

L'enseignement des mathématiques au carrefour des cultures

Michèle Artigue

Résumé

En dépit de l'image d'universalité des mathématiques, chacun sait qu'elles se sont imprégnées des multiples cultures où elles se sont progressivement et parallèlement développées. L'enseignement des mathématiques est, de façon encore plus évidente, dépendant des contextes et des cultures. Dans la conférence donnée aux journées de l'APMEP de Laon dont ce texte est issu, j'ai souhaité partager avec les participants mon expérience dans ce domaine. Elle s'est nourrie des multiples collaborations de formation et de recherche que j'ai nouées au fil de ma carrière, mais aussi de ma participation étroite aux activités de la Commission internationale de l'enseignement mathématique (ICMI).

J'ai essayé de montrer notamment, en m'appuyant sur des exemples précis, ce que peut apporter une telle sensibilité pour déconstruire les évidences, qu'il s'agisse de l'enseignement de tel ou tel domaine mathématique, de la formation des enseignants et de leur développement professionnel, ou des pratiques de classe, mais aussi pour mieux comprendre les forces et faiblesses de notre enseignement, penser les évolutions et leur écologie possible. Ce faisant, j'ai aussi essayé de montrer comment la recherche didactique travaille ces questions.

Introduction

Les journées nationales de l'APMEP avaient comme thématique : « Les mathématiques, quelle histoire ! ». Les organisateurs nous invitaient à réfléchir à cette histoire et à la façon dont elle peut inspirer l'enseignement, mais aussi à ces histoires singulières au fil desquelles se construisent les rapports de nos élèves aux mathématiques, des rapports souvent difficiles, problématiques. Même si j'ai toujours été intéressée par l'histoire et l'épistémologie des mathématiques, je n'en suis en rien une spécialiste. Je retiens cependant des nombreux contacts que j'ai eus avec ce domaine que si les mathématiques sont en un sens universelles, les multiples cultures au sein desquelles elles se sont progressivement et parallèlement développées les ont marquées chacune de leur empreinte spécifique. Le champ de l'ethno-mathématique qui s'est beaucoup développé dans les dernières décennies le montre particulièrement bien (d'Ambrosio 2008). « Les mathématiques, quelles histoires ! » serais-je donc tentée de dire.

Si les mathématiques sont elles-mêmes multiples et culturellement connotées, que dire alors de leur enseignement ? Au cours de ma carrière, et en particulier du fait de mon engagement au sein de l'ICMI, la Commission internationale de l'enseignement mathématique, j'ai eu l'occasion de prendre la mesure de l'extraordinaire dépendance de l'enseignement des mathématiques des contextes et des cultures. Et j'ai pu mesurer aussi ce que le fait de se frotter à d'autres contextes pouvait nous apporter pour déconstruire ce qui, vu de chez nous, semble des évidences, pour

mieux comprendre les forces et les faiblesses de notre enseignement, pour envisager des alternatives. C'est cette conviction que j'ai souhaité partager dans la conférence d'ouverture des journées.

Une entrée en matière : le projet Lexicon

Pour entrer dans le vif du sujet, je vais évoquer un projet international, le projet Lexicon auquel je collabore actuellement. Il a été lancé par un collègue australien, le professeur David Clarke, qui depuis la fin des années 90 s'est lancé dans d'importantes études comparatives. Ces études se sont multipliées de fait avec la montée en puissance des grandes évaluations internationales, comme TIMSS puis PISA, pour essayer de comprendre et expliquer les différences de performances constatées. L'ICMI a ainsi mené une étude passionnante comparant l'enseignement des mathématiques dans les pays d'Asie de tradition confucéenne et certains pays de l'Ouest (Leung, Graf & Lopez-Real 2006). David Clarke a piloté une première étude, la « Learners' Perspective Study »⁽¹⁾ qui a impliqué seize pays, et étudié le fonctionnement de classes d'enseignants experts dans ces différents pays (Clarke, Keitel & Shimizu 2006), (Clarke, Emanuelsson, Jablonka & Chee Mok 2006).

Le projet Lexicon en est, en un sens, une suite logique. En effet, le premier projet a conduit les chercheurs à penser que chaque langue, chaque culture disposaient de certains termes spécifiques pour exprimer ce qui se passait au sein d'une classe de mathématiques, pour exprimer aussi l'expertise des enseignants, des mots qui n'avaient pas nécessairement d'équivalent en anglais, la langue dans laquelle ils s'astreignaient à communiquer pour se comprendre tous. De là est né le projet Lexicon qui vise à recenser ce vocabulaire dans neuf pays, à lui associer définitions, exemples et non-exemples, puis à s'interroger sur les ressemblances et différences entre pays, comprendre ce qu'elles révèlent de nos cultures respectives, et assembler, si cela apparaît possible, nos lexiques nationaux en un lexique international. Pour mener à bien ce projet, chacune des équipes des neufs pays participants⁽²⁾ a dû réaliser une vidéo dans la classe d'un enseignant expert, au niveau 4^e. Ces vidéos et leurs transcriptions en anglais, ainsi que les documents associés, constituent un stimulus pour les échanges entre enseignants et chercheurs qui accompagnent l'élaboration des lexiques nationaux et le test des potentialités de nos lexiques respectifs.

J'ai obtenu de mes partenaires l'autorisation d'en montrer quelques extraits. J'ai dû choisir et fait deux montages de quelques minutes à partir des vidéos australiennes et chinoises. Je commencerai par la séance australienne.

La séance australienne

La disposition de la classe est celle normalement associée à un travail de groupes et les élèves sont équipés de tablettes. La séance est une séance de révision avant le test qui constitue l'évaluation semestrielle. Ils ont eu à fabriquer eux-mêmes des fiches

(1) <http://www.lps.iccr.edu.au>

(2) Allemagne, Australie, Chili, Chine, Finlande, France, Japon, République Tchèque, USA.

de révision en choisissant des exercices et en rédigeant des solutions. Ces fiches sont mutualisées, accessibles sur une plateforme à laquelle ils sont connectés via leurs tablettes et, pendant la moitié de la séance, ils vont travailler individuellement ou en petits groupes, choisissant leurs exercices, l'enseignante circulant de groupe en groupe, encourageant et soutenant les élèves, répondant à leurs questions, les incitant aussi au bout d'un moment à tenter des exercices plus difficiles. L'extrait que j'ai montré ne correspond pas à ce travail mais au début de la séance. L'enseignante y explique aux élèves que, contrairement à ce qu'elle fait régulièrement depuis le début de l'année, elle n'a pas corrigé et noté leurs cahiers mais a choisi de les feuilleter pour photographier des pages qui lui semblaient intéressantes et y rajouter des annotations. Elle leur demande d'abord pourquoi, à leur avis, elle n'a pas jugé utile de corriger et noter, puis elle projette certaines photos et annotations et leur demande de les interpréter ou les commenter elle-même. Dans l'épisode choisi par exemple, elle valorise la structuration des notes et ce qui témoigne d'une élaboration personnelle comme l'ajout des commentaires, d'exemples, la reformulation de définitions... ainsi que ce qui met en évidence des démarches de contrôle.

Le travail réflexif sur la prise de notes qui s'engage via ce dispositif didactique est très intéressant. Il permet à l'enseignante de valoriser la progression des élèves qui justifie son changement de stratégie, et de faire identifier par le collectif des initiatives des élèves ou des qualités de leur travail intéressantes à partager. Le discours se situe dans ce que l'on qualifie en didactique de « discours méta » (Robert & Robinet 1996) mais, contrairement à ce qui se passe souvent en France, ce discours ne reste pas dans le seul topos de l'enseignant ; les élèves y contribuent, et c'est leur production même qui le motive. Il ne relève pas non plus de ce « glissement métacognitif » qui consiste, lorsqu'une activité d'enseignement a échoué, à prendre ses propres explications et ses moyens heuristiques comme objets d'étude à la place de la véritable connaissance mathématique, et que Guy Brousseau a identifié comme un des paradoxes du contrat didactique (Brousseau 1986). L'enjeu d'apprentissage n'est pas détourné. Tout au long de l'épisode, les interactions entre enseignante et élèves sont constructives. Elles sont aussi valorisantes et témoignent plus globalement de l'atmosphère de cette classe qui me semble illustrer ce que Gérard Sensevy essaie de modéliser dans la Théorie de l'action conjointe en didactique (Sensevy 2011).

La séance chinoise

Le second extrait, qui concerne la classe chinoise, est très différent. La disposition de la classe est classique et la classe bien plus nombreuse. La séance porte sur les quadrilatères. Elle est essentiellement collective et l'oral y est prédominant. Elle comporte deux grandes phases : une phase de synthèse et rappel sur les quadrilatères particuliers s'appuyant sur la vidéo-projection et l'usage d'un logiciel de géométrie dynamique, puis la résolution de quatre exercices mettant en jeu des quadrilatères, illustrant la diversité des méthodes algébrique, fonctionnelle, géométriques qui peuvent être mobilisées dans la résolution de tâches concernant ces objets. Le montage réalisé comporte deux extraits :

- un extrait de la séance de rappel où, après avoir élaboré un graphe qui visualise les relations entre les différents quadrilatères sur la base des propriétés d'angle, longueur et parallélisme, l'enseignante passe à une approche dynamique où les quadrilatères particuliers sont engendrés à partir de triangles par des symétries convenables,
- un extrait qui correspond au début de la résolution du quatrième exercice proposé où la figure tracée est perceptivement un losange mais où, si les données de construction permettent facilement de prouver que le quadrilatère est un parallélogramme, il faut travailler substantiellement pour montrer que c'est bien un losange. L'enseignante les aide à faire cette différence puis à s'interroger sur les méthodes dont ils disposent pour montrer qu'un parallélogramme est un losange.

Ce qui est particulièrement frappant dans cette séance, c'est sa densité mathématique et la qualité de sa structuration, la richesse des commentaires de l'enseignante, tant mathématiques que méta-mathématiques. Cette séance, de facture classique, où les effets de chœur sont particulièrement nombreux, nous donne aussi à voir une classe où, même si les élèves sont régulièrement sollicités, l'enseignante suit visiblement son projet sans avoir à se soucier d'enrôler les élèves dans le travail mathématique. Je n'insisterai pas plus longuement sur ce projet mais je voudrais souligner que chacune des vidéos est pour toute notre équipe, chercheurs du Laboratoire de didactique André Revuz à l'université Paris Diderot et enseignants du groupe collègue de l'IREM de Poitiers⁽³⁾, un dépaysement et une source de questions sur notre propre enseignement, notre propre culture. Ces questions sont diverses, concernant suivant le cas les organisations mathématiques, les tâches proposées, la façon dont elles sont résolues, le discours mathématique des enseignants, les écrits, les dispositifs didactiques, mais aussi régulièrement les interactions entre professeur et élèves, et ce qu'elles expriment des relations entre enseignants et enseignés. Aux antipodes de la classe australienne se situe ainsi la classe chinoise avec son enseignement frontal où la parole des élèves s'exprime, à quelques exceptions près, uniquement à travers des réponses en chœur. S'y exprime en filigrane une conception de l'éducation, des rapports entre adultes et jeunes qui dépasse largement le seul enseignement des mathématiques mais le marque de son empreinte.

Se nourrir d'études comparatives, une idée qui n'est en rien nouvelle

L'idée que l'enseignement des mathématiques puisse se nourrir de telles rencontres n'est en rien nouvelle, et les journées de Laon étant placées sous le signe de l'histoire, je vais essayer de restituer à cette idée une certaine épaisseur historique. Il y a un peu plus d'un siècle, c'est exactement cette idée qui est à l'origine de la création de la Commission internationale de l'enseignement des mathématiques, une demande d'abord formulée par David Eugene Smith, professeur au Teachers College de Columbia University à New York, dans un article publié en 1905 par la revue

(3) Il s'agit, pour le LDAR, de Brigitte Grugeon-Allys, Julie Horocks, Julia Pilet et moi-même et pour l'IREM de Poitiers de Thierry Chevalarias et Florence Dassule-Debertonne.

L'Enseignement Mathématique. Smith est aussi très intéressé à l'histoire des mathématiques et c'est d'ailleurs sur des thématiques historiques qu'il fera soutenir les premières thèses connues en éducation mathématique, au début du 20^e siècle. Smith demande la création d'une telle commission pour échanger au niveau international sur toutes les questions que pose l'enseignement des mathématiques au niveau secondaire, en ce début du 20^e siècle marqué par changements sociétaux, économiques et réformes éducatives. Il souligne l'importance pour chacun de se nourrir des expériences et du dynamisme des autres pays, comme son pays se nourrit depuis ses débuts de son immigration. C'est un discours qu'il me semble intéressant de rappeler aujourd'hui.

Il faut reconnaître cependant, comme l'ont bien montré les études menées pour célébrer le centenaire de cette commission (Menghini, Furinghetti, Giacardi & Arzarello 2008) que ce sera longtemps une commission dominée par l'Europe et l'Amérique du Nord, les pays membres hors de ce périmètre ayant à quelques exceptions près le statut de membre associé et ne jouissant pas des mêmes droits⁽⁴⁾. Ce n'est qu'après la seconde guerre mondiale que la commission commencera à s'ouvrir réellement avec l'accroissement substantiel du nombre de pays membres, l'entrée de membres non européens et américains dans sa gouvernance⁽⁵⁾, la création de la Commission inter-américaine d'éducation mathématique en 1962 à Bogota. Les relations qu'elle développera à l'époque avec l'UNESCO y aideront. Mais il faudra cependant attendre l'année 2000 pour qu'un congrès ICME ait lieu en Asie, au Japon, et 2008 pour qu'il ait lieu dans un pays émergent, le Mexique. Il faudra attendre la toute fin du 20^e siècle pour que des idées déjà exprimées en 1959 par le mathématicien japonais Yasuho Akizuki, élu au comité exécutif en 1958 :

« Les philosophies et religions orientales sont très différentes de celles de l'Ouest. Je peux donc imaginer qu'il pourrait exister différents modes de pensée, même en mathématiques. C'est pourquoi je pense que nous ne devrions pas nous limiter à appliquer directement les méthodes qui sont aujourd'hui considérées les meilleures en Europe et en Amérique, mais devrions vraiment étudier l'instruction mathématique en Asie. Une telle étude pourrait présenter de l'intérêt et de la valeur tant pour l'Ouest que pour l'Est. » (notre traduction)

se concrétisent dans l'étude ICMI 13 mentionnée au début de ce texte, et encore quelques années pour que la commission confie à des chercheurs de pays émergents, en l'occurrence l'Afrique du Sud et le Brésil, la responsabilité d'une de ses études. Il s'agit de l'étude 21 sur l'enseignement des mathématiques dans des contextes multi-linguistiques, une thématique sur laquelle les chercheurs d'Afrique et d'Amérique latine ont justement joué un rôle pionnier. Ceci n'a rien d'étonnant vu

(4) À la création de la CIEM, il y a 18 pays membres, 16 pays européens plus la Russie et les USA, et 15 pays associés sans droit de vote.

(5) La première élection d'un membre extérieur aux pays initiaux au comité exécutif interviendra en 1954 : Ram Behari (Inde) suivi de Yasuo Akizuki (Japon) et Aleksander Danilovic Aleksandrov (URSS) en 1958.

leur contexte éducatif. N'oublions pas par exemple qu'il y a 11 langues officielles en Afrique du Sud. Ils ont beaucoup à nous apporter car, vu l'importance prise par les déplacements migratoires, le fait d'avoir un nombre substantiel d'élèves pour lesquels la langue d'enseignement n'est pas la langue maternelle, est une situation à laquelle quasiment aucun pays n'échappe aujourd'hui. Longtemps, la diversité linguistique a été perçue uniquement comme une source de difficultés, comme un obstacle. En s'appuyant sur des recherches et des réalisations menées dans des contextes très divers, cette étude ICMI nous amène à dépasser ce point de vue, et à percevoir la diversité linguistique aussi comme une richesse, un potentiel pour l'enseignement des mathématiques⁽⁶⁾.

L'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre : entre diversité culturelle et régularités transnationales

Ce n'est cependant pas ce thème que j'ai choisi de développer plus particulièrement mais un thème bien plus ordinaire auquel l'ICMI a aussi consacré une de ses études. Ses résultats en ont été publiés, il y a déjà une dizaine d'années, en 2004, sous le titre « The Future of the Teaching and Learning of Algebra » (Stacey, Chick & Kendall 2004). Si j'ai choisi ce thème, c'est non seulement à cause des difficultés bien connues que suscite l'apprentissage de l'algèbre, mais aussi parce que la comparaison des programmes français avec leurs homologues étrangers montre, dans notre pays, une situation étonnante. On y enseigne de l'algèbre dès le niveau du collège mais, depuis plusieurs décennies, l'algèbre n'est un domaine explicite d'enseignement, ni au collège, ni au lycée.

Dans les programmes du collège, parus en 2008, comme dans les précédents, les intitulés de domaine sont respectivement : Organisation et gestion de données, Fonctions, Nombres et calcul, Géométrie, Grandeurs et mesure. Le mot algèbre n'apparaît pas, seul et rarement l'adjectif algébrique pour qualifier un langage, le « langage algébrique » comme par exemple dans la partie relative au domaine « Nombres et calcul » du préambule des programmes de mathématiques⁽⁷⁾, « calcul algébrique » dans un commentaire du même domaine en 5^e⁽⁸⁾. L'algèbre en fait avance masquée derrière les expressions « calcul littéral », « expression littérale » et bien sûr la notion d'équation. Et, lorsqu'en 3^e, le monde fonctionnel est introduit, c'est dans le domaine : Organisation et gestion de données, fonctions, mais sans que

(6) Signalons que, peu après les journées de l'APMEP, l'ICMI a annoncé les lauréats des médailles Felix Klein et Hans Freudenthal pour 2015. Il s'agit pour la médaille Felix Klein, d'Alan Bishop, chercheur d'origine anglaise installé depuis longtemps en Australie, pour honorer notamment sa contribution pionnière et décisive au développement d'une vision culturelle de l'éducation mathématique, et pour la médaille Hans Freudenthal, de Jill Adler, chercheuse d'Afrique du Sud, pour honorer sa contribution, elle aussi décisive, au développement des travaux sur l'enseignement des mathématiques dans des contextes multilinguistiques. Ces deux nominations sont tout particulièrement en résonance avec le thème de ce texte.

(7) « assimiler progressivement le langage algébrique et son emploi pour résoudre des problèmes (en particulier distinguer égalité, identité et équation) ».

(8) « L'acquisition des priorités opératoires est un préalable au calcul algébrique ».

les liens entre algèbre et fonctions ne soient explicitement marqués.

Au lycée, on passe en seconde à trois domaines : Fonctions, Géométrie, Statistiques et probabilités. Ce qui concerne l'algèbre passe donc dans le domaine fonctionnel où :

- « L'objectif est de rendre les élèves capables d'étudier :
- un problème se ramenant à une équation du type $f(x) = k$ et de le résoudre dans le cas où la fonction est donnée (définie par une courbe, un tableau de données, une formule) et aussi lorsque toute autonomie est laissée pour associer au problème divers aspects d'une fonction ;
 - un problème d'optimisation ou un problème du type $f(x) > k$ et de le résoudre, selon les cas, en exploitant les potentialités de logiciels, graphiquement ou algébriquement, toute autonomie pouvant être laissée pour associer au problème une fonction. »

C'est dans ce domaine que l'on retrouve les intitulés : « **Expressions algébriques**. Transformations d'expressions algébriques en vue d'une résolution de problème » et « **Équations**. Résolution graphique et algébrique d'équations ». Puis, à partir de la classe de 1^{er}, c'est dans le domaine Analyse que s'inscrit l'algèbre, ou dans celui de la géométrie pour ce qui concerne les nombres complexes en terminale.

Quand on compare avec les organisations curriculaires étrangères, cet évitement du mot « algèbre » comme s'il s'agissait d'un mot tabou, dont j'ai pu mesurer la force dans les discussions qui ont été associées à la rédaction des projets de nouveaux programmes pour le collège, interroge obligatoirement. D'autant plus que s'est développé tout un courant de travaux et d'expérimentations, voire dans certains cas de véritables programmes scolaires autour de ce que l'on appelle aujourd'hui « l'Early Algebra » (Carraher & Schliemann 2007) qui s'adressent à des élèves bien plus jeunes que les collégiens français. Ceci nous amène à nous interroger sur le sens que nous donnons à ce mot « Algèbre », et la façon dont peut s'envisager aujourd'hui dans l'enseignement l'entrée dans le monde de l'algèbre et de la pensée algébrique⁽⁹⁾.

Il est classique d'affirmer en s'appuyant sur le développement historique de ce domaine que l'algèbre est la science des équations, et d'ailleurs le mot même d'algèbre y est une référence explicite. Mais l'on peut voir également dans l'algèbre la science des structures, conformément à la vision de l'algèbre moderne, pour faire référence au célèbre ouvrage de van der Waerden publié en 1930. C'est cette science des structures que les futurs enseignants rencontrent d'ailleurs essentiellement à l'université mais, comme l'ont montré de nombreux travaux, son esprit peut vivre plus tôt dans la scolarité sous des formes plus modestes, portant les idées fondamentales de l'algèbre comme moyen d'expression de régularités et outil de généralisation. D'autres mettent l'accent sur l'algèbre comme langage et notamment langage de modélisation, inséparable de la mathématisation de nos rapports au

(9) Quelques paragraphes dans cette partie sont repris de ma conférence au colloque inter-IREM de Montpellier en 2014, accessible en ligne, décryptée par Catherine Combelle et publiée depuis dans le Bulletin vert (Artigue, 2015).

monde. Yves Chevallard, dans un certain nombre de textes récents, présente l'algèbre comme la science des programmes de calcul (Chevallard & Bosch 2012). Pour lui, le calcul algébrique est ainsi motivé par un grand type de tâche : étant donnés deux programmes de calcul, reconnaître s'ils sont équivalents, c'est-à-dire, si pour toute entrée numérique, ils produisent la même sortie.

Comme on peut s'en douter, ces différentes visions de l'algèbre ne vont pas orienter toutes l'enseignement dans la même direction, ne vont pas conduire à donner la priorité aux mêmes objets, aux mêmes tâches, ne vont pas amener à penser les mêmes progressions curriculaires. L'étude ICMI consacrée à l'algèbre l'a bien montré, en identifiant trois grandes tendances pour l'entrée dans l'algèbre :

- l'entrée par le monde des équations et la démarche dite analytique, privilégiant équations et inéquations et le statut d'inconnue des lettres,
- l'entrée par la reconnaissance de « patterns »⁽¹⁰⁾ et la généralisation, la recherche de régularités et de structures, privilégiant nombres généralisés et formules,
- l'entrée par la modélisation qui va se traduire par une importance première accordée à l'étude de co-variations de grandeurs et, à travers elle, à la notion de fonction et à celle associée de variable.

Notre pays s'est longtemps situé très clairement parmi ceux privilégiant la première option, comme les pays latins dans leur ensemble. La lecture des programmes du collège actuels montre cependant un infléchissement indéniable, sans doute dû à l'influence des travaux didactiques et à l'influence internationale. En effet, dans les pays de culture anglo-saxonne, c'est la seconde entrée, dont le chercheur anglais John Mason avait très tôt montré les potentialités (cf. par exemple (Mason, 1991)), qui est privilégiée, comme le montre par exemple l'extrait suivant d'un document curriculaire de l'Ontario au Canada destiné à l'enseignement des huit premières années :

Un des thèmes centraux en mathématiques est l'étude de « patterns » et de relations. Cette étude requiert des élèves qu'ils reconnaissent, décrivent et généralisent des « patterns », et qu'ils construisent des modèles mathématiques pour simuler le comportement de phénomènes réels qui présentent des « patterns » observables. (Ontario Ministry of Education, 2005, p. 9, notre traduction)⁽¹¹⁾.

Dès l'école maternelle, on repère et code des « patterns », en les associant à des gestes et à des rythmes, puis à des symboles. Dès l'école élémentaire, des codages considérés comme pré-algébriques sont aussi utilisés pour exprimer des régularités opératoires, des relations entre opérations inverses comme le montre cet exemple issu d'un document relatif à ce curriculum spécifique à la maternelle et cycle 2 (p.

(10) Il n'est pas facile de traduire ce terme. La définition de L'English Oxford Dictionary qui me semble la plus adaptée dans ce contexte mathématique est : « A regular and intelligible form or sequence discernible in the way in which something happens or is done »

(11) <https://www.edu.gov.on.ca/eng/curriculum/elementary/math18curr.pdf>

31)⁽¹²⁾ :

Number Property	Generalized Expression
Addition and subtraction are inverse operations (e.g., since $5 + 6 = 11$, then $11 - 6 = 5$).	If $\square + \bigcirc = \star$, then $\star - \bigcirc = \square$
Multiplication and division are inverse operations (e.g., since $3 \times 7 = 21$, then $21 \div 7 = 3$).	If $\square \times \bigcirc = \star$, then $\star \div \bigcirc = \square$
Adding 0 to or subtracting 0 from any number does not change the number's value (e.g., $6 + 0 = 6$; $7 - 0 = 7$).	$\square + 0 = \square$ $\square - 0 = \square$
Multiplying or dividing a number by 1 does not change the number's value (e.g., $8 \times 1 = 8$, $7 \div 1 = 7$).	$\square \times 1 = \square$ $\square \div 1 = \square$

Des « patterns » numériques ou géométriques à croissance linéaire, puis quadratique (growing-patterns) sont utilisées pour motiver l'introduction et le travail sur les expressions algébriques. La situation appelée souvent en France du « carré bordé » par exemple, déjà présente dans l'ouvrage de Gérard Combiér, Jean-Claude Guillaume et André Pressiat, intitulé « Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre ! » publié par l'INRP en 1997 est, dans la littérature internationale, emblématique de l'entrée par les patterns dans des contextes numériques ou géométriques. La vision de l'algèbre comme science des programmes de calcul colore cependant l'exploitation qui en est faite dans certains documents français récents. C'est particulièrement visible par exemple dans un document de l'IREM de Clermont-Ferrand⁽¹³⁾ présentant une AER (Activité d'étude et de recherche au sens de la Théorie anthropologique du didactique due à Yves Chevallard) en 5^e sur ce thème. On y note un passage assez rapide à une expression algébrique, en référence à l'usage des mathématiciens, et surtout importance accordée à la question de la reconnaissance et preuve de l'équivalence de programmes de calcul qui y motive en fait le besoin de calcul algébrique.

L'introduction plus précoce des fonctions, l'importance accrue accordée à la modélisation contribuent aussi, en France, à faire bouger les lignes. Cependant la progression curriculaire reste jusqu'ici, me semble-t-il, surtout organisée par rapport à la première entrée citée. Pour ce qui est des autres entrées, les progressions sont beaucoup moins organisées. Les choses vont-elles évoluer avec les nouveaux programmes du collège ? La continuité est forte. Les dénominations de domaines n'ont pas bougé pour ce qui concerne l'algèbre. Le mot algèbre n'est pas explicitement présent. Des inflexions sont cependant visibles. La référence au langage algébrique est plus explicite, et l'algèbre apparaît même comme un cadre à

(12) http://www.eworkshop.on.ca/edu/resources/guides/Patterning_and_Algebra_K-3.pdf(13) http://www.irem.univ-bpclermont.fr/IMG/pdf/Les_debuts_del_algebre_en_cinquieme.pdf

l'instar des cadres numérique et géométrique. Ainsi, dans le volet 2 qui précise les contributions principales des différentes disciplines au socle, il est écrit que « Les disciplines scientifiques et technologiques sont toutes concernées par la lecture et l'exploitation de tableaux de données, le traitement d'informations chiffrées ; par le langage algébrique pour généraliser des propriétés et résoudre des problèmes » ; dans les précisions apportées sur les compétences à travailler, on trouve :

- Modéliser : « Traduire en langage mathématique une situation réelle (par exemple à l'aide d'équations, de fonctions, de configurations géométriques, d'outils statistiques) ».
- Représenter : « Choisir et mettre en relation des cadres (numérique, algébrique, géométrique) adaptés pour traiter un problème ou pour étudier un objet mathématique ».
- Calculer : « Calculer en utilisant le langage algébrique (lettres, symboles, etc.) ».
- Communiquer : « Faire le lien entre le langage naturel et le langage algébrique ».

La résolution de problèmes se modélisant par des équations et inéquations occupe toujours le devant de la scène, le préambule du programme précisant : « Les élèves abordent les bases du calcul littéral, qu'ils mettent en œuvre pour résoudre des problèmes faisant intervenir des équations ou inéquations du premier degré. », mais les fonctions généralisatrices, en liaison avec la production, l'utilisation de formules et la modélisation, et celle de preuve du langage algébrique sont aussi explicitées dans les exemples d'activités proposés :

- « Comprendre l'intérêt d'une écriture littérale en produisant et employant des formules liées aux grandeurs mesurables (en mathématiques ou dans d'autres disciplines).
- Tester sur des valeurs numériques une égalité littérale pour appréhender la notion d'équation.
- Étudier des problèmes qui se ramènent au premier degré (par exemple, en factorisant des équations produits simples à l'aide d'identités remarquables).
- Montrer des résultats généraux, par exemple que la somme de trois nombres consécutifs est divisible par 3. »

Pour en penser l'impact possible, j'aimerais rappeler brièvement certains acquis de la recherche didactique sur l'apprentissage de l'algèbre. Car les difficultés que pose l'apprentissage de l'algèbre à beaucoup d'élèves ne sont pas un fait nouveau. La recherche s'y est donc très tôt intéressée, en essayant de les comprendre et de trouver des stratégies pour les surmonter. Ces difficultés transcendent les frontières, et les résultats que je vais évoquer sont très largement partagés. Très tôt, les travaux ont mis en évidence des discontinuités importantes entre le travail numérique devenu familier aux élèves quand l'algèbre commence à être enseignée et le travail algébrique, même si le travail algébrique nécessite cette familiarité et s'appuie sur elle. Je rappelle les principales dans ce transparent et je vais les commenter brièvement :

- Le statut des lettres : dès l'école primaire, elles sont présentes comme codes pour désigner des objets ou des collections, pour désigner des unités de mesure (3m), mais elles ne le sont pas, du moins en France, pour représenter des nombres et, à ce titre, être engagées dans des calculs.
- Le statut du signe égalité, principalement utilisé pour désigner un calcul à effectuer et non pour désigner une équivalence.
- La structure des expressions en blocs, avec le rôle associé des parenthèses et une terminaison des calculs différente avec des expressions qui peuvent encore inclure des signes opératoires comme $2x + 3$ par exemple.
- Les rapports entre syntaxe et sémantique dans le travail mathématique. Alors que dans le monde numérique des élèves, la résolution des tâches pouvait être pas à pas guidée par la référence à un sens externe, celui du contexte de la tâche, en algèbre il faut accepter de suspendre ce sens, opérer des transformations guidées par la syntaxe des expressions et leur sémantique, leur sens interne tout en respectant leur dénotation, leur référence. Montrer que la somme de trois nombres consécutifs est un multiple de 3, c'est d'abord trouver une écriture symbolique qui exprime leur rapport, non pas $x + y + z$ mais $n + n + 1 + n + 2$ par exemple, puis transformer cette expression en l'expression équivalente $3(n + 1)$ qui donne à voir la propriété d'être multiple de 3 et porte un sens différent.
- C'est aussi avec l'entrée dans la méthode analytique associée à la mise en équation de problèmes un renversement bien connu des modes de résolution arithmétiques progressant pas à pas du connu vers l'inconnu.
- C'est aussi l'intervention de nouveaux nombres comme les nombres négatifs qui ne sont plus associés à des quantités tangibles et pour lesquels la compréhension de la raison d'être des règles de calcul doit obéir à une autre logique que celle jusque là à l'œuvre.

Ce que la recherche a aussi montré, et c'est là que la comparaison de systèmes éducatifs s'avère particulièrement intéressante, c'est que les stratégies didactiques d'entrée dans l'algèbre ne sont pas neutres par rapport à ces difficultés, et qu'en particulier, la stratégie la plus coûteuse cognitivement pour les élèves est celle qui cumule l'approche analytique et équationnelle avec une entrée relativement brutale dans le langage algébrique. En revanche, il semble qu'une entrée par la recherche de régularités dans des configurations géométriques ou numériques, et leur généralisation via des représentations symboliques progressivement construites, l'utilisation du symbolisme algébrique pour exprimer des relations entre grandeurs ou pour exprimer des régularités opératoires soit accessible, avec des stratégies didactiques adaptées, à des élèves même très jeunes. C'est tout le domaine très actif aujourd'hui de l'Early algebra déjà mentionné.

Personnellement, c'est à travers les échanges avec mes collègues étrangers, et avec le travail de comparaison curriculaire qui a été mené dans le cadre de l'étude ICMI que j'ai pris la mesure de la diversité des trajectoires possibles et du fait que celle qui était traditionnellement la nôtre n'était pas forcément celle qui permettait le plus

facilement à tous nos élèves de faire l'expérience de la puissance de l'outil algébrique et de se familiariser avec lui.

J'ai pris l'exemple de l'algèbre. J'aurais pu par exemple parler de modélisation car ce mot et les compétences associées sont de plus en plus présents dans les programmes, et que les enseignants qui n'ont souvent, de par leur formation, aucune expérience personnelle dans ce domaine, sont particulièrement démunis. Là encore, le contact avec des cultures plus tôt sensibilisées à ces questions est tout à fait instructif. C'est le cas notamment dans des pays comme le Danemark où la réforme du lycée préparée depuis 2000 et mise en place en 2005 a fait de la modélisation une des huit compétences clefs qui structurent tout le curriculum (Niss, 2011), et où également l'accent est mis depuis longtemps sur le rôle qu'ont à jouer les mathématiques pour l'éducation citoyenne et critique. Au delà de ce seul exemple, c'est l'objet d'étude du groupe international ICTMA⁽¹⁴⁾ affilié lui aussi à l'ICMI et de ses rencontres organisées tous les deux ans depuis 1983⁽¹⁵⁾.

La formation des enseignants et le développement professionnel des enseignants au carrefour des cultures

La formation des enseignants, tant initiale que continue, est aussi un thème pour lequel la diversité des pratiques, d'un pays à l'autre, est une source récurrente de questions. Nous sommes dans un système dit consécutif. Que ce soit pour la formation des enseignants du primaire comme du secondaire, l'obtention d'une licence non spécifique à l'enseignement précède la formation au métier d'enseignant proprement dite qui aujourd'hui s'effectue au niveau du master. Dans d'autres pays, au moins pour tout ce qui concerne les enseignants de la scolarité obligatoire, ce n'est pas le cas. Formation disciplinaire et professionnelle sont plus intégrées, et c'est généralement le cas notamment pour les enseignants du primaire. De plus, les enseignants n'y sont pas nécessairement monovalents dans le secondaire, notamment au niveau du collège, ni en sens inverse aussi polyvalents que les nôtres dans l'enseignement primaire avec, comme en Chine des enseignants déjà spécialisés pour les matières scientifiques dans bon nombre d'écoles, dès la première année. Chaque système clairement a ses avantages et ses inconvénients que les comparaisons internationales permettent de discuter.

Mais c'est la formation continue que je souhaiterais plus particulièrement évoquer car longtemps quasi inexistante, elle est considérée de plus en plus comme essentielle dans la plupart des systèmes éducatifs, soutenue par des actions et structures spécifiques (cf. par exemple le NCETM (National Center for Excellence in the Teaching of Mathematics) créé en 2006 en Angleterre ou son homologue plus récent, le DZLM (Deutsche Zentrum für Lehrerbildung Mathematik) créé en Allemagne en 2014). De plus en plus aussi, elle devient obligatoire au sens où les enseignants doivent prouver qu'ils se sont engagés dans des actions de formation continue et en conserver une trace dans des portfolios de développement professionnel. La situation

(14) <http://www.ictma15.edu.au>

(15) voir aussi la conférence de synthèse sur ce thème de la modélisation présentée par Werner Blum au congrès ICME-12 à Séoul. <http://www.springer.com/us/book/9783319106854>

en France qui, un temps, a été pionnière dans ce domaine avec la création des IREM pour notre discipline, puis celle des MAFPEN, s'est comme on le sait fortement dégradée et n'a plus rien d'enviable comme le confirme le récent rapport de l'enquête TALIS 2013 de l'OCDE⁽¹⁶⁾. Déjà, il y a quinze ans, le rapport que nous avons élaboré sur la formation des enseignants dans le cadre de la CREM soulignait la nécessité de repenser cette formation en profondeur.

Les échanges internationaux peuvent ici encore nourrir la réflexion. Depuis une dizaine d'années, un dispositif particulier, connu maintenant sous le nom de « Lesson Studies », est tout particulièrement étudié. C'est le dispositif institutionnel de développement professionnel des enseignants au Japon, et ce depuis plus d'un siècle. Il semble qu'il n'ait pas suscité une attention particulière jusqu'à ce que les résultats particulièrement bons des pays asiatiques aux évaluations internationales, l'évaluation TIMSS en particulier, n'attire l'attention sur cette région du monde et ses pratiques éducatives. C'est alors qu'il a été repéré et a commencé à attirer l'attention de chercheurs, d'abord des États Unis puis ensuite bien plus largement. Les moyens engagés par le Japon puis au sein de l'APEC EDNET (Asia-Pacific Economic Cooperation Education Network) pour favoriser son étude et sa diffusion, à partir de ce moment là, y ont sans aucun doute contribué.

Qu'est-ce que ce dispositif ? Dans sa forme traditionnelle, la « lesson study » ou « jugyokenkyu » constitue une forme particulière d'étude à l'intérieur de l'école où elle est considérée comme partie intégrante du travail de l'enseignant. Elle consiste en l'élaboration collective, la réalisation dans une classe et l'analyse *a posteriori* par un groupe d'enseignants d'une leçon. Ses objectifs généraux et spécifiques sont soigneusement définis à partir d'une étude approfondie des documents curriculaires et autres ressources disponibles, en prenant en compte les objectifs à long terme de l'apprentissage des élèves, en particulier le développement de la pensée mathématique des élèves. Généralement, les établissements scolaires inscrivent ces « lesson studies » dans une thématique générale qui est travaillée sur la durée d'une année au moins. La phase d'élaboration anticipe des trajectoires d'apprentissage possibles, en s'appuyant sur la connaissance précise que les enseignants ont de leurs élèves et les acquis de leur expérience ; on y précise également les points sur lesquels on souhaite particulièrement faire porter l'observation de la réalisation de la leçon. Le projet est en effet réalisé par l'un des enseignants du groupe, les autres enseignants étant présents comme observateurs mais n'intervenant pas sauf exception. La réalisation est suivie d'une phase d'analyse et évaluation où l'enseignant ayant réalisé la leçon présente d'abord ses impressions et réflexions, puis où s'engage une discussion avec les autres enseignants observateurs. L'étude approfondie de la réalisation qui est alors menée, tant au niveau mathématique que didactique, peut conduire à une révision du projet initial qui sera à son tour testée. L'ensemble obéit donc à une structure précise dont les divers constituants sont précisément décrits dans la littérature (cf. par exemple (Isoda, Stephens, Ohara & Miyakawa 2007)). Quand on assiste à des « lesson studies » au Japon, on ne peut

(16) http://www.keepeek.com/Digital-Asset-Management/oced/education/resultats-de-talis-2013_9789264214293-fr#page1

qu'être frappé par la qualité des discussions et du travail tant mathématique que didactique qu'il suscite chez les membres du groupe.

Ce dispositif est vu au Japon mais plus largement dans les pays de la région comme un dispositif particulièrement performant pour permettre et soutenir l'innovation, accompagner les nécessaires évolutions curriculaires, et améliorer l'enseignement. Il fonctionne à différentes échelles en interconnexion, échelle de l'établissement, échelle locale, régionale, voire nationale, et les interactions avec la recherche et les laboratoires universitaires sont étroites, comme l'explique particulièrement bien Masami Isoda dans une publication récente (Isoda 2015). Il insiste sur le fait que :

« les résultats des LS ne se limitent pas à ce que chaque participant apprend de la séance de classe et de la discussion réflexive qui la suit, mais qu'ils incluent aussi le développement de théories didactiques. » (Isoda 2015, p. 82, notre traduction)

Ces théories sont des théories de l'enseignement. Il en présente deux exemples représentatifs. Le premier concerne l'enseignement par la résolution de problèmes, qu'il présente comme une théorie de l'enseignement pour former des enfants qui apprennent par et pour eux-mêmes, tandis que le second relève de ce qu'il appelle des théories curriculaires

« décrites dans des guides pour les enseignants sous la forme d'un ensemble de termes techniques qui sont utilisés uniquement par les enseignants et les chercheurs pour partager leur connaissances mathématiques pour l'enseignement. » (ibidem, p. 83, notre traduction)

Ces théories inspirent les thématiques des « lesson studies » qui en retour les illustrent, testent et cherchent à les généraliser.

Ce dispositif, comme les réflexions et études qu'il motive, me semble bien mettre en lumière des points importants pour ce qui concerne le développement professionnel des enseignants :

- l'importance de l'ancrer au plus près de leurs tâches professionnelles, au premier rang desquelles se situe la conception et l'implémentation de séances d'enseignement,
- l'importance de la collaboration au sein de communautés de pratique et de recherche,
- l'importance pour la recherche d'être ouverte aux innovations issues du terrain, mais aussi la nécessité de la recherche pour en comprendre les mécanismes et évaluer les effets.

Ma culture « irémique » m'avait déjà rendue sensible à ces différents points, mais ceci ne m'empêche pas d'être questionnée par ce dispositif, si différent par de nombreux aspects de ce que j'ai pu vivre et vis aujourd'hui dans le travail des groupes IREM et les formations associées, dans les rapports entre recherche didactique et enseignement, comme par l'engouement qu'il semble susciter internationalement. Et, encore une fois, je trouve ces questionnements bienvenus. Ils aident à prendre de la distance par rapport à notre propre culture, ils ouvrent la

réflexion et les perspectives. Mais je voudrais aussi souligner la vigilance à avoir vis-à-vis de la tentation de transpositions hâtives de dispositifs qui marchent ou semblent marcher dans un contexte donné, si fréquente en éducation, en ne payant attention qu'aux traits les plus superficiels de ceux-ci. Comme le montrent certaines études, l'exportation des « lesson studies » n'échappe pas toujours à ce piège.

Je voudrais enfin souligner que l'étude ICMI 18 consacrée à la formation des enseignants (Even & Ball 2009) montre de nombreux exemples de pratiques de formation continue d'enseignants qui, sans avoir nécessairement la sophistication et surtout l'ampleur du dispositif des « lesson studies », obéissent aussi aux principes mentionnés ci-dessus.

Les outils conceptuels et méthodologiques de la recherche didactique

J'ai annoncé dans l'introduction que j'essaierais de donner une idée de la façon dont la recherche didactique travaille ces questions, et des outils conceptuels et méthodologiques sur lesquels elle s'appuie. C'est en fait un vaste chantier car la recherche, tout comme l'enseignement, est marquée par les cultures et les contextes. Au sein de ma propre culture, celle de la didactique française, j'ai personnellement trouvé un appui théorique consistant dans la théorie anthropologique du didactique (TAD dans la suite) développée par Yves Chevallard. Pourquoi ? En premier lieu, parce que c'est une théorie anthropologique, et qu'elle considère les pratiques mathématiques, les pratiques d'enseignement, comme des pratiques humaines, façonnées par les institutions dans lesquelles elles prennent place, soumises à une diversité de conditions et de contraintes. Et parce qu'elle me fournit des notions comme la notion de praxéologie, comme la hiérarchie des niveaux de codétermination pour travailler ces questions (Chevallard 2002). J'ai par exemple utilisé ces outils d'une part avec mon collègue danois Carl Winslow pour conduire une méta-étude des travaux comparatifs en éducation mathématique (Artigue & Winslow 2010), d'autre part pour comparer les difficultés de la transition lycée-université en France et au Brésil s'agissant du domaine des fonctions, dans un projet franco-brésilien dont l'objectif était de développer collaborativement des ressources pour aider cette transition (Alves-Dias, Artigue, Jahn & Campos 2010).

Je vais essayer de montrer très brièvement comment ces outils de la TAD ont soutenu notre travail pour cette dernière étude. Tout d'abord, nous avons essayé de circonscrire l'habitat des fonctions au niveau des dernières années du lycée dans les deux pays, et de préciser les praxéologies associées, c'est à dire les types de tâches proposés, les techniques mises en place pour les résoudre, ainsi que les discours explicatifs et justificatifs associés, ce que la TAD nomme discours technologique en revenant à l'étymologie de ce terme. Première constatation : en France, cet habitat c'est l'analyse, au Brésil, c'est l'algèbre. Ceci se traduit au Brésil par une importance particulière donnée aux fonctions polynomiales et à la résolution algébrique d'équations associées. En cohérence avec cette perspective, l'introduction de paramètres est une variable didactique importante de complexification des tâches

proposées aux élèves et d'accès à la généralisation. Les effets sont aussi très nettement visibles dans les praxéologies associées aux fonctions discrètes que sont les suites numériques. Par exemple, au Brésil, une tâche typique est la détermination de termes et/ou raisons à partir d'informations partielles données sur une suite arithmétique ou géométrique. Une telle tâche dont la résolution fait appel à des techniques algébriques est anecdotique en France où ce qui domine, c'est l'étude de questions de convergence. Deux mondes, on le voit très différents, chacun avec sa logique propre. En résultait le constat clair : connaître les fonctions à la fin du secondaire ne signifiait pas la même chose au Brésil et en France. D'ailleurs, pas plus que les élèves brésiliens n'étaient capables de traiter nos sujets de baccalauréat basés sur des notions qu'on ne leur avait pas enseignées, il y avait fort à parier que la très grande partie de nos élèves de bac S auraient séché sur les épreuves proposées à l'époque pour rentrer à l'université de Sao Paulo, avec des tâches fonctionnelles non familières et requérant pour leur résolution une technicité algébrique qu'ils n'avaient pas.

Pour comprendre ces différences, il faut en fait remonter jusqu'aux plus hauts niveaux de l'échelle de codétermination didactique⁽¹⁷⁾, et prendre en compte l'histoire de l'enseignement. La place importante de l'algèbre dans l'enseignement secondaire brésilien fait partie d'une tradition mathématique qui remonte au début du 20e siècle, et que la période des mathématiques modernes a plutôt renforcée. De plus, l'enseignement de géométrie est essentiellement un enseignement de géométrie analytique qui mobilise lui aussi des techniques algébriques. L'enseignement secondaire est contrairement au nôtre unifié et, tous les élèves étant supposés suivre un même cursus, le choix a été fait de ne démarrer l'enseignement de l'analyse qu'à l'université. Enfin jusqu'à récemment, les technologies numériques y compris les calculatrices n'étaient pas utilisées et elles n'étaient pas autorisées à l'ENEM, l'examen de fin de secondaire, quand nous avons mené l'étude. Peut-être y avait-il là aussi la volonté de ne pas aggraver les disparités sociales.

Nos traditions respectives ne vivent cependant pas de façon isolée ; elles sont l'une et l'autre soumises aux influences internationales et notamment à la pression pour renforcer les liens entre mathématiques et vie quotidienne, pour mettre aussi l'enseignement des mathématiques au service d'une éducation citoyenne. C'est particulièrement visible dans les tâches concernant les fonctions proposées à l'ENEM. Pour les années que nous avons examinées, elles étaient toutes sans exception en contexte, très souvent liées à des questions sociétales ou environnementales, et à la frontière entre travail sur les fonctions et gestion de données. En France, cette influence est aussi visible mais elle se fait plus nettement sentir, en ce qui concerne le monde fonctionnel, au niveau de la scolarité du socle.

Je m'arrêterai là et me bornerai à mentionner que bien sûr, cette prise de conscience a modifié la façon dont pouvait s'envisager la collaboration dans la production de ressources, et aussi que comparant avec le premier projet de collaboration avec le Brésil auquel j'avais participé, une vingtaine d'années avant, j'ai pu percevoir

(17) Cette échelle de co-détermination est constituée de huit niveaux en interaction : civilisation, société, école, pédagogie, discipline, domaine, secteur, thème, sujet.

comment cette sensibilité qui avait grandi au fil des ans à la dimension culturelle de l'enseignement des mathématiques, et aux effets nocifs de l'exportation de cultures d'éducation dominantes, et notre culture est bien une culture d'éducation dominante, rendait le travail mené dans ce projet si différent du premier.

J'ai souligné dans cette partie l'appui que j'ai personnellement trouvé dans la TAD pour prendre en compte cette dimension culturelle de l'enseignement et l'apprentissage des mathématiques. Ceci ne signifie en rien que d'autres cadres théoriques et approches didactiques, développés en France ou à l'étranger, ne puissent répondre à ces besoins. Mes collègues étrangers n'utilisent pas en général les mêmes approches, les mêmes structures conceptuelles. Mais il n'y a pas de doute que le tournant socio-culturel qui a marqué l'évolution de la recherche en éducation mathématique à partir des années 90 favorise internationalement le travail sur ces questions et l'outil de plus en plus efficacement. Et, là encore, la diversité culturelle n'empêche pas les coopérations fructueuses.

Conclusion

J'ai essayé dans la conférence et dans ce texte de croiser des histoires, de partager des expériences. J'espère avoir bien montré que, oui, l'enseignement des mathématiques est au carrefour des cultures, et à quel point prendre la mesure de cette diversité culturelle, chercher à la comprendre, l'utiliser pour réfléchir à notre propre système, peut être enrichissant. Comme j'ai eu souvent l'occasion de l'exprimer, pour moi cette décentration a été essentielle. Et elle ne s'est pas uniquement nourrie de l'échange avec des systèmes éducatifs réputés pour « fonctionner bien ». C'est sans doute dans mes contacts avec les pays les plus démunis, dans le dynamisme et l'espoir que j'y ai vus, dans la conviction que grâce à l'enseignement, nous pouvions contribuer à rendre le monde un tout petit peu meilleur, que j'ai puisé le plus d'énergie.

Références

Alves Dias, M., Artigue, M., Jahn, A.P., Campos, T. (2010). A comparative study of the secondary-tertiary transition. In Pinto M.F. & Kawasaki T.F. (Eds.), *Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol. 2, p. 129-136. Belo Horizonte, Brazil: PME.

Artigue, M., Winslow, C. (2010). International comparative studies on mathematics education : a viewpoint from the anthropological theory of didactics. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 30/1, 47-82.

Artigue, M. (2015). Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport des TICE. *Bulletin de l'APMEP*, 514, 326-340.

Brousseau, G. (1986). Fondements de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques* 7.2, 33-115.

Carraher, D., & Schliemann, A.D. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, 669-705. Information Age Publishing, Inc., Greenwich, Connecticut.

Chevallard, Y. (2002). Organiser l'étude 3. Écologie & régulation. In J. L. Dorier, et al. (Eds.), *Actes de la 11^e école de didactique des mathématiques*. p. 41-56. Grenoble : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y., & Bosch, M. (2012). L'algèbre entre effacement et réaffirmation. Aspects critiques de l'offre scolaire d'algèbre. *Recherches en Didactique des Mathématiques*. In Coulange, L., Drouhard, J.P., Dorier J.L., & Robert, A. (Eds.) *Enseignement de l'Algèbre Élémentaire. Bilan et Perspectives. Recherches en Didactique des Mathématiques* (Hors série). (p. 19-40). Grenoble : La Pensée Sauvage.

Clarke, D. J., Keitel, C., & Shimizu, Y. (Eds.) (2006). *Mathematics classrooms in twelve countries: The insider's perspective*. Rotterdam : Sense Publishers.

Combiér, G., Guillaume, J.C., & Pressiat, A. (1997). *Les débuts de l'algèbre au collège. Au pied de la lettre !* Paris : INRP.

D'Ambrosio, U. (2008). *Etnomatemática. Eslabón entre las tradiciones y la modernidad*. Mexico : Limusa.

Even, R. & Ball, D. (Eds) (2009). *The Professional Education and Development of Teachers of Mathematics*. The 15th ICMI Study. New York : Springer Science.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., & Miyakawa, T. (2007). *Japanese Lesson Study in Mathematics. Its impact, diversity and potential for educational improvement*. Singapore : World Scientific Publishers.

Isoda, M. (2015). The science of lesson study in the problem solving approach. In Inprasitha, M., Isoda M., Wang-Iverson, P., & Yeap, B.-H. (Eds.), *Lesson Study. Challenges in Mathematics Education* (p. 81-106). Singapour : World Scientific Publishers.

Furinghetti, L. Giacardi, & F. Arzarello (Eds.) (2008). *The first century of the International Commission on Mathematical Instruction (1908-2008). Reflecting and shaping the world of mathematics education*, p. 149-162. Istituto della enciclopedia Italiana. Roma.

Leung, F. K. S., Graf, K.-D., & Lopez-Real, F. J. (Eds.) (2006). *Mathematics education in different cultural traditions: A comparative study of East Asia and the West* (New ICMI Study Series 13). New York : Springer.

Mason, J. (1991) *Routes to, Roots of Algebra*. Milton Keynes : Open University.

Niss, M. (2011). The Danish KOM project and possible consequences for teacher education. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 6.9., 13-24.

Robert, A., & Robinet, J. (1996). Prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*. 16.2, 145-176.

Sensevy, G. (2011). *Le sens du savoir. Éléments pour une théorie de l'action conjointe en didactique*. Bruxelles : de Boeck Éditeur.

Stacey, K., Chick, H., & Kendal, M. (Eds.) (2004). *The future of the Teaching and Learning of Algebra*. The 12th ICMI Study. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers.