

## Trois spirales de triangles(\*)

Robert Ferréol(\*\*)

### 1. Une spirale logarithmique

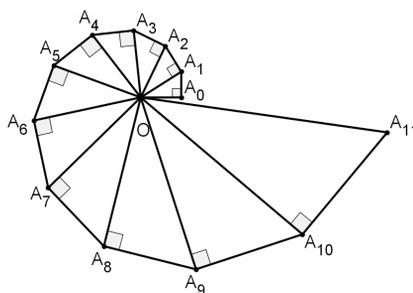
#### 1.1. La construction

La construction se fait de proche en proche. On part d'un triangle  $OA_0A_1$  rectangle en  $A_0$ . On appelle  $\varphi$  l'angle

$$\widehat{A_0OA_1}.$$

Pour tout  $n > 0$ , en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle  $OA_nA_{n+1}$  comme suit : il est rectangle en  $A_n$ , un côté de l'angle droit est  $[OA_n]$ , hypoténuse du triangle précédent, et

$$\widehat{A_nOA_{n+1}} = \varphi.$$



#### 1.2. Les calculs

Prenons des coordonnées polaires d'origine  $O$ , le demi-axe  $Ox$  portant  $A_0$  et posons  $OA_0 = a$ . L'angle polaire de  $A_n$  est évidemment  $\theta_n = n\varphi$ . Posons  $\rho_n = OA_n$  ;

on a dans le triangle  $OA_nA_{n+1}$  la relation  $OA_n = OA_{n+1} \cos \varphi$  qui donne  $\rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{\cos \varphi}$

et, par une récurrence immédiate,  $\rho_n = \frac{a}{\cos^n \varphi}$ . Posons  $\frac{1}{\cos \varphi} = k$  ; de  $\rho_n = ak^n$  et

$\theta_n = n\varphi$  on tire  $\rho_n = ak^{\frac{\theta_n}{\varphi}} = a\lambda^{\theta_n}$ , avec  $\lambda = (\cos \varphi)^{-1/\varphi}$ .

Les points  $A_n$  se succèdent donc sur la spirale logarithmique d'équation  $\rho = a\lambda^\theta$ .

### 2. La spirale de Théodore

#### 2.1. L'origine

On attribue traditionnellement à Théodore de Cyrène (-465, -398), qui enseigna les mathématiques à Platon, la construction d'une spirale de triangles permettant de visualiser la suite des racines carrées des entiers naturels. Cette attribution est probablement liée à la phrase suivante que Platon<sup>(1)</sup> met dans la bouche de Théétète :

(\*) Robert Ferréol a rédigé pour *Quadrature* un texte qui associe harmonieusement géométrie, analyse et arithmétique. Il a eu la gentillesse de nous autoriser à en présenter dans notre bulletin cette version « soft ».

(\*\*) robert.ferreol@gmail.com

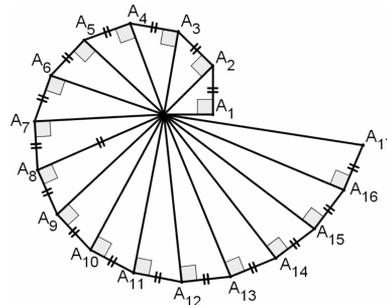
(1) Dans le dialogue dit *Théétète*.

« Théodore nous enseignait quelque chose sur les racines des nombres, nous démontrant que celles de trois et de cinq ne sont point commensurables en longueur avec celle de un, et il prenait ainsi de suite chaque racine, jusqu'à celle de dix-sept, à laquelle il s'arrêta. » Les œuvres de Théodore étant perdues, nul ne sait comment il s'y était pris.

N.B. : Notons que 17 est justement, comme on le voit sur la figure ci-après, la dernière étape avant que la spirale de Théodore ne repasse sur elle-même.

## 2.2. La construction

Le schéma de construction est proche du précédent. On part d'un triangle rectangle isocèle  $OA_1A_2$  tel que  $OA_1 = A_1A_2 = 1$  et donc aussi  $OA_2 = \sqrt{2}$ . Pour tout  $n > 1$ , en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle  $OA_nA_{n+1}$  comme suit : il est rectangle en  $A_n$ , un côté de l'angle droit est  $[OA_n]$ , hypoténuse du triangle précédent, mais la condition imposée n'est plus la constance de l'angle  $\widehat{A_nOA_{n+1}}$ , mais celle de  $A_nA_{n+1}$  : pour tout  $n \geq 1$ ,  $A_nA_{n+1} = 1$ .



On voit aussitôt par récurrence que  $OA_n = \sqrt{n}$ . Le résultat est vrai pour  $n = 1$  ; s'il est vrai pour  $n$ , on a  $OA_{n+1}^2 = OA_n^2 + A_nA_{n+1}^2 = n + 1$ , d'où  $OA_{n+1} = \sqrt{n+1}$ .

## 2.3. Les calculs

Prenons comme précédemment des coordonnées polaires d'origine O, le demi-axe Ox portant  $A_1$ , et soient  $(\rho_n, \theta_n)$  les coordonnées polaires de  $A_n$ . On a évidemment

$\rho_n = \sqrt{n}$ . Évaluons  $\theta_n$ . En posant  $\widehat{A_jOA_{j+1}} = \varphi_j$ , il vient  $\theta_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}$  ; de

$\tan \varphi_j = \frac{A_jA_{j+1}}{OA_j}$  on déduit  $\varphi_j = \arctan \frac{1}{\sqrt{j}}$  et donc

$$\theta_n = \arctan 1 + \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \arctan \frac{1}{\sqrt{n-1}}$$

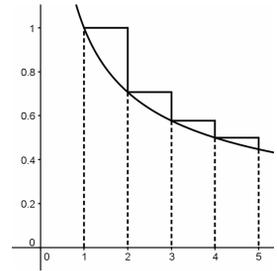
On exploite alors la double inégalité, valable pour  $x > 0$ ,  $x - \frac{x^3}{3} < \arctan x < x$ . La seconde inégalité est classique, la première résulte des variations de  $\arctan x - \left(x - \frac{x^3}{3}\right)$ , dont la dérivée est  $\frac{1}{1+x^2} - (1-x^2)$ , soit  $\frac{x^4}{1+x^2}$ .

On peut donc écrire  $\arctan \frac{1}{\sqrt{j}} = \frac{1}{\sqrt{j}} - \frac{\varepsilon_j}{3j^{3/2}}$ , avec  $0 < \varepsilon_j < 1$ , d'où  $\theta_n = \sigma_n - \omega_n$ ,

où  $\sigma_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}}$  et  $\omega_n = \frac{1}{3} \left( \varepsilon_1 + \frac{\varepsilon_2}{2^2} + \dots + \frac{\varepsilon_{n-1}}{(n-1)^2} \right)$ . La série de terme

général  $\frac{\varepsilon_n}{n^{3/2}}$  est manifestement convergente, donc  $\omega_n$  tend vers une limite  $\omega$ .

Reste à estimer  $\sigma_n$ . La figure ci-contre montre que  $\delta_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \int_1^n \frac{dx}{\sqrt{x}}$  est une somme d'aires de triangles curvilignes de base 1 et dont la somme des hauteurs est inférieure à 1 ; on a donc  $0 < \delta_n < 1$  ; de plus la suite  $\delta_n$  est croissante, donc tend vers une limite finie  $\delta$ .



$$\delta_n = \sigma_n - 2(\sqrt{n} - 1), \text{ d'où } \sigma_n = 2\sqrt{n} - 2 + \delta_n \text{ et}$$

$\theta_n = 2\sqrt{n} - 2 + \delta_n - \omega_n$ . On a finalement prouvé que  $\theta_n - 2\sqrt{n}$  tend vers une limite finie  $\mu$ .

Reprenons la relation entre  $\rho_n$  et  $\theta_n$  : on a  $\rho_n = \sqrt{n}$ , donc  $\rho_n - \frac{1}{2}\theta_n$  tend vers  $-\frac{\mu}{2}$ . On peut donc dire que les sommets  $A_n$  tendent à s'inscrire sur la spirale

d'Archimède d'équation  $\rho = \frac{1}{2}\theta - \frac{\mu}{2}$ , qu'on peut qualifier un peu abusivement de « spirale asymptote » à la figure.

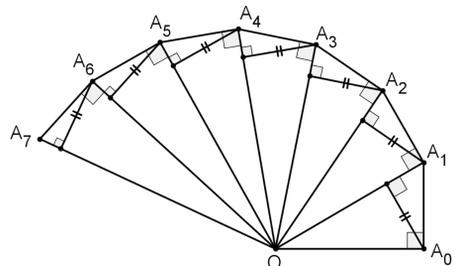
### 3. La spirale « 514-4 »

#### 3.1. L'origine

Cette spirale de triangles est beaucoup moins ancienne<sup>(2)</sup> et moins connue que les deux autres et son traitement est plus complexe. Elle a fait l'objet du bel exercice n° 4 de la rubrique « de-ci de-là » dans le B.V. n° 514, exercice qui est à l'origine de cet article.

#### 3.2. La construction

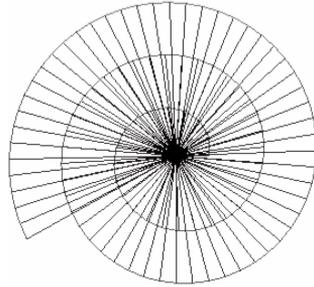
On part d'un triangle  $OA_0A_1$  rectangle en  $A_0$  tel que  $OA_0 = a_0$  ( $a_0 > 1$ ) et que la hauteur issue de  $A_0$  soit de longueur 1. Pour tout  $n \geq 1$ , en tournant toujours dans le sens positif, on construit le triangle  $OA_nA_{n+1}$  comme suit : il est rectangle en  $A_n$ , un



(2) Elle figure dans le *Crux mathematicorum* canadien, volume 30 de 2003, problème M114, mais il n'est pas impossible que son origine soit plus ancienne.

côté de l'angle droit est  $[OA_n]$ , hypoténuse du triangle précédent, mais la règle imposée est cette fois que la hauteur relative à l'hypoténuse soit constamment de longueur 1 (ce qui explique la condition  $OA_0 > 1$ ).

Si l'on trace un peu plus de points, on obtient la spirale de la figure ci-contre. Comme la spirale de Théodore, elle ressemble à une spirale d'Archimède d'équation polaire  $\rho = \alpha\theta + \beta$ ; mais en donner une justification sera nettement plus délicat.



### 3.3. Premiers calculs

Posons  $\rho_n = OA_n$  et  $A_{n-1}A_n = a_n$ . En évaluant de deux manières l'aire  $OA_{n-1}A_n$  (demi-produit de l'hypoténuse par la hauteur, demi-produit des côtés de l'angle droit), on obtient  $\rho_n = \rho_{n-1}a_n$ , ce qui donne, en itérant :  $\rho_n = \rho_0 a_1 \dots a_n = a_0 a_1 \dots a_n$ . En utilisant le théorème de Pythagore dans le même triangle, on a  $\rho_n^2 = \rho_{n-1}^2 + a_n^2$ , ce dont on déduit, en itérant :  $\rho_n^2 = \rho_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2$ .

On a finalement pour la suite  $(a_n^2)$  la propriété suivante :

$$a_0^2 + a_1^2 + \dots + a_n^2 = a_0^2 a_1^2 \dots a_n^2.$$

Autrement dit, pour tout  $n$ , la somme des  $(n + 1)$  premiers termes est égale à leur produit.

### 3.4. Parenthèse : les suites « somme = produit »

#### Théorème

Étant donné un réel  $u_0 > 1$ , il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une seule telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, u_0 + u_1 + \dots + u_n = u_0 u_1 \dots u_n \quad (E_n);$$

ses termes sont tous strictement supérieurs à 1.

La condition  $(E_1)$  donne  $u_1 = \frac{u_0}{u_0 - 1}$ , donc on a  $u_1 > 1$ . Supposons que l'on ait pu construire  $u_0, u_1, \dots, u_n$  vérifiant  $(E_k)$ , avec  $u_k > 1$ , pour  $1 \leq k \leq n$ .

Posons  $s_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$ .  $(E_{n+1})$  s'écrit alors  $s_n + u_{n+1} = s_n u_{n+1}$  ou encore  $u_{n+1}(s_n - 1) = s_n$ . Mais par hypothèse de récurrence  $s_n > n + 1$  et a fortiori  $s_n > 1$ , ce

qui nous permet d'écrire  $u_{n+1} = \frac{s_n}{s_n - 1}$ ; on a donc bien trouvé une valeur  $u_{n+1}$  unique vérifiant  $(E_{n+1})$  et cette valeur est strictement supérieure à 1.

**Formules de récurrence**

Étant donné  $u_0 > 1$ , étudions la suite  $(u_n)$  correspondante et la suite  $(s_n)$  de ses sommes partielles. On a vu plus haut que  $u_{n+1} = \frac{s_n}{s_n - 1}$ , mais on a aussi  $u_{n+1} = \frac{s_{n+1}}{s_n}$ , ce qui nous

donne  $s_{n+1} = \frac{s_n^2}{s_n - 1}$ , soit encore, valable pour tout  $n \geq 0$  :

$$\boxed{\frac{1}{s_{n+1}} = \frac{1}{s_n} - \frac{1}{s_n^2}} \tag{F_n}$$

De  $u_{n+1} = \frac{s_n}{s_n - 1}$  on tire  $\frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{s_n}$ , soit encore  $\frac{1}{s_n} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}}$ . En reportant dans

$(F_{n-1})$ , il vient  $1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_n} - \left(1 - \frac{1}{u_n}\right)^2$ , soit encore

$$\boxed{\frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_n} + \frac{1}{u_n^2}} \tag{G_n}$$

Observons que les deux suites  $\left(\frac{1}{s_n}\right)$  et  $\left(1 - \frac{1}{u_n}\right)$ , la seconde n'étant autre que la première décalée d'un cran, vérifient la relation de récurrence simple  $z_{n+1} = z_n - z_n^2$ .

**Comportement à l'infini**

On a vu plus haut que  $s_n > n + 1$ , donc  $s_n$  tend vers  $+\infty$  et, comme  $u_{n+1} = \frac{s_n}{s_n - 1}$ , la suite des  $u_n$  a pour limite 1. Il en résulte, par le théorème de Cesaro, que la suite  $\frac{u_1 + u_2 + \dots + u_n}{n}$  tend aussi vers 1 et donc que  $s_n \sim n$ . On a évidemment aussi

$s_{n-1} \sim n$ , donc  $\frac{1}{s_{n-1}} \sim \frac{1}{n}$ . De  $\frac{1}{u_n} = 1 - \frac{1}{s_{n-1}}$  on tire alors  $u_n = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$ .

**Le théorème de Cesaro**

*Si une suite  $(v_n)$  a pour limite L, la suite de terme général  $\frac{v_1 + v_2 + \dots + v_n}{n}$  a aussi la limite L.*

**Le théorème d'addition des équivalents**

*Soit une série divergente  $(\sum a_n)$  à termes  $> 0$  et une suite  $(b_n)$  telle que  $b_n \sim a_n$ . Alors  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \sim a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .*

**Démonstration**

Contentons-nous de démontrer le second théorème ; la démonstration du théorème de Cesaro est la même en plus simple.

On raisonne sur  $c_n = b_n - a_n$ . On a  $c_n \ll a_n$ . Soit  $C_n = c_1 + c_2 + \dots + c_n$  et  $A_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ . Fixons  $\varepsilon$  ( $\varepsilon > 0$ ) ; à partir d'un rang  $p$ , on a  $|c_n| < \varepsilon a_n$ , donc

$$\text{pour } n > p \text{ on a } |C_n - C_p| < \varepsilon(A_n - A_p), \text{ d'où : } \left| \frac{C_n}{A_n} \right| < \varepsilon + \frac{\varepsilon A_p + |C_p|}{A_n}.$$

Lorsque,  $p$  restant fixé,  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{\varepsilon A_p + |C_p|}{A_n}$  tend vers zéro. Il existe donc

un rang  $q$  tel que pour  $n > q$ ,  $\left| \frac{C_n}{A_n} \right| < 2\varepsilon$ . On a bien  $c_1 + c_2 + \dots + c_n \ll a_1 + a_2 + \dots + a_n$

ou, ce qui revient au même  $b_1 + b_2 + \dots + b_n \sim a_1 + a_2 + \dots + a_n$ .

Le théorème d'addition des équivalents permet de pousser un peu plus loin le développement de  $s_n$ . De  $u_n - 1 \sim \frac{1}{n} \sim \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ , ce théorème permet de tirer :

$$u_1 + \dots + u_n - n \sim \ln 2 + \ln \frac{3}{2} + \dots + \ln \frac{n+1}{n}, \text{ soit encore } u_1 + \dots + u_n - n \sim \ln(n+1),$$

c'est-à-dire  $s_n - u_0 - n \sim \ln(n+1)$  et finalement  $s_n = n + \ln(n) + o(\ln(n))$ .

**3.5. Retour à la spirale**

On reprend les notations du § 3.3. La suite des  $a_n^2$  est une suite « somme = produit » où  $\rho_n^2$  joue le rôle de  $s_n$ . Donc, lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,

$$\rho_n^2 = n + \ln(n) + o(\ln(n)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \rho_n &= \sqrt{n} \cdot \sqrt{1 + \frac{\ln(n)}{n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)} \\ &= \sqrt{n} \cdot \left(1 + \frac{\ln(n)}{2n} + o\left(\frac{\ln(n)}{n}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{\ln(n)}{\sqrt{n}}\right). \end{aligned}$$

(ce qui montre *a fortiori* que  $\rho_n - \sqrt{n}$  tend vers zéro).

Reste à faire une estimation de l'angle polaire  $\theta_n$  de  $A_n$ . En posant  $\widehat{A_j \text{OA}_{j+1}} = \varphi_j$ ,

il vient  $\theta_n = \varphi_1 + \varphi_2 + \dots + \varphi_{n-1}$  ; de  $\sin \varphi_j = \frac{1}{\rho_j}$  on déduit

$$\theta_n = \arcsin \frac{1}{\rho_1} + \arcsin \frac{1}{\rho_2} + \dots + \arcsin \frac{1}{\rho_{n-1}}.$$

Lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ ,  $\frac{1}{\rho_{n-1}}$  tend vers zéro ; on peut donc écrire, en utilisant le développement limité de la fonction arcsin :  $\arcsin \frac{1}{\rho_{n-1}} - \frac{1}{\rho_{n-1}} \sim \frac{1}{6\rho_{n-1}^3}$ . Comme  $\rho_{n-1} \sim \sqrt{n}$ , on a  $\frac{1}{6\rho_{n-1}^3} \sim \frac{1}{6n^{3/2}}$ . Donc  $\arcsin \frac{1}{\rho_{n-1}} - \frac{1}{\rho_{n-1}}$  est le terme général d'une série convergente, ce qui assure que  $\theta_n - \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{n-1}} \right)$  a une limite finie  $\lambda$ .

Mais nous avons vu qu'à l'infini  $\rho_n$  est proche de  $\sqrt{n}$ . Évaluons  $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\rho_n}$ . On peut l'écrire  $\frac{\rho_n - \sqrt{n}}{\rho_n \sqrt{n}}$  ; on a  $\rho_n \sim \sqrt{n}$  et  $\rho_n - \sqrt{n} \sim \frac{\ln(n)}{2\sqrt{n}}$ , donc  $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\rho_n} \sim \frac{\ln(n)}{2n^{3/2}}$ . Ainsi  $\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\rho_n}$  est le terme général d'une série convergente, donc

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - \left( \frac{1}{\rho_0} + \frac{1}{\rho_1} + \dots + \frac{1}{\rho_{n-1}} \right)$$

admet une limite finie  $\sigma$ .

Il en résulte que  $\theta_n - \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} \right)$  admet la limite finie  $\lambda - \sigma$ . Mais on a vu au § 2.3 que  $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n-1}} - 2\sqrt{n}$  tend vers une limite finie. Au total  $\theta_n - 2\sqrt{n}$  a une limite finie  $\tau$ . En rapprochant  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\theta_n - 2\sqrt{n}) = \tau$  et  $\lim_{n \rightarrow \infty} (\rho_n - \sqrt{n}) = 0$ , on obtient :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \rho_n - \frac{1}{2}\theta_n \right) = \frac{\tau}{2}.$$

La spirale 514-4 est donc (au même sens que l'était la spirale de Théodore) « asymptote » à la spirale d'Archimède d'équation  $\rho = \frac{\theta}{2} - \frac{\tau}{2}$ .

## Conclusion

Finissons par une anecdote. Jacques Bernoulli, fasciné par la propriété qu'a la spirale logarithmique de couper sous un angle constant les droites issues de son centre et d'être conservée par une infinité d'homothéties, l'appelait *Spira mirabilis*. Il avait même demandé qu'une telle spirale soit représentée sur son tombeau, avec la maxime « eadem mutata resurgo » (*approximativement* : je renais changée en moi-même). Hélas, ce que traça le graveur ressemble beaucoup plus à une spirale d'Archimède !

