l’une des quatre dernières colonnes, la seconde fois dans l’une des deux dernières, la troisième fois dans la dernière.

2.2. Un contre-exemple

Bachet en conclut que son procédé est général, ce qui hélas est faux. On échoue par exemple si on l’applique à trois lignes de six cartes au lieu de trois lignes de cinq. Dans ce cas, en effet, lors du premier ramassage, la carte qui est dans la ligne 2 et la colonne x se trouve en position 6 + x dans le paquet. Quand on redistribue colonne par colonne, elle se trouvera dans la colonne $f(x) = \left\lceil \frac{6x}{3} \right\rceil = 2 + \left\lceil \frac{x}{3} \right\rceil$; l’image par f de 1, 2 ou 3 est 3, l’image par f de 4, 5 ou 6 est 4. Quel que soit le nombre de manipulations successives (ce qui revient à itérer l’application f), il y aura stabilisation à la position 3 si on part de 1, 2 ou 3 et à la position 4 si on part de 4, 5 ou 6.

3. Le cas général

3.1. Énoncé

Le meneur de jeu dispose pq cartes sur p lignes de q cartes. Il demande à son cobaye d’en choisir mentalement une et de dire dans quelle ligne elle est.

Puis il itère le processus (P) suivant :

• *ramasser chaque ligne de gauche à droite en respectant l'ordre des cartes (la gauche devenant le haut et la droite le bas), puis mettre ces lignes en une seule pile, la ligne de la carte étant mise en seconde position en comptant à partir du dessus ;*

• *remettre les cartes en p lignes de q cartes, colonne après colonne, en commençant par la gauche, comme ceci : 1re carte en ligne 1, 2e en ligne 2, …, pe en ligne p, puis (p + 1)e en ligne 1, (p + 2)e en ligne 2, etc.*

• *redemander au cobaye dans quelle ligne la carte se trouve.*

Il s'agit de voir si, en répétant (P) un nombre suffisant de fois, la carte se stabilise sur sa ligne en une position indépendante de sa position initiale, de sorte que le meneur de jeu puisse identifier la carte choisie par le cobaye.

3.2. Effet du processus (P)

Si la carte K cherchée est en position x sur sa ligne, quand on ramasse les cartes ligne après ligne, K passe au rang $(q + x)$ dans le paquet. Quand on redistribue colonne par colonne, elle se trouvera dans la colonne numéro $f(x)=\left\lceil \frac{q+x}{p} \right\rceil$, en désignant toujours par $\lceil y \rceil$ l'entier tel que $\lceil y \rceil - 1 < y \le \lceil y \rceil$.
Dans le processus (P), la carte passe donc dans sa ligne de la position x à la position $f(x)=\left\lceil \frac{q+x}{p} \right\rceil$.

3.3. Itération de (P)

(P) définit une application du segment S = $[1,q]$ de $\mathbb{N}$ dans lui-même : $x \to f(x)=\left\lceil \frac{q+x}{p} \right\rceil$. Cette fonction est évidemment croissante au sens large. Quand on effectue (P) n fois de suite, on applique à tout élément x de S la fonction $f^n = \underbrace{f \circ \cdots f \circ f}_{n \text{ fois}}$.

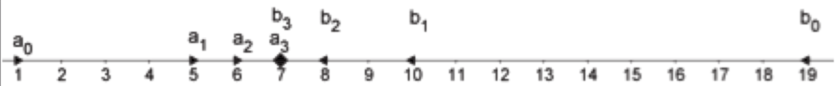
L'image de S par f^n est un segment $S_n = [a_n, b_n]$ de $\mathbb{N}$. De $f(S) \subset S$ on tire par récurrence $S_{n+1} \subset S_n$; la suite (a_n) est donc croissante au sens large, la suite (b_n) décroissante au sens large. Compte tenu de la croissance de f, on a pour tout n : $a_{n+1} = f(a_n)$, $b_{n+1} = f(b_n)$. Les a_n sont les images successives par f de $a_0 = 1$ et les b_n celles de $b_0 = q$.
Les suites (a_n) et (b_n) étant deux suites d'entiers monotones et bornées, elles sont constantes à partir d'un certain rang (qui peut ne pas être le même pour les deux). Soit k le rang à partir duquel les suites sont constantes toutes les deux ; il existe donc

deux points α et β ($\alpha \le \beta$) de S tels que :

$$\forall n \ge k,\ (a_n = \alpha \text{ et } b_n = \beta) \text{ et donc aussi } \forall n \ge k,\ \mathrm{S}_n = [\alpha, \beta].$$

On a en outre $f(\alpha) = \alpha, f(\beta) = \beta$: α et β sont des points fixes de f.

Un exemple *(faisable avec un jeu de tarots dont on enlève deux cartes)* : *p=4, q=19*



Dans l'exemple ci-dessus, on a : s_0 = [1 ; 19], s_1 = [5 ; 10], s_2 = [6 ; 8], s_3 = [7 ; 7]. L'unique point fixe est 7, atteint en 3 coups. Le lecteur pourra vérifier qu'avec $p = 4$, $q = 18$, il y a deux points fixes, 6 et 7.

3.4. Recherche des points fixes de *f*

Une valeur λ de $[1,q]$ est point fixe de f si et seulement si $\left\lceil \dfrac{q+\lambda}{p} \right\rceil = \lambda$, soit $\lambda - 1 < \dfrac{q+\lambda}{p} \le \lambda$, soit encore $p\lambda - p < q + \lambda \le p\lambda$ et, comme il s'agit d'entiers, $p\lambda - p + 1 \le q + \lambda \le p\lambda$, ce qui revient à $q \le (p-1)\lambda \le q + p - 1$ et finalement $\dfrac{q}{p-1} \le \lambda \le \dfrac{q}{p-1} + 1$.

Si $p = 2$, on obtient $q \le \lambda \le q + 1$, ce qui, compte tenu de $\lambda \in [1,q]$, donne le seul point fixe $\lambda = q$.

Supposons maintenant $p \ge 3$:

• Si $(p-1)$ ne divise pas q, il y a un point fixe unique $\lambda = \left\lceil \dfrac{q}{p-1} \right\rceil$.

• Si $(p-1)$ divise q, on trouve deux points fixes : $\dfrac{q}{p-1}$ et $\dfrac{q}{p-1} + 1$.

3.5. Discussion du tour de cartes

• *Si $(p-1)$ ne divise pas q ou si $p = 2$, le tour de cartes réussit*. On a en effet, avec les notations précédentes, $\alpha = \beta$. La k^{e} image de tout élément x de $[1,q]$ est donc $\lambda = \left\lceil \dfrac{q}{p-1} \right\rceil$. Au bout de k manipulations (P), la carte est à la position $\left\lceil \dfrac{q}{p-1} \right\rceil$ dans sa ligne.

• Si $p - 1$ divise q, *avec $p > 2$, le tour échoue*, car si $x \le \dfrac{q}{p-1}$, la carte se stabilise à la position $\dfrac{q}{p-1}$ et si $x \geq \dfrac{q}{p-1} + 1$, la carte se stabilise à la position $\dfrac{q}{p-1} + 1$.

4. Combien de coups pour réussir le tour ?

Le processus (P) étant assez laborieux, le tour n'est réalisable dans la pratique que si, pour p et q donnés (p – 1 ne divisant pas q), le nombre $\mu(p,q)$ de manipulations (P) nécessaires pour amener la carte dans la colonne $\left\lceil \dfrac{q}{p-1} \right\rceil$ est faible.

La succession des manipulations faisant intervenir de façon répétée la fonction $t \to \lceil t \rceil$, on ne peut guère espérer une formule simple pour la valeur exacte de $\mu(p,q)$. Mais il est facile d'en programmer le calcul.

4.1. Un algorithme pour le calcul de $\mu(p,q)$

Voici d'abord l'idée directrice :

– On choisit deux entiers p et q ($p > 2$, $q > 2$)
– Si $p - 1$ divise q, le tour échoue.
Sinon :

– on introduit la fonction $f : x \to \left\lceil \dfrac{q+x}{p} \right\rceil$.

– on prend $a_0 = 1$, $b_0 = q$

– on calcule $a_n = f(a_{n-1})$ et $b_n = f(b_{n-1})$.

– on arrête dès que $a_n = b_n$; $\mu(p,q)$ est la valeur correspondante de n.

Et voici une mise en forme due à Bernard Langer :

si $(p-1)$ *mod* $q = 0$ ***alors écrire*** « Le tour échoue »
  sinon
      $a = 1$
      $b = q$
      $n = 0$
      tant que $a \neq b$ ***répéter***
          $a = f(a)$
          $b = f(b)$
          $n = n + 1$
écrire « $\mu(p,q) =$ » ; n
	Remarque
	Un logiciel de calcul peut ignorer la fonction $u \to \lceil u \rceil$. En notant « *ent* » la fonction partie entière, on observera alors que $\lceil u \rceil = -ent(-u)$.
	Ici, donc,
	$f(x) = -ent\left(-\left(\dfrac{q+x}{p}\right)\right)$

4.2. Avec un jeu de 32 ou 52 cartes

Le tableau ci-après donne pour les valeurs de p et q au moins égales à 3 les résultats des tours qu'on peut effectuer avec un jeu de 32 ou 52 cartes. La mention « non » dans une case signifie que le tour échoue.

	Position finale de la carte dans sa ligne, nombre de coups nécessaire														
***p*↓*q*→**	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
3	2,1	non	3,2	non	4,2	non	5,2	non	6,3	non	7,3	non	8,3	non	9,3
4	non	2,1	2,2	non	3,2	3,2	non	4,2	4,3	non	5,2				
5	1,2	non	2,1	2,2	2,2	non	3,2	3,2							
6	1,1	1,2	non	2,1	2,2	2,2									
7	1,1	1,2	1,2	non	2,1										
8	1,1	1,1	1,2	1,2											
9	1,1	1,1	1,2												

N.B. 1 : les valeurs de p au-delà de 9 ont été écartées, car elles correspondent à une situation triviale : dès le premier tour la carte se trouve en position 1 dans sa ligne.

N.B. 2 : si on range en 4 lignes toutes les cartes d'un jeu de 32 ou 52, on est dans une situation favorable : il y a réussite en 2 coups.

4.3. Un encadrement de $\mu(p,q)$

L'algorithme et le tableau ci-dessus, qui suffisent amplement pour les besoins de la pratique, laissent un peu sur sa faim le lecteur curieux : on sait calculer $\mu(p,q)$ pour des valeurs données de p et q, mais ne peut-on vraiment rien dire d'un peu général sur le comportement de cette fonction ? En fait, on peut donner de $\mu(p,q)$ une bonne approximation grâce au théorème (T) suivant, dont on trouvera en annexe la démonstration.

Théorème (T)

Si $p^{m-1} < q \leq p^m$, où m est un entier strictement positif, alors $\mu(p,q)$ vaut m ou $m + 1$.

Remarque

Les deux cas $\mu(p,q) = m$ et $\mu(p,q) = m + 1$ se présentent effectivement, comme le montrent (voir le tableau du § 4.2.) les deux cas ($p = 4$, $q = 13$) et ($p = 4$, $q = 11$).

Commentaire pratique

Si m désigne l'entier tel que $p^{m-1} < q \leq p^m$, on est ainsi assuré de réussir le tour en appliquant $(m + 1)$ fois le processus (P), le dernier coup pouvant être inutile.

Approximation de la fonction μ

(T) fournit une expression approchée de la fonction μ : m désignant toujours l'entier tel que $p^{m-1} < q \leq p^m$, de $(m - 1) \ln p < \ln q \leq m \ln p$ on tire $m = \left\lceil \frac{\ln(q)}{\ln(p)} \right\rceil$, d'où :

$$\boxed{\mu(p,q)=\left\lceil\frac{\ln(q)}{\ln(p)}\right\rceil+\varepsilon(p,q),\text{ où } \varepsilon(p,q) \text{ vaut 0 ou 1 (selon une loi qui m'échappe…).}}$$

Conclusion

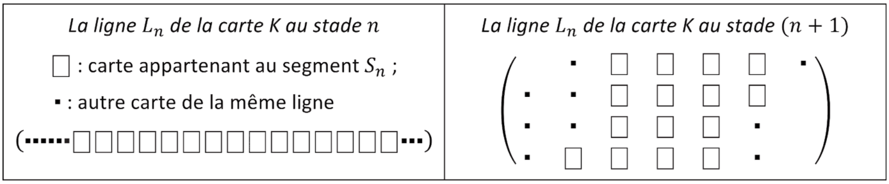
Je ne saurais mieux conclure qu'en citant les deux derniers vers d'un sonnet(3) dédié à Bachet par un de ses admirateurs, un certain Charles Le Grand (ce nom m'est allé droit au cœur) :

Iuſqu'à tes paſſe-temps & recreations,
Tout eſt fait, & dreſſé par nombre, & par meſure.

Annexe : démonstration du théorème (T)

Idée de base

Reprenons les notations du § 3.3.
Quand on a appliqué n fois (y compris pour $n = 0$) le processus (P), on a sur la carte K cherchée l'information suivante : elle est sur sa ligne L_n quelque part entre la position a_n et la position b_n, donc dans une suite de $(b_n - a_n + 1)$ cartes.



Posons pour tout n : $u_n = b_n - a_n + 1$. Appliquons encore une fois le processus (P). Ces u_n cartes, après redistribution, vont se retrouver en des colonnes dont le nombre est u_{n+1}, puisque ce sont ces colonnes qui donnent naissance à la portion de la ligne L_{n+1} sur laquelle va se trouver la carte K. La première et la dernière de ces colonnes peuvent être incomplètes (voir schéma ci-dessus), les $(u_{n+1} - 2)$ autres ayant exactement p cartes. On a donc :

$$\boxed{p(u_{n+1}-2)+2 \le u_n \le pu_{n+1}},$$

la première inégalité devenant une égalité lorsque les deux colonnes extrêmes n'ont qu'une carte, la seconde inégalité devenant une égalité lorsque toutes les colonnes ont p cartes.

N.B. : Ce raisonnement suppose $u_{n+1} \ge 2$. Mais si $u_{n+1} = 1$, on voit aussitôt que la double inégalité ci-dessus reste valable.

Récurrences

(3) Ce sonnet, Bachet l'a, sans excès de modestie, inclus dans son livre (tout au début, avant la préface).

On sait que $u_0 = q$. De $u_{n+1} \geq \frac{1}{p}u_n$ pour tout n, on déduit par récurrence $u_n \geq \frac{q}{p^n}$.

De même, de $p\left(u_{n+1}-2\right)+2 \leq u_n$, qui s'écrit aussi $u_{n+1}-2 \leq \frac{1}{p}\left(u_n-2\right)$, on tire par récurrence $u_n - 2 \leq \frac{1}{p^n}\left(q-2\right)$, soit encore $u_n \leq \frac{q-2}{p^n}+2$. Au total :

$$\boxed{\left(\forall n \in \mathbb{N}\right) \quad \frac{q}{p^n} \leq u_n \leq \frac{q}{p^n}+2-\frac{2}{p^n} \qquad \text{(J)}}$$

Application de (J) au théorème (T)

Supposons que $p^{m-1} < q \leq p^m$, où m est un entier strictement positif. Il s'agit de prouver qu'alors $\mu(p,q)$ vaut m ou $m + 1$.

• En faisant $n = m$ dans la seconde inégalité (J), il vient $u_m \leq \frac{q}{p^m}+2-\frac{2}{p^m}$,, d'où $u_m \leq 3-\frac{2}{p^m}$, et, comme u_m est entier, $u_m \leq 2$. Donc $b_m - a_m \leq 1$. Le segment S_m est donc de longueur 1 ou 0, mais s'il est de longueur 1, le segment S_{m+1} sera de longueur 0 (sinon on aurait $S_{m+1} = S_m$ et il y aurait deux points fixes). Au total, $\mu\left(p,q\right) \leq m + 1$.

• Faisons maintenant $n = m - 1$ dans la première inégalité (J) ; il vient $u_{m-1} \geq \frac{q}{p^{m-1}}$ et, comme $q > p^{m-1}$, on a $u_{m-1} > 1$, d'où l'on déduit $\mu\left(p,q\right) \geq m$.

• On a donc bien finalement $m \leq \mu\left(p,q\right) \leq m + 1$ et, comme $\mu\left(p,q\right)$ est entier, cela règle la question.