Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 517–1 *Pour nos élèves*

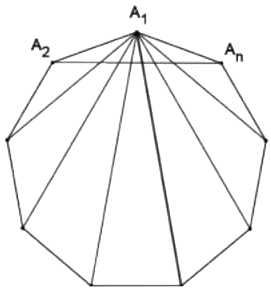
A – Dans un repère inconnu sur feuille blanche, on donne trois points non alignés A, B, C et leurs coordonnées.

Retrouver les axes et le repère $\left(\mathrm{O},\vec{i},\vec{j}\right)$.

B – Déterminer tous les couples de réels strictement positifs qui solutions du système

$$\begin{cases} a+\ln(a)=b \\ b+\ln(b)=a \end{cases}$$

Exercice 517–2 *Tiré des olympiades mathématiques espagnoles 2005*



On dit qu'un triangle est multiplicatif si le produit des longueurs de deux de ses côtés est égal à la longueur du troisième côté.

On considère un polygone régulier $A_1A_2\ldots A_n$ ($n \geq 4$) à n côtés, tous de longueur 1.

Les $n-3$ diagonales issues de A_1 partagent le triangle

$A_1A_2A_n$ en $n - 2$ petits triangles.
Prouver que chacun de ceux-ci est multiplicatif.

Exercice 517–3 Jean-Christophe Laugier – Rochefort *Dénombrement et application*

1. Dénombrer les applications $f : X \to X$, où X est un ensemble fini de cardinal égal à n ($n \geq 1$), telles que : il existe un élément a de X tel que $f \circ f(x) = a$, pour tout x de X.
2. Dénombrer les applications $f : X \to X$, où X est un ensemble fini de cardinal égal à n ($n \geq 1$), telles que : il existe un sous-ensemble B de X, non vide, de cardinal p donné, tel que $f \circ f(x) \in B$ pour tout x de X.

Exercice 517–4 Michel Lafond – Dijon *Équation diophantienne*

Trouver tous les triplets d'entiers (a, b, c) vérifiant

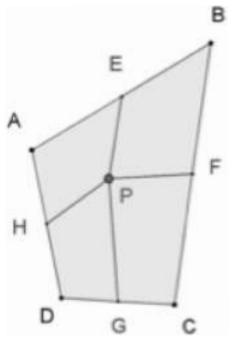
$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} = \frac{1}{c^2}.$$

Nota. Comme vous avez déjà pu en prendre connaissance dans le présent bulletin, Daniel Reisz nous a quittés en novembre 2015. Je veux ici témoigner mon admiration pour lui. Plus particulièrement je tenais à vous faire connaître toute ma gratitude pour l'attention qu'il accordait à cette rubrique et le soin avec lequel il choisissait ses propositions d'exercices.

Solutions

Exercice 515–1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach *Puzzle*

On donne un quadrilatère convexe ABCD et un point P en son intérieur.
Soient E, F, G, H les milieux des côtés.
On découpe le quadrilatère selon les quatre quadrilatères PEBF, PFCG, PGDH, PHAE.



- Montrer que, assemblés autrement, ces quatre quadrilatères permettent de constituer un autre quadrilatère a priori non isométrique au premier.
- Peut-on trouver un point intérieur (des points) tel(s) que le nouveau quadrilatère soit superposable à l'initial ?
- Discuter de la demande de convexité du quadrilatère initial.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Paul-Alain Bonvert (Alfa du Ginseng).

Voici la solution de Pierre Renfer.

1) Les milieux E, F, G, H forment un parallélogramme

Notons S_M la symétrie centrale, de centre le point M et $T_{(\vec{u})}$ la translation de vecteur $\vec{u}$.

Alors $J = S_H \circ S_G \circ S_F \circ S_E = T_{\left(2\overrightarrow{EF}-2\overrightarrow{GH}\right)}$.

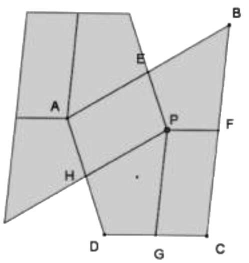
Comme J laisse le point A fixe, J est l'identité et $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$.

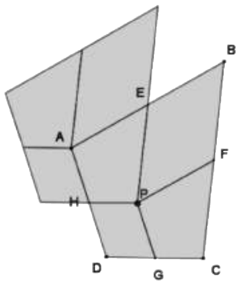
2) Transformation du quadrilatère
On colle ensemble les segments [AE] et [BE], puis les segments [BF] et [CF], puis les segments [CG] et [DG], puis les segments [DH] et [AH].
On passe alors du quadrilatère initial Q à un nouveau quadrilatère Q′ dont les sommets sont les quatre avatars éclatés du point P et dont le point intérieur est la fusion des quatre points A, B, C, D.

Dans ce quadrilatère Q′, l'ordre des sommets du parallélogramme EFGH est inversé par rapport celui qui existait dans le quadrilatère Q.

En retournant le quadrilatère Q′ dans l'espace, on peut donc obtenir un quadrilatère Q″ dont les sommets E, F, G, H coïncident avec les sommets du parallélogramme du quadrilatère initial Q.

Si Q″ et Q sont isométriques, alors l'isométrie f qui applique Q sur Q″ est un déplacement et Q″ = Q si tous les quadrilatères conservent finalement leur position initiale.
Le point A est alors le symétrique du point P par rapport au milieu de [EH] et le quadrilatère AHPE est un parallélogramme.
De même les quadrilatères BEPF, CFPG et DGPH sont des parallélogrammes.
On en déduit que le quadrilatère ABCD est aussi un parallélogramme et que P est le centre de symétrie de ce parallélogramme.
Remarque de Paul-Alain Bonvert :
Il est possible que seuls deux parallélogrammes conservent leur position alors que les deux autres quadrilatères superposables permuteront, ainsi que le montre la figure suivante.





Des fichiers GeoGebra de ces différents assemblages sont disponibles sur le site de l'association.

Exercice 515–2 Daniel Reisz – Auxerre *Il préféra s'adonner aux sciences*

Joseph Fourier, lors de son noviciat à l'abbaye de St Benoit sur Loire (1787 - 1789),

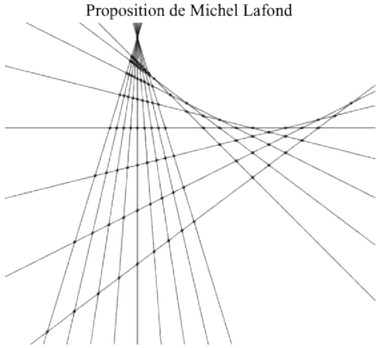
s'est posé ce « petit problème » :
Comment disposer 17 droites pour avoir 101 points d'intersection ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Lafond (Dijon), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau), Michel Sarrouy (Mende).

Voici des solutions.
Dans une étude assez poussée mais non exhaustive, Jean Couzineau obtient, à l'aide d'un programme, les 21 configurations solution du problème indiquées dans le tableau ci-dessous.
Ce tableau donne les groupes de droites avec P pour parallèles, C pour concourantes et Q pour quelconques où les groupes de droites parallèles ou concourantes n'ont aucune droite en commun.

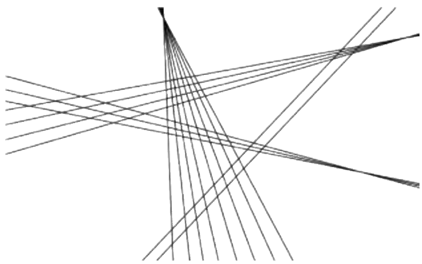
9C 8Q				
8P 4P 2P 3Q	8P 3P 3P 2P 1Q	8C 4C 3C 2P	7P 5C 4C 1Q	7C 5C 4P 1Q
8P 4C 3C 2Q	8C 4P 3C 2Q	8C 3P 3P 3C	7C 6P 4Q	6P 6C 4P 1Q
8P 4C 2P 2P 1Q	8C 4P 2P 2P 1Q	7P 6C 4Q	7C 6C 2P 2Q	6P 5P 5P 1Q
8P 3P 3C 3C	8C 4C 3P 2Q	7P 5P 3P 2P	7C 5P 4C 1Q	6P 6P 4C 1Q

Proposition de Michel Lafond



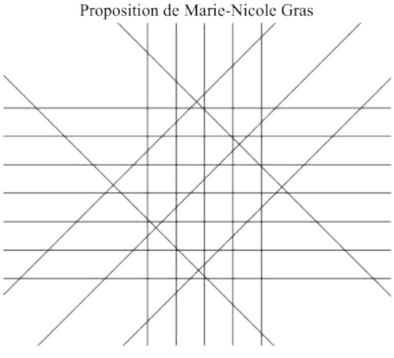
C'est 9C 8Q

Proposition de Michel Lafond



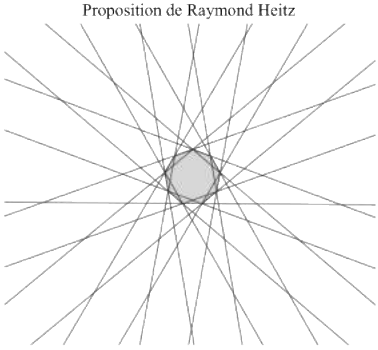
C'est 8C 4C 3C 2P

Proposition de Marie-Nicole Gras



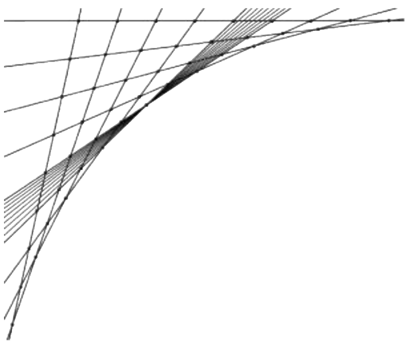
C'est 7P 5P 3P 2P

Proposition de Raymond Heitz



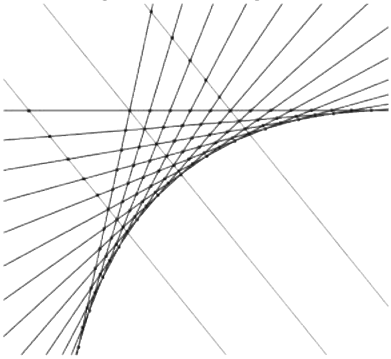
autre type de solution
(à partir d'un ennéagone et 8 diagonales parallèles à des côtés)

Proposition de Marie-Nicole Gras



autre type de solution

Proposition de Bruno Alaplantive



autre type de solution

Des fichiers GeoGebra de ces figures sont disponibles sur le site de l'association.

Exercice 515–3 Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng *Dénombrements et probabilités*

Dans le plan muni d'un repère on appelle point entier tout point dont les deux coordonnées sont entières.
Cinq points entiers étant donnés, on considère les milieux de tous les segments d'extrémités deux quelconques de ces points.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de milieux entiers.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Michel Lafond.

Pour parler de variable aléatoire, il faut d'abord une expérience aléatoire.
Ici, ce qui est aléatoire, ce ne sont pas tant les points que la parité de leurs coordonnées (entières).
En effet un milieu est entier si et seulement si les abscisses des deux extrémités ont la même parité, et de même pour leurs ordonnées.
Donc nous choisissons aléatoirement (avec équiprobabilité) les coordonnées de 5 points parmi {0, 1}.
X est le nombre de points entiers parmi les milieux.
Les modalités de X sont a priori dans {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}.
Il y a $2^{10} = 1024$ cas équiprobables. Mais ajouter 1 à toutes les coordonnées ne modifie pas X, donc on peut supposer qu'un des points a pour coordonnées (0, 0).
Il n'y a plus que $2^8 = 256$ cas équiprobables et un dénombrement (informatique, car dans ce genre de dénombrement c'est moins périlleux qu'un raisonnement) donne :

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$P(X = x_i)$		$\frac{60}{256}$	$\frac{90}{256}$	$\frac{60}{256}$	$\frac{30}{256}$		$\frac{15}{256}$				$\frac{1}{256}$

Michel Lafond propose tout de même en annexe une recherche manuelle du dénombrement. Celle-ci est disponible sur le site de l'association, avec un complément pour le tirage de 4 points ou 6 ou 7.

Remarque. J'ai reçu des remarques au sujet de cet exercice dont la très mauvaise formulation ne définit pas d'expérience aléatoire, ainsi que le constate Michel Lafond. Reçues pour mon manque de vigilance et transmises à l'auteur.

Exercice 515–4 Michel Lafond – Dijon *Approximations de cosinus*

Soit l'intervalle $\mathrm{I}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

1) Trouver deux réels a, b tels que pour tout x de I, $\left|a+bx^2-\cos(x)\right|\leq 0{,}03$.

2) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout x de I, $\left|\dfrac{a+bx^2}{1+cx^2}-\cos(x)\right|\leq 0{,}001$.

Remarque. Michel Lafond nous soumet l'heuristique de cet exercice :
« J'ai lu dans un numéro récent de THE MATHEMATICAL GAZETTE que le mathématicien astronome indien ARYABHATA utilisait comme approximation de $\sin(x)$ la fraction $\dfrac{16x(\pi-x)}{5\pi^2-4x(\pi-x)}$ sur $[0, \pi]$ (avec une bonne approximation de π). Et cela il y plus de 1500 ans !
En effet, l'erreur commise en valeur absolue ne dépasse jamais 0,002.
En prenant $\cos(x)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ on trouve l'approximation $\cos(x)\approx\dfrac{\pi^2-4x^2}{\pi^2+4x^2}$ et c'est ce qui m'a donné l'idée de l'exercice ci-dessus. »

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Couzineau (Massy-Palaiseau), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Jean Couzineau.

Soit l'intervalle $\mathrm{I}=\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

Avec un logiciel, on peut faire des considérations géométriques sur les courbes et trouver, par tâtonnement, des valeurs pour les coefficients. Je constate qu'il n'y a pas unicité pour les coefficients mais les différentes valeurs sont assez proches. Je n'arrive pas à justifier les valeurs des coefficients.

1) Trouver deux réels a, b tels que pour tout x de I, $\left|a+bx^2-\cos(x)\right|\leq 0{,}03$.

Pour toute valeur de a dans l'intervalle [0,97 ; 0,9775], on peut trouver au moins une valeur de b. Par exemple, pour a = 0,97, toute valeur b dans l'intervalle [–0,405 ; –0,403] convient. Plus a est grand, plus l'intervalle pour b est petit et nécessite un grand nombre de décimales. Par exemple, si a = 0,977 seul b = –0,408 convient si on se limite à 3 décimales.
Sinon, on fixe des valeurs limites en 0 et en $\pi/2$ pour obtenir a et b et l'inégalité est

vérifiée pour tout x de I. Cette méthode fonctionne dans le cadre de ce problème mais je ne trouve pas de raison a priori (sauf le choix des expressions pour approximer).

En 0, on doit avoir $|a-1| \leq 0{,}003$. *A priori*, $a \in [0{,}97 ; 1{,}03]$. On constate que pour $a > 1$, il n'y a pas de solution.

Prenons $a = 0{,}97$.

En $\pi/2$, on doit avoir $|a+b\pi^2/4| \leq 0{,}03$. Prenons $a + b\pi^2/4 = -0{,}03$ (avec $+0{,}03$, on n'obtient pas de valeur de b) qui donne $b = (-0{,}03 - a) \times 4/\pi^2 \approx -0{,}405$ qui convient.

2) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout x de I, $\left|\dfrac{a+bx^2}{1+cx^2}-\cos(x)\right| \leq 0{,}001$.

Comme précédemment, on trouve des valeurs par tâtonnement. Pour $x = 0$, on doit avoir $|a-1| \leq 0{,}001$, donc $a \in [0{,}99 ; 1{,}01]$ *a priori*. La valeur c influence beaucoup le résultat et semble être aux alentours de 0,1. Commençons par fixer $c = 0{,}1$. Fixons b dépendant de a en prenant $x = \pi/2$ et $\left|\dfrac{a+bx^2}{1+cx^2}-\cos(x)\right| = -0{,}01$ (je n'ai pas essayé $+0{,}01$) on en déduit $|a+b\pi^2/4| \leq 0{,}03$. Dans ces conditions, toute valeur de a dans l'intervalle $[0{,}992 ; 1{,}01]$ convient.

Dans les mêmes conditions, avec $c = 0{,}09$, on trouve $a \in [0{,}99 ; 0{,}998]$ et b calculé avec la formule $b = \left(-0.01\left(1+c\pi^2/4\right)-a\right)\times 4/\pi^2$. Apparemment, c ne doit pas trop s'éloigner de 0,1. Avec $c = 0{,}11$, on trouve $a = 0{,}999$ et b calculé qui convient.