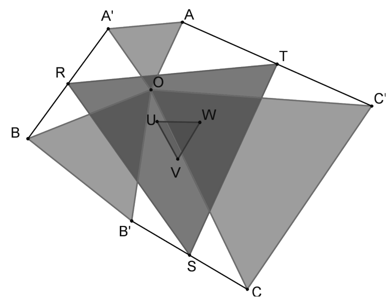
Triangles équilatéraux ou comment approfondir une épreuve du bac !

Mariannick Ruello(*)

Étonnée par le résultat de la question 4, de l'exercice 3 sur les nombres complexes du Bac S juin 2015 Métropole(voir en annexe), je réalise la figure sous Géogébra.

Je déplace les points et constate que le triangle RST semble toujours rester équilatéral.

Est-ce vrai, quelles que soient les positions des points A, B, C ?



1 Généralisation du problème

On considère trois points A, B, C (ceux-ci peuvent être alignés).
A′, B′, C′ sont les images respectives des points A, B, C par la rotation de centre O et d'angle π /3 (les triangles OAA′, OBB′, OCC′ sont donc équilatéraux de sens direct).
Soit R le milieu de [A′B], S celui de [B′C] et T celui de [C′A].
Montrer que le triangle RST est équilatéral.

Gardons l'outil des nombres complexes pour démontrer ce résultat.

On se place dans un repère orthonormé direct d'origine O et on note a, b, c les affixes respectives des points A, B, C.
Pour simplifier les écritures, on note k le nombre complexe de module 1 et d'argument π/3. Tout repose sur les propriétés de ce nombre complexe.

On peut remarquer que $\mathrm{k}^3 = -1$ et que k est solution de l'équation $x^2 - x + 1 = 0$, donc $\mathrm{k}^2 = \mathrm{k} - 1$; en notant r, s, t les affixes respectives des points R, S, T :

- $2r = \mathrm{k}a + b$, $2s = \mathrm{k}b + c$ et $2t = \mathrm{k}c + a$.
- $\mathrm{aff}\left(2\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right) = 2\,(s - r) = \mathrm{k}b + c - \mathrm{k}a - b = (\mathrm{k} - 1)\,b + c - \mathrm{k}a = \mathrm{k}^2 b + c - \mathrm{k}a.$
- $\mathrm{aff}\left(2\overrightarrow{\mathrm{ST}}\right) = 2\,(t - s) = (\mathrm{k} - 1)\,c + a - \mathrm{k}b = \mathrm{k}^2 c + a - \mathrm{k}b.$
- $\mathrm{aff}\left(2\overrightarrow{\mathrm{TR}}\right) = 2\,(r - t) = (\mathrm{k} - 1)\,a + b - \mathrm{k}c = \mathrm{k}^2 a + b - \mathrm{k}c.$

On peut remarquer que $\mathrm{k}[2\,(s - r)] = \mathrm{k}^3 b + \mathrm{k}c - \mathrm{k}^2 a = -2\,(r - t)$.

De la ligne précédente on déduit immédiatement que $\mathrm{aff}\left(\overrightarrow{\mathrm{RT}}\right) = \mathrm{k} \times \mathrm{aff}\left(\overrightarrow{\mathrm{RS}}\right)$ et par conséquent T est l'image de S dans la rotation de centre R et d'angle π/3.

(*) ruello@wanadoo.fr

Le triangle RST est bien équilatéral de sens direct.
Dans nos classes, l'écriture complexe des transformations n'est plus au programme. Mais, on peut démontrer ce résultat, en utilisant la notion de module.
En effet,

$$\left|\mathrm{k}\left[2(s-r)\right]\right|=|\mathrm{k}||2(s-r)|=|2(s-r)| \text{ et } \left|\mathrm{k}\left[2(s-r)\right]\right|=|-2(r-t)|=|2(r-t)|.$$

Donc **RS = TR**.
On a également, $\mathrm{k}^2\,[2\,(s-r)] = \mathrm{k}^4 b + \mathrm{k}^2 c - \mathrm{k}^3 a = -\,\mathrm{k}b + \mathrm{k}^2 c + a = 2\,(t-s)$ et donc

$$\left|\mathrm{k}^2\left[2(s-r)\right]\right|=|\mathrm{k}|^2|2(s-r)|=|2(s-r)|, \text{ et } \left|\mathrm{k}^2\left[2(s-r)\right]\right|=|2(t-s)|,$$

d'où **RS = ST**.

Remarque 1
On peut regrouper les points d'une autre façon. Soient U, V, W les milieux respectifs de [AB′], [CA′] et [BC′]. Notons u, v, w leurs affixes respectives. On a $2u = a + \mathrm{k}b$, $2v = c + \mathrm{k}a$ et $2w = b + \mathrm{k}c$. On démontre de façon analogue que le triangle UVW est équilatéral.

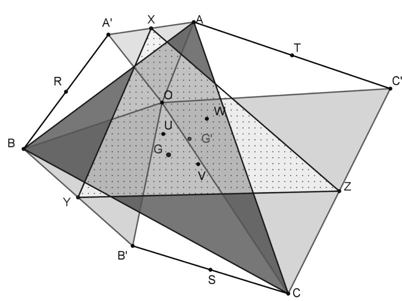
Remarque 2
Une autre présentation pourrait être :
Soit j le nombre complexe de module 1 et d'argument $2\pi/3$. (avec les notations précédentes : $\mathrm{j} = \mathrm{k}^2$, $\mathrm{j}^3 = 1$, $\mathrm{j}^2 + \mathrm{j} + 1 = 0$ et $-\mathrm{j}^2 = \mathrm{k}$).
Un triangle LMN, dont les affixes des sommets l, m, n, est équilatéral de sens direct si et seulement si on passe de $\overrightarrow{\mathrm{LM}}$ à $\overrightarrow{\mathrm{LN}}$ par rotation d'angle $\pi/3$, donc ssi $n - l = -\mathrm{j}^2\,(m - l)$, soit encore $n + l\mathrm{j} + m\mathrm{j}^2 = 0$. Les affixes des points R, S, T sont respectivement : $\frac{1}{2}\left(b-a\mathrm{j}^2\right)$, $\frac{1}{2}\left(c-b\mathrm{j}^2\right)$, $\frac{1}{2}\left(a-c\mathrm{j}^2\right)$. Il suffit donc de vérifier que

$$\frac{1}{2}\left(b-a\mathrm{j}^2\right)+\mathrm{j}\frac{1}{2}\left(c-b\mathrm{j}^2\right)+\mathrm{j}^2\frac{1}{2}\left(a-c\mathrm{j}^2\right)=0,$$ ce qui est immédiat.

On peut retrouver ces résultats dans le livre de TS, collection Terracher, p. 199, Édition 2002.

2 Compléments :

On peut également s'intéresser à X, Y, Z milieux respectifs des segments [AA′], [BB′], [CC′].
Le triangle XYZ n'est pas équilatéral mais semblable à ABC.



On peut utiliser les similitudes directes pour le démontrer, mais on peut aussi garder la même démarche que précédemment.
En effet, notons x, y, z les affixes respectives des points X, Y, Z.
On a :

$$2x = a + ka$$
$$2y = b + kb$$
$$2z = c + kc$$

$$\operatorname{aff}\left(2\overrightarrow{XY}\right) = 2(y-x) = (k+1)(b-a)$$
$$\operatorname{aff}\left(2\overrightarrow{YZ}\right) = 2(z-y) = (k+1)(c-b)$$
$$\operatorname{aff}\left(2\overrightarrow{ZX}\right) = 2(x-z) = (k+1)(a-c)$$

Les rapports des distances $\dfrac{XY}{AB}$, $\dfrac{YZ}{BC}$ et $\dfrac{ZX}{CA}$ sont égaux à $\dfrac{|k+1|}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

On peut de plus démontrer que ces trois triangles RST, UVW et XYZ ont le même centre de gravité.

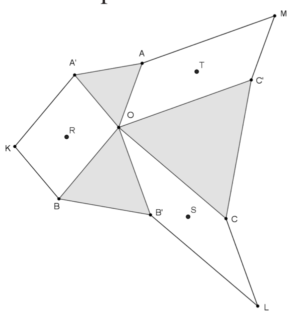
En effet,soient G, G′, G″, G‴ les centres de gravité des triangles ABC, RST, UVW et XYZ.
On note g, g', g'', g''' leurs affixes respectives.
On a $6g' = 2(r+s+t) = \left[k(a+b+c)+a+b+c\right] = (k+1)(a+b+c) = 3(k+1)g$,
$6g'' = 2(u+v+w) = (k+1)(a+b+c)$, et $6g''' = (k+1)(a+b+c)$.
Donc G′ = G″ = G‴, ce point est l'image de G par la similitude directe de centre O, de rapport $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$.

L'outil des nombres complexes, dans le cas général, est très efficace.

Peut-on traiter ce problème sans l'aide des nombres complexes ?

Nous donnons ici une belle démonstration proposée par Bruno Alaplantive :
Soit K le quatrième sommet du parallélogramme BOA′K, L le quatrième sommet du parallélogramme COB′L et M le quatrième sommet du parallélogramme AOC′M.
Alors :

$$\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'M} = \overrightarrow{B'O} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{OA}.$$



En notant $\Re$ la rotation vectorielle d'angle $\dfrac{\pi}{3}$

$$\Re\left(\overrightarrow{B'O}\right) = \overrightarrow{B'B}\ ;\ \Re\left(\overrightarrow{CC'}\right) = \overrightarrow{CO}\ ;\ \Re\left(\overrightarrow{OA}\right) = \overrightarrow{OA'}.$$

Donc, par linéarité :

$$\Re\left(\overrightarrow{LM}\right) = \Re\left(\overrightarrow{B'O}\right) + \Re\left(\overrightarrow{CC'}\right) + \Re\left(\overrightarrow{OA}\right),$$
$$\Re\left(\overrightarrow{LM}\right) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{CO} + \overrightarrow{OA'},$$
$$\Re\left(\overrightarrow{LM}\right) = \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{LB'} + \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{LK}.$$

Puisque $\Re\left(\overrightarrow{LM}\right) = \overrightarrow{LK}$, le triangle LMK est équilatéral de sens direct.

Les points R, S, T sont les centres respectifs des parallélogrammes BOA′K, COB′L et AOC′M

Ainsi l'homothétie de centre O et de rapport ½ transforme le triangle LMK en STR qui est donc également équilatéral.

Annexe : Sujet Bac 2015

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :
$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   a. Calculer 1e module et un argument du nombre a.
   b. Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   c. Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   d. Placer les points A, B et C dans le repère $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question 2.d complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{3}}$.
   a. Montrer que $b' = 8$.
   b. Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment [MN] a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$
   a. On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].

   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.

   b. Quelle conjoncture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ? Justifier ce résultat.