Calculer des aires

Julien Moreau

« La Géométrie, par exemple, considère les rapports des différentes parties de l'étendue ; car *mesurer*, ce qui est l'objet primitif et principal de la Géométrie, n'est autre que connoître le rapport d'une certaine portion de l'étendue à une autre, prise pour mesure fixe. »

Jean-Étienne Montucla, *Histoire des mathématiques* (1758), tome I, page 3.

Un absurde mépris

Dans notre enseignement secondaire, la mathématique est la mal aimée des programmes, la géométrie est la mal aimée des programmes de mathématiques et la notion d'aire est la mal aimée des programmes de géométrie. Autant dire que c'est le dernier des soucis de nos responsables. Regardons d'un peu plus près :

En sixième, on voit l'aire d'un rectangle, d'un triangle rectangle, d'un disque ; en cinquième celles d'un parallélogramme et d'un triangle. En quatrième, rien de nouveau. En troisième apparaît l'effet sur l'aire « d'une réduction ou d'un agrandissement de rapport k ». Voilà pour le collège[1]. Au lycée, la chose est simple : il n'y a rien.

Un tel mépris pour une notion aussi utile dans la vie courante (qui n'a pas eu à vérifier le métré d'une pièce ou d'un terrain, ou à estimer la quantité de peinture nécessaire pour couvrir un mur ?) peut déjà laisser rêveur. Mais ce qui dépasse l'entendement, c'est que des mathématiciens aient pu envoyer aux oubliettes cette première initiation à la théorie de la mesure, indispensable à la compréhension du calcul intégral et des probabilités.

Des outils essentiels

Dans ce qui suit, l'aire d'une figure F sera toujours désignée par S(F).
Outre les quelques formules du programme, les exemples que nous proposons ci-après utilisent trois théorèmes de base (qui, comme la notion d'aire elle-même, ne reposent à ce stade que sur l'intuition visuelle) :

- Étant donné deux figures A et B, on a[2] $S(A \cup B) + S(A \cap B) = S(A) + S(B)$; en particulier, si $A \cap B$ est d'aire nulle, $S(A \cup B) = S(A) + S(B)$.
- Si B se déduit de A par translation, symétrie ou rotation, alors S(B) = S(A).
- Si B est « une réduction ou un agrandissement » de A dans le rapport k, alors $S(B) = k^2\,S(A)$.

(1) La situation risque d'empirer si l'actuel projet de programme est entériné tel quel.
(2) À rapprocher des formules de dénombrement et de probabilités :
$\mathrm{card}(A \cup B) + \mathrm{card}(A \cap B) = \mathrm{card}(A) + \mathrm{card}(B)$ et $P(A \cup B) + P(A \cap B) = P(A) + P(B)$.

Dans chacune des deux parties qui suivent, les problèmes sont approximativement classés par ordre de difficulté croissante. Les plus difficiles sont signalés par un astérisque.

Quelques aires polygonales

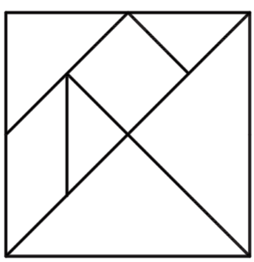
Deux exercices incontournables

Ces deux exercices me semblent devoir être traités en priorité pour combler les lacunes du programme.
• L'*aire d'un losange* comme demi-produit de ses diagonales, qui s'obtient immédiatement.
• L'*aire d'un trapèze*, qui est absente alors que :
– son calcul est une conséquence triviale de la formule donnant l'aire d'un triangle ;
– on ne peut s'en passer pour le calcul approché d'une intégrale (méthode des trapèzes).

Problèmes 1 et 1 bis : deux puzzles connus

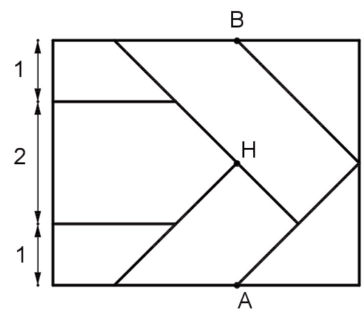
Le *Tangram*

Si le côté du grand carré est de longueur 4, combien valent les aires des différents morceaux ?



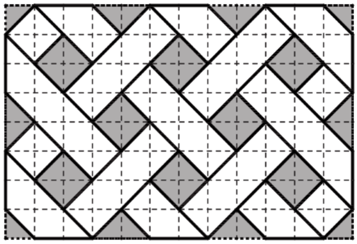
Le *Todong*

La longueur du rectangle est 5. Tous les angles de la figure sont des multiples de 45°. Le point H est le milieu de [AB]. Quelle est l'aire de chaque pièce ?



Problème 2

La figure ci-contre représente un rectangle gris de 12 cm sur 8, partiellement recouvert par une bande de papier blanc d'un seul tenant. Les carreaux de la grille représentée en pointillés sont des carrés de 1 cm de côté.
1) Quelle est l'aire de la portion du rectangle recouverte par la bande de papier ?
2) On déroule la bande de papier ; quelles sont son aire et sa longueur ?



1) On procède par différence : il y a 8 carrés gris d'aire 2 cm², 6 triangles gris d'aire 1 cm², 4 triangles gris d'aire $\frac{1}{2}$ cm². L'aire en grisé est donc 24 cm².

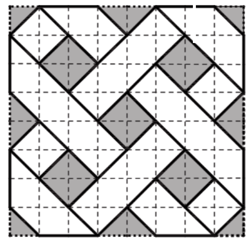
L'aire du rectangle étant 8 × 12 cm², l'aire recouverte est 72 cm².

2) La bande de papier a une largeur égale à $\sqrt{2}$ cm. Pour avoir sa longueur, il suffit d'avoir son aire. Examinons les zones du rectangle recouvertes par une double épaisseur de papier : il y a sur les bords 10 triangles (3 + 3 + 2 + 2) d'aire 1 cm² chacun et, ne touchant pas aux bords, 7 carrés (2 + 3 + 2) d'aire 2 cm² chacun, ce qui fait en tout 24 cm².
L'aire totale de la bande est donc 72 + 24 = 96 cm².

Sa longueur est donc $\dfrac{96}{\sqrt{2}} = 48 \times \sqrt{2} \approx 67{,}9$ cm.

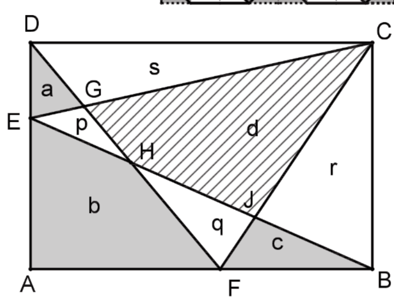
N.B. : Une démonstration élégante du 2) peut s'obtenir ainsi : on trace la ligne médiane de la bande de papier et on totalise les longueurs des segments qui la composent. On a ainsi directement la longueur de la bande. D'où son aire.

Problème 2 bis



Une version simplifiée est présentée ci-contre. Cette fois, il n'y a pas une seule, mais deux bandes de papier recouvrant partiellement un carré 8 × 8. Les calculs sont laissés aux soins du lecteur.

Problème 3(3)



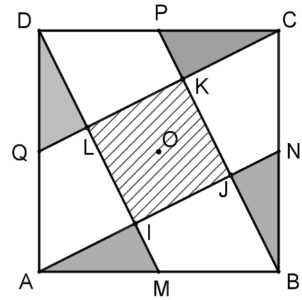
Étant donné un rectangle ABCD, on prend un point arbitraire E sur]AD[et un point arbitraire F sur]AB[. Avec les notations de la figure, les lettres minuscules représentant l'aire du polygone où elles se trouvent, établir les formules $p + r = q + s$ et $a + b + c = d$.

1) L'aire du triangle DFC et celle du triangle BEC sont égales à la moitié de celle du rectangle. Donc $p + d + r = q + d + s$, d'où $p + r = q + s$.
2) L'aire du triangle ECB est égale à la moitié de celle du rectangle, donc égale à l'aire de la partie du rectangle située hors de ce triangle :
$p + d + r = a + s + b + q + c$.
Compte tenu de $p + r = q + s$ il vient $d = a + b + c$.

Problème 4

On donne encore un carré ABCD de côté 1. Soit M le milieu de [AB], N celui de [BC], P celui de [CD], Q celui de [DA]. On trace les segments [AN], [BP], [CQ], [DM], ce qui découpe le carré en 9 morceaux. Quelles sont la forme et l'aire du morceau central ?

(3) Ce problème généralise un exercice de la rubrique *De-ci de-là* : voir le B.V. n° 499 page 360.



La figure est invariante par quart de tour autour du centre O du carré ABCD, donc aussi le quadrilatère IJKL, qui est par suite un carré de centre O. Pour la même raison, les quatre triangles en grisé sur la figure sont isométriques, donc ont même aire x. De même les quatre quadrilatères en blanc sont isométriques, donc ont même aire y.
Le triangle ABJ est, de par le théorème de Thalès un agrandissement du triangle AMI dans le rapport $\frac{\text{AB}}{\text{AM}} = 2$, donc S(ABJ) = 4 S(AMI), d'où $x + y = 4x$, donc $y = 3x$.

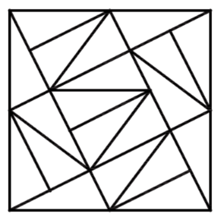
L'aire du triangle ABN est $\frac{1}{2}$ AB × BN, soit $\frac{1}{4}$; mais c'est aussi $x + y + x$, donc $5x$.

On a ainsi $5x = \frac{1}{4}$, d'où $x = \frac{1}{20}$, dont on déduit $y = \frac{3}{20}$. L'aire σ du carré central s'obtient à partir de l'aire totale :

$\sigma = 1 - 4x - 4y = 1 - \frac{4}{20} - 4 \times \frac{3}{20}$, ce qui donne $\sigma = \frac{1}{5}$.

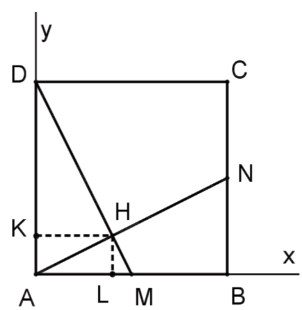
Démonstration par un puzzle

Bruno Alaplantive nous a communiqué la jolie démonstration muette ci-contre.



Problème 4 bis

Ce problème, variante du précédent, fournit une occasion de mettre en application les équations de droites.
On donne un carré de côté 1. Soit M le milieu de [AB], N celui de [BC], H l'intersection de [AN] et [MD].
1) Montrer que les triangles AMD et AND ont même aire. En déduire que le quadrilatère BNHM et le triangle AHD ont même aire.
2) Calculer l'aire des quatre morceaux découpés dans le carré.



1) On a évidemment S(AMD) = S(ABN) = $\frac{1}{4}$. Les aires de AHD et BNHM s'obtiennent en retranchant de cette valeur $\frac{1}{4}$ S(AMH), donc elles sont égales.
2) Avec les axes de coordonnées indiqués sur la figure, H est à l'intersection des droites (AN), d'équation $y = \frac{x}{2}$, et (DM), d'équation $y = 1 - 2x$. On en tire $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{5}$. D'où : S(AHD) = $\frac{1}{2}$ AD × KH = $\frac{1}{5}$ (donc S(MBNH) = $\frac{1}{5}$) ;

$S(AMH) = \dfrac{1}{2}\ AM \times LH = \dfrac{1}{20}$.

On a la dernière aire par différence : $S(CDHN) = 1-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{20}=\dfrac{11}{20}$.

Remarque : Si l'on sait manier les triangles semblables, on peut éviter d'utiliser un repère. Les triangles AHM et ABN sont semblables, donc le premier est une réduction du second dans le rapport $\dfrac{AM}{AN}=\dfrac{1}{2}:\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

Donc $S(AMH) = \dfrac{1}{5}\ S(ABN) = \dfrac{1}{20}$.

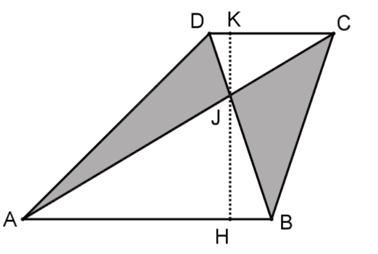
On a ensuite $S(AHD) = S(DAM) - S(AHM) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{20} = \dfrac{1}{5}$

Problème 5

On donne un trapèze ABCD dont les bases [AB] et [CD] ont pour longueurs respectives 4 et 2 et dont la hauteur a pour longueur 3. Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en J.

1) Montrer que les triangles AJD et BJC ont même aire.

2) Calculer les aires des quatre triangles.



1) Les triangles AJD et BJC ont même aire. En effet, si on adjoint à chacun le triangle JCD, on obtient les triangles ACD et BCD qui ont même base [CD] et même hauteur [HK], donc même aire.

2) On a AB = 2CD ; il en résulte que, d'après le théorème de Thalès, le triangle ABJ est un agrandissement du triangle CDJ dans le rapport 2. Donc HJ = 2JK et, comme HJ + JK = 3, on a JK = 1, HJ = 2.

On a : $S(CDJ) = \dfrac{1}{2}\ CD \times JK = \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 = 1$.

Le triangle ABJ étant un agrandissement du triangle CDJ dans le rapport 2, son aire est 4.

L'aire du triangle AJD est :

$S(ABD) - S(ABJ) = \dfrac{1}{2}\ AB \times HK - 4 = \dfrac{1}{2}\ 4 \times 3 - 4$.

Les triangles AJD et BJC ont donc chacun pour aire 2.

Problème 5 bis*

Si on reprend le même problème avec des données générales, en posant AB = a, CD = b avec $b < a$, et en appelant h la longueur de la hauteur, l'égalité des aires des triangles AJD et BJC reste valable pour la même raison que plus haut.

Le triangle ABJ est un agrandissement du triangle CDJ dans le rapport $\frac{a}{b}$. De $\frac{\mathrm{JH}}{\mathrm{JK}} = \frac{a}{b}$ et JH + JK = h on tire $\mathrm{JH} = \frac{ha}{a+b}$ et $\mathrm{JK} = \frac{hb}{a+b}$. On a

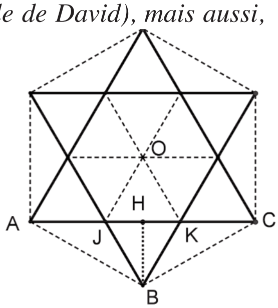
$\mathrm{S(CDJ)} = \frac{1}{2}\ \mathrm{CD} \times \mathrm{JK} = \frac{hb^2}{2(a+b)}$, puis $\mathrm{S(ABJ)} = \frac{ha^2}{2(a+b)}$.

L'aire du triangle ABD est $\frac{1}{2}\ \mathrm{AB} \times \mathrm{HK} = \frac{1}{2}\ ha$.

L'aire du triangle AJD est donc $\frac{1}{2}ha - \frac{1}{2}h\frac{a^2}{a+b} = \frac{hab}{2(a+b)}$, et celle de BJC lui est égale.

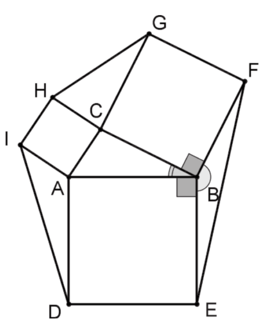
Problème 6 : L'hexagramme

Ce symbole célèbre, obtenu en prolongeant les côtés d'un hexagone régulier $\mathcal{H}$ de façon à obtenir une étoile, est utilisé par le judaïsme (étoile de David), mais aussi, notamment, par l'hindouisme et par les mormons.



L'hexagone $\mathcal{H}$ est décomposable en six triangles équilatéraux de côté le rayon R de son cercle circonscrit. Les six triangles formant les pointes sont eux aussi équilatéraux, car les angles $\widehat{\mathrm{KJB}}$ et $\widehat{\mathrm{JKB}}$ sont l'un et l'autre supplémentaires d'un angle de l'hexagone $\mathcal{H}$, donc valent 180° − 120°, soit 60°. Il en résulte que la somme des aires des pointes est égale à l'aire de $\mathcal{H}$.
De AJ = JK = R, on déduit que les aires des triangles AJB et BJK valent l'une et l'autre $\frac{1}{2}$ R × BH, donc sont égales. La somme des aires des triangles complétant l'étoile en un hexagone est ainsi égale à la somme des aires des pointes. Au total, l'aire de l'hexagone des pointes est le triple de l'aire de $\mathcal{H}$. Le premier est donc un agrandissement du second dans le rapport $\sqrt{3}$ ce qui peut se justifier directement en appliquant le théorème de Pythagore au triangle ABK pour calculer AB.

Problème 7



Ce problème reprend, à partir d'un triangle quelconque et non plus rectangle, la figure utilisée par Euclide pour la démonstration du théorème de Pythagore(4).

On donne un triangle ABC et l'on construit sur ses côtés, vers l'extérieur, trois carrés comme indiqué sur la figure. Montrer que l'aire de chacun des triangles BEF, CGH, AID est égale à celle du triangle ABC.

(4) Voir le B.V. n° 515, p. 391.

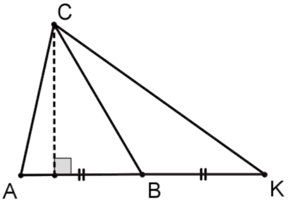
Compte tenu de la symétrie des données, il suffit de faire la démonstration pour un seul des trois, disons BEF.

Deux situations se présentent :

1) *On connaît la formule* $S = \frac{1}{2} bc \sin \widehat{A}$ *pour l'aire d'un triangle et on connaît le sinus d'un angle obtus.*

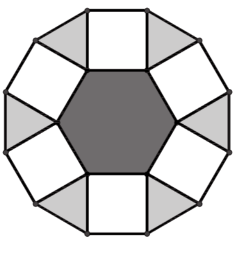
Puisque BE = AB et BF = BC il suffit de montrer que $\sin \widehat{EBF} = \sin \widehat{ABC}$, ce qui est évident, puisque ces angles sont supplémentaires.

2) *On ignore ces résultats.*
On n'est pas perdu pour autant : on fait tourner d'un angle droit le triangle BFE, ce qui amène F en C et E en K, symétrique de A par rapport à B et ne change pas l'aire du triangle. Or les deux triangles ABC et KBC ont même longueur de base et même hauteur issue de C, donc même aire, ce qui règle la question.



Problème 8 : aire d'un dodécagone régulier

Sur chaque côté d'un hexagone régulier et à l'extérieur de celui-ci on construit un carré, puis on joint les sommets des carrés comme indiqué sur la figure. L'angle des côtés de deux carrés voisins est 360° – 120° – 90° - 90° = 60°, donc les six triangles du bord sont équilatéraux. Appelons a le côté de l'hexagone ; celui-ci est décomposable en six triangles équilatéraux d'aire $a^2 \frac{\sqrt{3}}{4}$, donc son aire est $\frac{3}{2} a^2 \sqrt{3}$. La somme des aires des six triangles du bord lui est égale. Il reste à ajouter la somme des aires des carrés, soit $6a^2$.

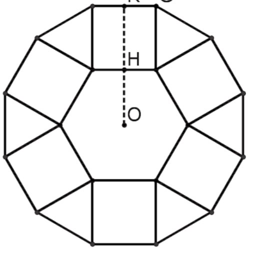


L'aire totale de la figure est donc $3\left(2+\sqrt{3}\right)a^2$. Cette figure est un dodécagone régulier : les côtés valent tous a, les angles valent 60° + 90° = 150°.

Parenthèse* : un encadrement de π

Reprenons le problème précédent avec les notations de la figure ci-contre et faisons pour simplifier les écritures a = 1.

On a $OK = OH + HK = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$. Le périmètre du disque inscrit dans le dodécagone est donc $2\pi\, OK = \pi\left(\sqrt{3}+2\right)$. Il est inférieur à celui du dodécagone, soit 12, ce qui donne



$\pi < \dfrac{12}{2+\sqrt{3}}$ soit encore $\pi < 12\left(2-\sqrt{3}\right)$, d'où $\pi < 3{,}216$.

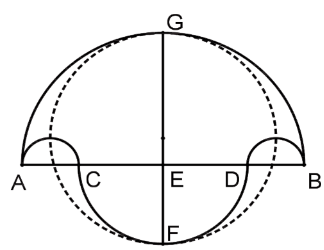
On a $OG^2 = GK^2 + KG^2 = \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)^2 + \dfrac{1}{4} = 2+\sqrt{3} = \dfrac{\left(1+\sqrt{3}\right)^2}{2}$, d'où $OG = \dfrac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$. Le périmètre du disque circonscrit au dodécagone est 2π OG, soit $\pi > \left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)$. Il est supérieur à celui du dodécagone, d'où $\pi > \dfrac{12}{\sqrt{2}+\sqrt{6}}$, soit $\pi > 3\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)$, et a fortiori $\pi > 3{,}105$. Finalement : $\boxed{3{,}105 < \pi < 3{,}216}$.

Quelques aires curvilignes

Problème 9 : le « salinon[5] » d'Archimède

Ce problème constitue la proposition 14 du Livre des Lemmes d'Archimède, recueil de quinze petits problèmes de géométrie plane.

On donne quatre points alignés A, B, C, D dans cet ordre, tels que AC = DB. D'un côté de la droite (AB) on trace les demi-cercles de diamètres [AB], [AC], [DB] ; de l'autre côté on trace le demi-cercle de diamètre [CD]. La médiatrice de [AB] coupe les demi-cercles de diamètres [AB] et [CD] respectivement en G et F. Établir que l'aire S délimitée par les quatre demi-cercles est égale à celle du disque de diamètre [FG].



Soit R le rayon du demi-cercle de diamètre [AB], r celui du demi-cercle de diamètre [CD] ; le rayon des demi-cercles de diamètres [AC] et [DB] est $\dfrac{1}{2}$ (R − r). On a donc : $S = \dfrac{\pi}{2}\left(R^2 + r^2 - \dfrac{1}{2}(R-r)^2\right)$, ce qui donne $S = \dfrac{\pi}{4}\left(R^2 + r^2 + 2Rr\right)$, soit $S = \dfrac{\pi}{4}(R+r)^2$.

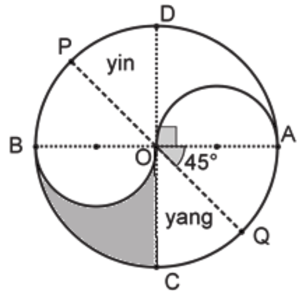
Or la distance FG est FE + EG, soit R + r ; on a finalement bien $S = \dfrac{\pi}{4}FG^2$.

N.B. : Avec une classe, mieux vaut sans doute travailler sur un exemple numérique.

Problème 10 : le yin et le yang

Le symbole *yin-yang* est universellement connu. Mais c'est aussi un prétexte à quelques jolis exercices tels que celui-ci.

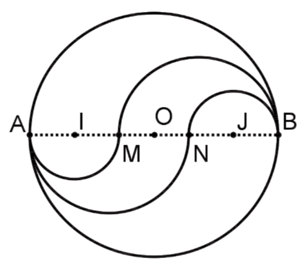
(5) Le terme pourrait dire « salière », mais cette interprétation est contestée.



Montrer que les trois diamètres tracés sur la figure partagent le yin et le yang chacun en quatre parties d'aire égale.

Par raison de symétrie, il suffit de prouver le résultat pour le *yang*. Et, toujours par raison de symétrie, l'aire du yang et celle du *yin* sont égales à la moitié de celle du disque.
Si R est le rayon du grand disque, son aire est πR^2. Le demi-cercle supérieur de diamètre [OA] a pour aire $\frac{1}{2}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^2$, soit $\frac{1}{8}\pi R^2$. Les secteurs OQA et OCQ sont des huitièmes du grand disque, donc d'aire $\frac{1}{8}\pi R^2$. Reste l'aire du triangle curviligne (en gris sur la figure), qui est l'aire du *yang* moins la somme des trois aires qu'on vient de calculer, soit $\frac{1}{2}\pi R^2 - 3 \times \frac{1}{8}\pi R^2$, donc encore $\frac{1}{8}\pi R^2$.

Problème 11 : un ménage à trois*



On se donne un disque de diamètre [AB] ; on choisit sur [AB] deux points M et N symétriques par rapport à son milieu O, M étant sur]AO[. Puis on partage le disque en trois morceaux (disons, de haut en bas : le yin, le neutre et le yang) en traçant les quatre demi-cercles indiqués sur la figure. Soit R le rayon du disque, x la distance OM. Comment choisir pour que les trois aires soient égales ?

Compte tenu de la symétrie de la figure, on sait déjà que le *yin* et le *yang* ont même aire. Il suffit donc de trouver x tel que l'aire du *yin* soit égale au tiers de l'aire du disque. Or le *yin* s'obtient en adjoignant à la moitié supérieure du grand disque le demi-disque de diamètre [AM] et en lui retranchant le demi-disque de diamètre [MB].

L'aire σ du *yin* est donc : $\sigma = \frac{1}{2}\pi R^2 + \frac{1}{8}\pi(R-x)^2 - \frac{1}{8}\pi(R+x)^2 = \frac{1}{2}\pi R^2 - \frac{1}{2}\pi R x$,

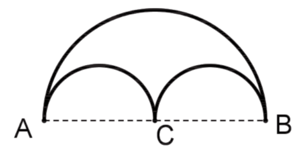
soit encore $\sigma = \frac{1}{2}\pi R(R-x)$.

On veut avoir $\sigma = \frac{1}{3}\pi R^2$, ce qui est réalisé si et seulement si $\frac{1}{2}(R-x) = \frac{1}{3}R$, donc si $x = \frac{R}{3}$, ce qui donne AM = MN = NB = $\frac{2}{3}$R. On doit donc choisir M et N divisant le diamètre en trois segments de même longueur.

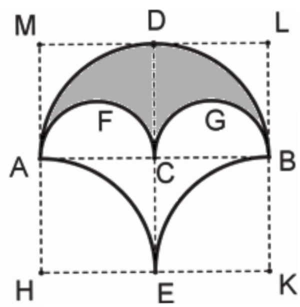
Remarque. Le lecteur pourra vérifier qu'en divisant le segment [AB] en quatre segments de même longueur on peut, de façon analogue, partager le disque en quatre parts de même aire … et que la propriété s'étend au-delà de quatre.

Problème 12 : la pelta ou « bouclier des Amazones »*

Ce motif formé de trois demi-cercles se retrouve souvent dans les mosaïques romaines. Si on appelle a la distance AC, l'aire ainsi délimitée vaut $\frac{\pi a^2}{2} - 2 \times \frac{\pi a^2}{8}$, soit $\frac{\pi a^2}{4}$.



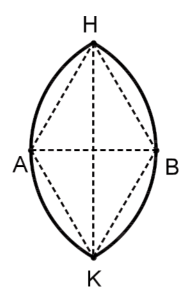
On l'utilise pour paver le plan comme dans la figure de gauche ci-après, qui reproduit une mosaïque du IVe siècle trouvée à Almenara de Adaja, dans la province de Valladolid (Espagne).



La figure à sa droite représente les deux éléments de base dont la répétition engendre le pavage. Les aires des triangles curvilignes AMD, DLB, BCE, ECA sont égales. Il en résulte que l'aire du triangle curviligne AEBDA est égale à celle du rectangle ABLM, donc à $2a^2$.
L'aire du quadrilatère curviligne AEBGCFA est la différence entre cette aire et celle de la pelta, soit $\left(2 - \frac{\pi}{4}\right)a^2$.

Problème 13 : la mandorle*

Cet élément décoratif(6) servait, dans les tympans romans en particulier, à mettre en valeur l'effigie d'un personnage qu'on y insérait. Il s'agit de la figure délimitée par deux arcs de cercle de mêmes extrémités H et K, le centre de chacun étant le milieu de l'autre.
La distance AB = a des deux centres étant connue, on veut connaître la hauteur h et l'aire S de la mandorle.



Les deux triangles ABH et ABK étant équilatéraux de côté a, on

(6) Le terme vient de l'italien *mandorla*, amande. Signalons que les Anglo-Saxons, avec leur sens poétique bien connu, utilisent la formule latine *vescica piscis*, « vessie de poisson ».

en déduit $h = a\sqrt{3}$. Le secteur de cercle de centre A déterminé par l'arc HBK a pour aire le tiers de l'aire du disque de centre A et de rayon a, donc $\frac{1}{3}\pi a^2$, qui est aussi l'aire du secteur de cercle de centre B déterminé par l'arc HAK.
Ces deux secteurs recouvrent entièrement la mandorle, le losange AHBK, d'aire $\frac{1}{2}a^2\sqrt{3}$, étant recouvert deux fois. L'aire de la mandorle est donc la somme de leurs aires diminuée de l'aire du losange, soit :

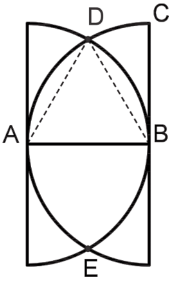
$$S = \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2 \approx 1{,}23a^2.$$

Remarque : Cette mandorle « standard » convient bien à un personnage debout, mais elle est un peu étroite pour un personnage assis en majesté. Les artistes trichaient alors en prenant deux arcs de rayon un peu supérieur à la distance des centres.

Parenthèse historique : autour de la mandorle*

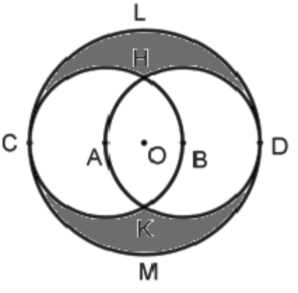
Des variantes de la mandorle se retrouvent dans un certain nombre de motifs décoratifs célèbres, anciens ou récents.

Le monogramme du roi Henri II



La figure est formée de trois lettres entrelacées, un H et deux C (dont un à l'envers), représentant le roi et son épouse Catherine de Médicis. Mais on pouvait l'interpréter autrement : un H et deux D, en hommage à Diane de Poitiers, maîtresse du roi.
Sur la reproduction approximative ci-contre(7), on peut calculer les aires en fonction de AB = a. Le triangle ADB est équilatéral, donc la figure ADBE est une mandorle d'aire $S = \left(\frac{2}{3}\pi - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)a^2$ calculée plus haut. Quant à l'aire S′ du triangle curviligne BCD, on l'a en remarquant que la somme des aires des deux demi-cercles, soit πa^2, est 4S′ + 2S.

Un motif de ferronnerie et d'orfèvrerie



La figure comporte trois cercles : un cercle de centre A passant par B, un cercle de centre B passant par A, un cercle de centre le milieu O de [AB] tangent aux deux précédents.
Il s'agit de calculer l'aire $\boldsymbol{\sigma}$ *de chacun des deux croissants CHDL et CKDM.*

En utilisant les deux disques de centres A et B et les deux croissants, on recouvre entièrement le grand

(7) En fait le monogramme réel est plus large que sur la figure et les tracés arrondis ne sont pas vraiment des demi-cercles.

disque, la mandorle centrale étant recouverte deux fois.
Cela donne pour les aires, en désignant celle de la mandorle par S et en posant AB = a, la relation :

$$2\pi a^2 + 2\sigma = \pi\left(\frac{3}{2}a\right)^2 + \mathrm{S},$$

oit encore

$$\sigma = \frac{\pi}{8}a^2 + \frac{1}{2}\mathrm{S} = \left(\frac{11}{24}\pi - \frac{\sqrt{3}}{4}\right)a^2 \approx 1{,}01a^2.$$

Remarque
Les logos des marques Chanel et Gucci exploitent le même thème de façon plus complexe.

Chanel Gucci

Conclusion

Les exemples ci-dessus suffisent (je l'espère) pour montrer à quel point la notion d'aire permet d'exercer à la fois raisonnement, capacité de calcul et intuition visuelle. Si l'on accepte de dépasser le programme des collèges, on trouve en outre(8) quantité de jolis énoncés touchant à la recherche de l'aire maximale d'une figure soumise à certaines contraintes. Ce genre de problèmes, qui remonte à l'Antiquité (penser à la légende de la fondation de Carthage(9)), a donné naissance entre autres au calcul des variations.

Je remercie Bruno Alaplantive, Danièle Eynard, Bernard Parzysz et Marc Roux pour l'aide qu'ils m'ont apportée dans la mise au point de cet article.

(8) Voir par exemple les articles « Diamètres et aires » (B.V. n° 508), « Triangles et parallélogrammes » (B.V. n° 496) et « Triangles, parallélogrammes et polygones » (B.V. n° 498).
(9) La reine Didon, arrivant de Tyr, obtint la possession du terrain en bord de mer qu'elle pourrait délimiter par une peau de bœuf. Découpant celle-ci en fines lanières, elle la disposa en un demi-cercle dont les extrémités étaient sur le rivage.