Le loup et l'agneau (cas général)

Catherine Combelles, Paul-Louis Hennequin,
Philippe Langlois et Pierre Carriquiry

Avant-propos

Dans son article *Le loup et l'agneau-Activités de probabilités en seconde*, Pierre-Alain Muller présentait dans le dernier numéro du Bulletin une activité au niveau de la seconde. Il nous a semblé intéressant de répondre à quelques questions relatives au cas où loup et agneau s'atteignent ou non après avoir fait chacun n pas. Cet exercice peut alors être exploité en Terminale comme illustration de la loi binomiale.

Énoncé

On se place sur la grille des points (x, y) du plan dont les coordonnées sont des entiers relatifs. Au départ, l'agneau est en $(0, 0)$ et le loup en (n, n). Ils jouent alternativement, l'agneau en premier.

Quand l'agneau joue : il augmente de 1 son abscisse (il avance d'un cran vers la droite) ou son ordonnée (il avance d'un cran vers le haut).

Quand le loup joue : il diminue de 1 son abscisse (il avance d'un cran vers la gauche) ou son ordonnée (il avance d'un cran vers le bas).

Le loup a gagné si à un moment donné il rejoint le point où se trouve l'agneau.

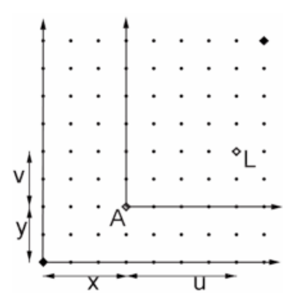
Remarque préalable

Soit (x, y) les coordonnées de l'agneau A, (X, Y) celles du loup L. Chaque fois que l'agneau joue, $x + y$ augmente de 1 ; chaque fois que le loup joue, $X + Y$ diminue de 1.

Au départ, $x + y = 0$, $X + Y = 2n$. Une rencontre ne sera donc possible que lorsque agneau et loup auront joué n coups chacun ; ils seront alors sur la droite $x + y = n$.

On suppose désormais que la partie se joue en $2n$ coups, n pour l'agneau, n pour le loup.

Version probabiliste



Les déplacements de chacun sont tirés à pile ou face.
Pour l'agneau : si pile sort, x augmente de 1, si face sort, y augmente de 1. Pour le loup : si pile sort, X diminue de 1, si face sort, Y diminue de 1.
La rencontre aura lieu si et seulement si au n–ième coup du loup, on a $X = x$, $Y = y$. Ceci nous amène à nous placer du point de vue de l'agneau, c'est-à-dire à utiliser

un repère mobile ayant son origine en A. Les coordonnées de L sont alors :

$$u = X - x, \; v = Y - y.$$

Quand l'agneau joue, on voit aussitôt que : si *pile* sort, u diminue de 1 ; si *face* sort, v diminue de 1. Quand le loup joue, on retrouve la même situation : si *pile* sort, u diminue de 1 ; si *face* sort, v diminue de 1.

Pour rejoindre l'agneau, le loup doit, dans le repère mobile, aller n fois vers la gauche et n fois vers le bas, ce qui signifie que, **sur les 2n tirages, il doit y avoir n fois pile et n fois face**. Le problème n'est finalement qu'un habillage du schéma de Bernoulli.

La réponse est connue : la probabilité de gain du loup est $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Autre solution : Quand il a effectué n pas, l'agneau se trouve au point $(k, n-k)$ avec la probabilité $\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}$; il en est de même du loup ; ils s'y trouvent donc tous les deux avec la probabilité $\frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}^2$; ils se rencontrent donc (et le loup croque l'agneau !) avec la probabilité :

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^{2n}}\binom{n}{k}^2 .$$

mais cette somme est égale à $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$, comme on le voit en comparant les termes de degrés n dans l'identité :

$$(1+x)^{2n} = \left((1+x)^n\right)^2 .$$

Remarque : en utilisant la formule de Stirling on obtient que, pour n grand, $\frac{1}{\sqrt{n\pi}}$ est une bonne approximation de $\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

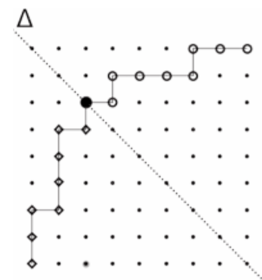
Version jeu de stratégie

Hypothèses, règles et notations restent les mêmes, mais cette fois, à chaque coup, les deux adversaires choisissent au lieu de s'en remettre au hasard.

Premier cas : c'est l'agneau qui commence

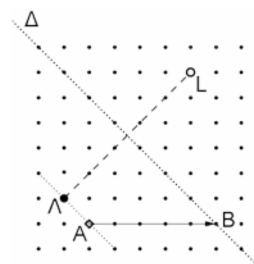
Quoi que fasse l'agneau, le loup a une stratégie gagnante très simple : quand l'agneau vient de monter d'un cran, le loup va d'un cran vers la gauche, quand l'agneau vient d'avancer d'un cran vers la droite, le loup descend d'un cran.

Si on considère le carré K dont la diagonale principale joint les positions initiales des deux adversaires, on constate qu'ainsi à chaque coup le mouvement du loup est symétrique du mouvement précédent de l'agneau par rapport à la seconde diagonale Δ du carré. On a vu plus haut qu'à son n-ième coup (mais pas avant), l'agneau se trouve sur Δ. Compte tenu de la symétrie des deux trajectoires, au coup suivant (le n-ième coup du loup), le loup aura rejoint l'agneau et donc gagné la partie … et son repas.



Cette stratégie gagnante est la seule possible

Supposons que le loup adopte une autre stratégie. Il existe donc $k \in \,]0, n[$ tel que, lorsque les deux adversaires ont joué k coups, le point Λ symétrique de L par rapport à Δ soit distinct de la position A de l'agneau. Mais, d'après la remarque initiale, A et Λ sont sur la droite $x + y = k$ parallèle à Δ.
Supposons par exemple que Λ soit au-dessus de A sur cette droite (on peut toujours s'y ramener par symétrie par rapport à la diagonale principale). Il suffira à l'agneau d'aller $(n - k)$ fois vers la droite pour se trouver en un point B sur Δ.



Il y sera en sécurité, car les $(n - k)$ coups qui restent au loup ne lui permettent pas d'aller en B : en effet, dans le triangle ΛAB, au plus grand angle est opposé le plus grand côté, donc ΛB > AB. Le trajet qu'aurait à faire le loup pour aller en B est strictement supérieur à LB, qui est aussi ΛB, et *a fortiori* strictement supérieur à AB.

Conclusion : si le loup ne fait aucune faute, il gagne à coup sûr ; mais s'il commet la moindre erreur, l'agneau n'a qu'à s'enfuir tout droit pour lui échapper.

Deuxième cas : c'est le loup qui commence.

Le loup est alors le premier à atteindre la diagonale D et l'agneau a le choix entre deux mouvements possibles dont au moins un lui permet de ne pas tomber dans la gueule du loup et de lui échapper.