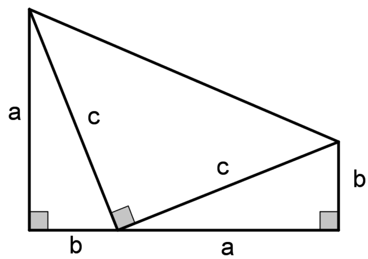
Deux démonstrations du théorème de Pythagore

Daniel Djament(*)

La démonstration de James Garfield

James Garfield fut l'éphémère vingtième président des États-Unis : entré en fonctions le 4 mars 1881, il mourut assassiné le 18 septembre de la même année. Avant d'entrer en politique, il avait fait divers métiers, dont celui d'enseignant. Sa démonstration du théorème de Pythagore fut publiée en 1876 dans le *New England Journal of Education*.



La figure ci-contre représente un trapèze rectangle constitué de trois triangles rectangles. On calcule l'aire S de ce trapèze de deux manières, soit en additionnant les aires des trois triangles, soit en utilisant la formule pour l'aire du trapèze : produit de la demi-somme des bases par la hauteur.

La première manière donne : $\mathrm{S}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$.

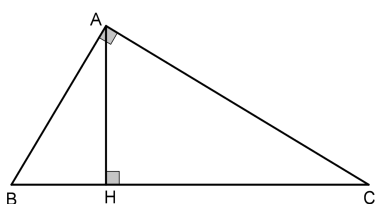
La seconde donne : $\mathrm{S}=\frac{1}{2}(a+b)^2$.

D'où $ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a+b)^2$, donc $2ab+c^2=(a+b)^2$ et finalement $c^2=a^2+b^2$.

Il est difficile de trouver plus simple. Je me suis souvent demandé pourquoi cette démonstration n'était pas privilégiée au collège et la lecture de l'article de Pierre Legrand dans le numéro 515 du Bulletin vert a ravivé mon interrogation.

Une autre démonstration

Pendant que nous sommes avec Pythagore, je ne résiste pas au plaisir de signaler la démonstration que j'ai entendu exposer par le physicien Jean-Marc Lévy-Leblond. Elle n'est probablement pas pour le collège, mais pourrait au lycée faire partie d'un thème sur la linéarité.

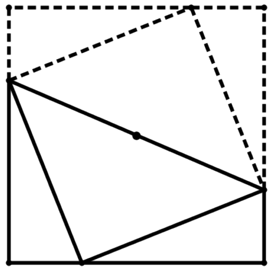


Le triangle ABC est rectangle en A, [AH] est une hauteur.
Lorsque des triangles rectangles sont semblables, leurs aires sont proportionnelles aux carrés de leurs hypoténuses.

(*) Professeur retraité de l'IUFM de l'académie de Créteil. daniel.djament@wanadoo.fr

Les triangles rectangles ABC, ABH et ACH sont tous les trois semblables.
Aire(ABC) = Aire(ABH) + Aire(ACH), donc, par linéarité : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

Appendice



Il est intéressant de noter une parenté entre ces deux démonstrations et deux de celles qui figurent dans le B.V. n° 515.

Si l'on complète la figure de la démonstration présidentielle par symétrie par rapport au milieu du côté oblique du trapèze, on obtient la figure utilisée par Clairaut.

Quant au ressort principal de la seconde démonstration, à savoir le fait que la hauteur d'un triangle rectangle le divise en deux triangles qui lui sont semblables, il est aussi celui de la seconde démonstration d'Euclide, reprise par Lacroix, Hadamard et bien d'autres. Il y a cependant une différence importante : on raisonne ici sur des aires alors qu'Euclide et consorts raisonnaient sur des longueurs.