Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

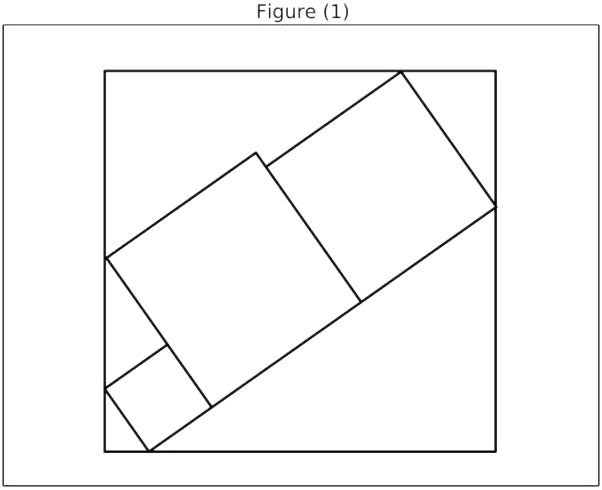
* * * * *

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 518–1 (Michel Lafond) (Dijon)

Trois carrés sont inscrits dans un grand carré dont le côté mesure 223 cm comme sur la figure (1) ci-dessous. Trois de leurs côtés sont alignés et le côté du carré intermédiaire mesure 105 cm. Calculer les mesures des côtés des deux petits carrés.

Figure (1)



Problème 518–2 (Jean-Pierre Friedelmeyer, Strasbourg)

Déterminer tous les polynômes du troisième degré à coefficients rationnels dont toutes les racines ainsi que celles du polynôme dérivé sont des entiers relatifs.

Problème 518–3

Soit A, B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $AB + BA = 0$. Calculer, pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, $(A + B)^p$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 505-2 (Pierre Renfer, Saint Georges d'Orques)

Après une soirée dans un pub, n lords récupèrent leurs chapeaux au vestiaire de facon aléatoire. À la sortie du pub, la fraîcheur de la nuit leur permet de retrouver un peu leurs esprits et ils décident de continuer la fête. Chaque lord pose ses mains sur les épaules de celui qui porte son chapeau. Se forment ainsi des chenilles fermées (où un lord portant son propre chapeau forme une chenille à lui tout seul). Calculer l'espérance et la variance du nombre de chenilles.

Solutions de Pierre Carriquiry (Clichy), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Dans son énoncé initial, l'auteur de ce problème, **Pierre Renfer**, imaginait des ivrognes sortant d'une soirée bien arrosée. Mais j'ai transposé ce problème avec des lords sortant d'un pub, comme dans le classique problème du chapeau(1).
On numérote les lords de 1 à n et l'on définit une permutation σ de l'ensemble $[[1, n]]$ en associant à chaque lord k le lord $\sigma(k)$ qui porte son chapeau. On note X_n la variable aléatoire correspondant au nombre de chenilles, qui est également le nombre de cycles à supports disjoints de la permutation σ.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in [[1, n]]$, on note $a(n, k)$ le nombre de permutations de $[[1, n]]$ possédant k cycles à supports disjoints. Alors

$$P(X_n = k) = \frac{a(n,k)}{n!}.$$

Pour $n \geq 2$ et $k \geq 1$,

$$a(n,k) = a(n-1,k-1) + (n-1)a(n-1,k) \qquad (1)$$

Le premier terme du second membre correspond au nombre de permutations σ admettant n pour point fixe et la restriction de σ à $[[1; n-1]]$ comporte alors $k-1$ cycles à supports disjoints. Si au contraire n n'est pas un point fixe de σ, on commence par choisir une permutation σ' de $[[1; n-1]]$ possédant k cycles à supports disjoints (ce qui donne $a(n-1, k)$ choix) puis l'on choisit l'image p de n (ce qui donne $n-1$ choix) et l'on intercale n devant p dans le cycle de σ' contenant p.

En divisant la relation (1) par $(n-1)!$ et en multipliant par k, on obtient

$$nk\,P(X_n = k) = k\,P(X_{n-1} = k-1) + (n-1)k\,P(X_{n-1} = k),$$

soit

$$nk\,P(X_n = k) = (k-1)P(X_{n-1} = k-1) + P(X_{n-1} = k-1) + (n-1)k\,P(X_{n-1} = k).$$

(1). Si chaque lord prend un chapeau au hasard, la probabilité qu'aucun lord ne reparte avec son chapeau tend vers $\dfrac{1}{n}$ quand le nombre de lords tend vers $+\infty$.

En sommant ces relations pour $k \in [[1;\, n]]$, on obtient

$$n\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + 1 + (n-1)\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}),$$

soit encore

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}. \qquad (2)$$

Sachant que $\mathrm{E}(\mathrm{X}_1) = 1$, on trouve que l'espérance cherchée est donnée par la série harmonique :

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}.$$

Pour la variance, on part de la relation (1) que l'on divise par $(n - 1)!$ et que l'on mutliplie par k^2 :

$$nk^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_n = k) = (k-1)^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1) + 2(k-1)\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1)$$
$$+\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k-1) + (n-1)k^2\,\mathrm{P}(\mathrm{X}_{n-1} = k).$$

En sommant ces relations pour $k \in [[1,\, n]]$, on obtient par le théorème de transfert,

$$n\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n)^2\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right) + 2\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + 1 + (n-1)\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right),$$

donc

$$\mathrm{E}\left((\mathrm{X}_n)^2\right) = \mathrm{E}\left((\mathrm{X}_{n-1})^2\right) + \frac{2}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n}. \qquad (3)$$

En mettant la relation (2) au carré, on obtient

$$\left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)\right)^2 = \left(\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1})\right)^2 + \frac{2}{n}\mathrm{E}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n^2}. \qquad (4)$$

En soustrayant la relation (4) à la relation (3), on obtient

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \mathrm{V}(\mathrm{X}_{n-1}) + \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2}.$$

Sachant que $\mathrm{V}(\mathrm{X}_1) = 0$, on trouve

$$\mathrm{V}(\mathrm{X}_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}.$$

Michel Lafond trouve la relation (2) entre les espérances en faisant un arbre de probabilités.

Pierre Carriquiry me signale l'article « Statistiques du nombre de cycles d'une permutation » de **Xavier Caruso** et **Igor Kortchemski**, paru dans la revue RMS volume 121 numéro 4 (2010-2011).

Problème 505–4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$ connexe par arcs. Montrer que K ne peut pas s'écrire comme une réunion dénombrable disjointe de fermés (non triviale, c'est-à dire-autre que K = K). Ici, dénombrable signifie finie ou infinie dénombrable.

Une seule solution recue, de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Tout d'abord, le compact K ne peut être une réunion disjointe d'un nombre fini de fermés non vides. En effet, si $K = \bigcup_{n=1}^{N} K_n$, où chaque K_n est fermé, alors K serait la réunion disjointe de deux fermés, à savoir K_1 et $\bigcup_{n=2}^{N} K_n$, ce qui contredit la connexité de K.

Supposons alors que K est la réunion disjointe $\bigcup_{n=1}^{+\infty} K_n$ d'une famille dénombrable infinie $(K_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de fermés non vides. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la frontière K_n^* de K_n est non vide, car sinon un des K_n serait ouvert et fermé, différent du vide et de K, ce qui contredit la connexité de K.

Posons alors $F = \bigcup_{n=1}^{N} K_n^*$. C'est un fermé de $\mathbb{R}^n$ car c'est un fermé de K : son complémentaire dans K est une réunion d'ouverts de K, à savoir les intérieurs des K_n. Dans la suite, on parle de l'espace topologique F muni de sa topologie induite. Cet espace F est un espace complet. On peut donc lui appliquer le théorème de Baire : toute réunion dénombrable de fermés de F, d'intérieur vide, est encore d'intérieur vide.

Si l'on prouve que chaque K_n^* est un fermé de F, d'intérieur vide, on obtient la contradiction suivante : F est d'intérieur vide (dans F), donc est vide. Ainsi, chaque K_n^* est vide, donc chacun des K_n est ouvert et fermé, ce qui contredit la connexité de K.

Montrons donc que chaque K_n^* est un fermé de F d'intérieur vide. Que K_n^* soit un fermé de F est clair : c'est l'intersection de K_n et du complémentaire dans F de l'intérieur de K_n. Montrons qu'il est d'intérieur vide. Soit x un élément de K_n^*. Toute boule ouverte B de centre x dans K rencontre le complémentaire de K_n dans K donc contient un élément y appartenant à un certain K_m avec $m \neq n$. Comme K est connexe par arcs, il existe un chemin continu Γ reliant dans K les points x et y. Cet arc rencontre K_m^* en un point z, sinon Γ serait réunion disjointe des ouverts $\Gamma \cap \left(K - K_m^*\right)$ et $\Gamma \cap \overset{\circ}{K}_m$ (où $\overset{\circ}{K}_m$ désigne l'intérieur de K_m), ce qui contredirait la connexité de Γ. Le voisinage $B \cap F$ de x contient z, il n'est pas contenu dans K_n^*. Ainsi, K_n^* est bien d'intérieur vide.

Nota Bene : cet exercice trouve sa source dans le volume Topologie Générale, de **Nicolas Bourbaki** (chapitres 5 à 10), sous l'appellation « espace inépuisable » : un espace topologique est inépuisable s'il n'est pas réunion dénombrable de fermés non vides deux à deux disjointes. On trouve également dans le livre de Topologie de **Hervé Queffeléc** l'exercice suivant : un espace topologique connexe, localement connexe, dont les fermés non vides sont des espaces de Baire, est un espace inépuisable. Cet exercice fut donné à l'oral d'ULM à un de mes anciens élèves, il y a environ 5 ans…

Problème 506-3 (George Gras, Le Bourg d'Oisans)

Soit p un nombre premier tel que $p \equiv -1 \bmod 8$. On considère une solution $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ de l'équation de Pell Fermat :

$$x^2 - py^2 = 1.$$

Montrer que 8 divise x ou y. Dans le second cas (où 8 divise y), montrer que (x, y) est donnée par une relation de la forme $x + y\sqrt{p} = \pm u\left(u + v\sqrt{p}\right)^2$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$.

Solution de Jean-Claude Carréga (Lyon), George Gras (Le Bourg d'Oisans), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

Ce problème d'arithmétique a été proposé par **George Gras**, qui le présente comme un lemme nécessaire qu'il a rencontré dans ses travaux de recherche.
Voici la démarche de **Jean-Claude Carréga**. Cette démarche a le mérite d'être complètement explicite. Soit p un nombre premier congru à -1 modulo 8 et soit $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $x^2 - py^2 = 1$. Dans $\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$, cette relation devient

$$\overline{x}^2 + \overline{y}^2 = \overline{1}.$$

Or modulo 8, les différentes valeurs des carrés sont 0, 1 et 4 comme le montre le tableau ci-dessous :

$\overline{x}$	0	±1	±2	±3	4
$\overline{x}^2$	0	1	4	1	0

Une somme de deux carrés peut donc, modulo 8, valoir 0; 1; 2 ou 5 et les seules facons d'obtenir 1 sont

$$1 = 1^2 + 0^2 = 0^2 + 1^2.$$

Il en résulte que l'on a soit $\overline{x} = 0$, soit $\overline{y} = 0$, ce qui montre que 8 divise x ou y. On se place maintenant dans le second cas : 8 divise y donc y est pair et puisque $x^2 - py^2 = 1$, l'entier x est impair. On cherche des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\left(u+v\sqrt{p}\right)^2=\pm\left(x+y\sqrt{p}\right).$$

Le signe ± est donc celui de $x+y\sqrt{p}$ et il ne pose aucun problème. Or si (x, y) est solution de $x^2 - py^2 = 1$, les couples $(\pm x, \pm y)$ aussi et l'on suppose désormais que x et y appartiennent à $\mathbb{N}$. On cherche donc $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x+y\sqrt{p}=\left(u+v\sqrt{p}\right)^2.$$

On écarte le cas où $y = 0$: dans ce cas, $x = 1$ et l'on choisit $u = 1$ et $v = 0$. Avec $x \in \mathbb{N}$ et $y \in \mathbb{N}^*$, l'écriture

$$x+y\sqrt{p}=\left(u+v\sqrt{p}\right)^2$$

équivaut à

$$x+y\sqrt{p}=\left(u^2+pv^2\right)+2uv\sqrt{p}.$$

Or l'écriture d'un nombre réel de la forme $a+b\sqrt{p}$ avec a et b dans $\mathbb{Z}$ est unique puisque l'entier p est premier donc n'est pas un carré. Donc on cherche $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$x=u^2+pv^2 \text{ et } y=2uv,$$

soit encore

$$x=u^2+pv^2,\ \frac{py^2}{4}=\left(u^2\right)\left(pv^2\right) \text{ et } uv>0.$$

Ainsi, u^2 et pv^2 sont les racines de l'équation de degré 2

$$X^2-xX+\frac{py^2}{4}=0.0$$

Le discriminant de cette équation est

$$\Delta=x^2-py^2=1$$

et les racines sont

$$\frac{x+1}{2} \text{ et } \frac{x-1}{2}.$$

Puisque x est impair, ces deux racines sont bien entières. Il faut maintenant vérifier que l'une de ces deux racines est un carré et que l'autre est le produit de p par un carré. Avant cela, remarquons que les nombres $\frac{x+1}{2}$ et $\frac{x-1}{2}$ sont consécutifs donc premiers entre eux.

La relation $x^2 - py^2 = 1$ s'écrit aussi

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2\left(\frac{x+1}{2}\right)^2=\frac{py^2}{4}.$$

L'entier p divise un des deux facteurs du premier membre, disons $\frac{x+\varepsilon}{2}$. On a alors

$$\left(\frac{x-\varepsilon}{2}\right)^2\left(\frac{x+\varepsilon}{2p}\right)^2=\left(\frac{y}{2}\right)^2.$$

Le second membre de cette relation est un carré et les facteurs du premier membre sont premiers entre eux, donc chacun est un carré. Il existe des entiers u et v tels que

$$\frac{x-\varepsilon}{2}=u^2 \text{ et } \frac{x+\varepsilon}{2p}=v^2.$$

Les valeurs des entiers u et v cherchés sont donc

$$u=\pm\sqrt{\frac{x-\varepsilon}{2}} \text{ et } v=\sqrt{\frac{x+\varepsilon}{2p}}.$$

en choisissant le même signe pour u et v, par exemple + pour les deux.

Vérification : avec u et v trouvés précédemment,

$$\left(u+v\sqrt{p}\right)^2=\left(\sqrt{\frac{x-\varepsilon}{2}}+\sqrt{p}\sqrt{\frac{x+\varepsilon}{2p}}\right)^2,$$

soit

$$\left(u+v\sqrt{p}\right)^2=\frac{x-\varepsilon}{2}+\frac{x+\varepsilon}{2}+2\sqrt{\frac{x^2-1}{4}}=x+\sqrt{py^2}=x+p\sqrt{y}.$$