Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 516–1

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit E un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension n. On dit que deux endomorphismes f, g $\in \mathcal{L}(E)$ commutent si

$$f \circ g = g \circ f.$$

On dit que ces endomorphismes anticommutent si

$$f \circ g + g \circ f = 0.$$

Quel est le nombre maximal de symétries de E qui commutent deux-à-deux ?
Quel est le nombre maximal de symétries de E qui anticommutent deux-à-deux ?
Étudier ensuite le cas où E est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension n.

Problème 516-2 (Isao Sauzzede, ENS Lyon)

Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$, telle que, pour tous $x, y > 0$,

$$f\left(xf(y)\right) = yf(x).$$

On suppose f bornée au voisinage de l'infini. Trouver f.
Que dire si l'on supprime l'hypothèse de bornitude au voisinage de l'infini ?

Problème 516-3 (Christian Planchon, Aumont-Aubrac)

Soit $f(x)$ la hauteur du plus long cylindre de révolution de rayon x qui peut être contenu dans un parallélépipède rectangle de côtés 16, 20 25.
Quelle est la valeur exacte de $f(1)$?
Quel est le rayon du plus grand disque contenu dans ce parallélépipède (autrement dit, que vaut $\sup\left\{x \middle| f(x) \neq 0\right\}$?

Donner, par intervalles, l'expression algébrique de $f(x)$.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 504–4 (Michel Lafond, Dijon)

On définit la suite u par la condition initiale $u_0 = 3$ et pour $n \in \mathbb{N}$, par la relation $u_{n+1} = u_n + \sin(u_n)$. Montrer que u_3 est une approximation par défaut de π à 10^{-33}.

Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Jean Gounon (Chardonnay), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Les solutions proposées sont relativement semblables et commencent par l'encadrement classique

$$\pi - \frac{\pi^3}{6} \leq \sin(x) \leq \pi \qquad (x \geq 0), \tag{1}$$

On peut établir cet encadrement par un tableau de variation ou par la formule de Taylor avec reste intégral, ou par intégration. Par exemple, pour $x \geq 0$,

$$\sin(x) = \int_0^x \cos(t)\,\mathrm{d}t \leq \int_0^x 1\,\mathrm{d}t = x,$$

ce qui donne une partie de l'encadrement. On intégre cette inégalité entre 0 et π :

$$1 - \cos(x) \leq \frac{x^2}{2}.$$

En intégrant de nouveau,

$$x - \sin(x) \leq \frac{x^3}{6},$$

ce qui donne l'autre partie de l'encadrement.

Soit (u_n) la suite donnée dans l'énoncé. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_n = \pi - u_n$. Alors

$$v_{n+1} = \pi - u_{n+1} = \pi - \left(u_n + \sin(u_n)\right) = v_n - \sin(\pi - v_n) = v_n - \sin(v_n).$$

Comme $v_0 = \pi - 3$ appartient à $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, l'encadrement (1) permet de montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq v_{n+1} \leq \frac{v_n^3}{6}.$$

Ainsi,

$$0 \leq v_3 \leq \frac{v_2^3}{6}.$$

donc

$$0 \le v_3 \le \frac{1}{6}\left(\frac{v_1^3}{6}\right)^3 = \frac{v_1^9}{6^4},$$

puis

$$0 \le v_3 \le \frac{1}{6^4}\left(\frac{v_0^3}{6}\right)^3 = \frac{v_0^{27}}{6^{12}}.$$

Autrement dit,

$$0 \le u_3 - \pi \le \frac{(\pi-3)^{27}}{6^{12}} \simeq 9.16 \times 10^{-34} < 10^{-33}.$$

Problème 505–1 (Michel Bataille, Rouen)

Montrer que si a, b, c sont des réels strictement positifs vérifiant $abc = 1$, alors

$$2 + \frac{3}{a+b+c} \le \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \le \frac{3}{4} + \frac{(a+b+c)^2}{4}.$$

Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Michel Bataille (Rouen), Jean-Claude Carréga (Lyon), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Pascal Heimburger (La Rochelle), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

La solution la plus rapide me semble être celle de ***Marie-Nicole Gras***. Par l'inégalité arithmético-géométrique,

$$x + y + z \ge 3\sqrt[3]{xyz} \qquad (x, y, z \ge 0).$$

Puisque $abc = 1$, cette inégalité appliquée au triplet (a, b, c) et au triplet $\left(\frac{1}{a}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}\right)$, donne

$$a+b+c \ge 3, \quad \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 3.$$

Donc

$$1 \ge \frac{3}{a+b+c}$$

et

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \ge 3 \ge 2 + \frac{3}{a+b+c}.$$

C'est très élégant !

Pour montrer la deuxième inégalité, à savoir

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\leq\frac{3}{4}+\frac{(a+b+c)^2}{4},$$

on transforme $\frac{1}{a}$ en bc, $\frac{1}{b}$ en ac et $\frac{1}{c}$ en ab grâce à la relation $abc = 1$. On doit donc montrer que

$$ab+ac+bc\leq\frac{3}{4}+\frac{(a+b+c)^2}{4},$$

soit encore

$$\mathrm{S}:=3+a^2+b^2+c^2-2ab-2ac-2bc\geq 0.$$

On transforme S, de manière à l'exprimer en fonction de $a - 1$, $b - 1$ et $c - 1$. On remarque que l'hypothèse $abc = 1$ entraîne

$$(a-1)(b-1)(c-1)=-ab-bc-ca+a+b+c$$

et on obtient

$$\begin{aligned}\mathrm{S}&=a^2+b^2+c^2-2a-2b-2c+3+2(a+b+c-ab-bc-ca)\\&=(a-1)^2+(b-1)^2+(c-1)^2+2(a-1)(b-1)(c-1)\\&=\left[(c-1)+(a-1)(b-1)\right]^2-(a-1)^2(b-1)^2+(a-1)^2+(b-1)^2\\&=\left[(c-1)+(a-1)(b-1)\right]^2+(a-1)^2+(b-1)^2\left[1-(a-1)^2\right].\end{aligned}$$

Les réels a, b, c sont permutables. Ils sont strictement positifs et leur produit vaut 1, donc l'un d'eux est inférieur ou égal à 1. On peut donc supposer $0 < a \leq 1$. Ainsi, l'expression S est positive ou nulle. De plus, elle est nulle si et seulement si $a = 1$, $c = 1$ auquel cas $ab = 1$. Ceci finit d'établir l'encadrement souhaité.

Problème 505–3 (Ghali Lalami, école Polytechnique)

Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^x\frac{\cos(x-y)-\cos(x)}{y}\,\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x.$

Solutions de Claude Morin (Limoges), Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV, Paris), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Ce problème m'a semblé ardu. Les différentes solutions reçues sont assez techniques. Voici par exemple celle de Claude Morin. On commence par un lemme, utile pour la suite.

Lemme – Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Alors

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(ay)-\cos(by)}{y}\,\mathrm{d}y=\ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right).$$

Preuve – Par parité de l'application cos, on peut supposer $a, b \in \mathbb{R}_+^*$. Pour $0 < \varepsilon < \mathrm{M}$, on pose

$$\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{M}) = \int_\varepsilon^{\mathrm{M}} \frac{\cos(ay)-\cos(by)}{y}\,\mathrm{d}y = \int_\varepsilon^{\mathrm{M}} \frac{\cos(ay)}{y}\,\mathrm{d}y - \int_\varepsilon^{\mathrm{M}} \frac{\cos(by)}{y}\,\mathrm{d}y.$$

On pose $x = ay$ dans la première intégrale et $x = by$ dans la seconde

$$\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{M}) = \int_{a\varepsilon}^{a\mathrm{M}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{b\varepsilon}^{b\mathrm{M}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x,$$

soit, par Chasles,

$$\mathrm{I}(\varepsilon,\mathrm{M}) = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \int_{a\mathrm{M}}^{b\mathrm{M}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x. \qquad (2)$$

Une intégration par parties montre que la seconde intégrale tend vers 0 quand M tend vers $+\infty$:

$$\int_{a\mathrm{M}}^{b\mathrm{M}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\sin(x)}{x}\right]_{a\mathrm{M}}^{b\mathrm{M}} + \int_{a\mathrm{M}}^{b\mathrm{M}} \frac{\sin(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x,$$

donc

$$\left|\int_{a\mathrm{M}}^{b\mathrm{M}} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x\right| \leq \frac{1}{a\mathrm{M}} + \frac{1}{b\mathrm{M}} + \frac{|b-a|\mathrm{M}}{\min(a,b)^2\,\mathrm{M}^2} = o\left(\frac{1}{\mathrm{M}}\right).$$

On montre maintenant que la première intégrale dans la relation (2) converge vers $\ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)$. Pour cela, on introduit l'application

$$\varphi : x \in \mathbb{R}^* \mapsto \frac{\cos(x)-1}{x}.$$

Cette application se prolonge par 0 en 0, est continue sur $\mathbb{R}$ et bornée, disons par $\mathrm{K} > 0$. Donc

$$\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \left(\frac{1}{x} + \varphi(x)\right)\mathrm{d}x = \ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right) + \int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \varphi(x)\,\mathrm{d}x.$$

Ainsi,

$$\left|\int_{a\varepsilon}^{b\varepsilon} \frac{\cos(x)}{x}\,\mathrm{d}x - \ln\left(\left|\frac{b}{a}\right|\right)\right| \leq \mathrm{K}\,\varepsilon\,|b-a|.$$

ce qui permet de conclure.

Venons-en à la question posée. Pour $0 < y < x$,

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x-y)-\cos(x)}{y} &= \frac{\cos x\cos y+\sin x\sin y-\cos x}{y}\\ &= \cos x\,\varphi(y)+\sin(x)\frac{\sin(y)}{y}.\end{aligned}$$

Cette fonction de y est continue en zéro donc intégrable sur $[0, x]$. Donc pour $x > 0$,

$$\int_0^x \frac{\cos(x-y)-\cos(x)}{y}\mathrm{d}y=\cos(x)\,f(x)+\sin(x)\int_0^x\frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y.$$

où f est la primitive de φ nulle en zéro :

$$f(x)=\int_0^x\frac{\cos(y)-1}{y}\mathrm{d}y.$$

Pour trouver la valeur et justifier l'existence de

$$\mathrm{I}=\int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\left(\int_0^x\frac{\cos(x-y)-\cos(x)}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

il suffit de le faire pour

$$\mathrm{I}_1=\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}\left(\int_0^x\frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x \ \text{ et } \ \mathrm{I}_2=\int_0^{+\infty}\frac{\cos(x)}{x}f(x)\,\mathrm{d}x$$

auquel cas $\mathrm{I} = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2$. Pour I_1, c'est facile :

$$\mathrm{I}_1=\left[\frac{1}{2}\left(\int_0^x\frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y\right)^2\right]_0^{+\infty}=\frac{\pi^2}{8}$$

puisque, classiquement, $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(y)}{y}\mathrm{d}y=\frac{\pi}{2}$.

Pour I_2, on intègre par parties. Ceci est légitime car

$$f(x)\underset{x\to0}{\sim}\frac{x^2}{4} \tag{3}$$

et

$$f(x)=\int_0^1\frac{\cos(y)-1}{y}\mathrm{d}y+\int_1^x\frac{\cos(y)}{y}\mathrm{d}y-\ln(x)\underset{x\to+\infty}{\sim}-\ln(x). \tag{4}$$

Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{I}_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{x} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{\sin(x)}{x} f(x)\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} f(x)\,\mathrm{d}x - \left[\frac{\sin(x)(1-\cos(x))}{x}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)-\cos(2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

Les différents crochets sont nuls. Le lemme permet de calculer la dernière intégrale. Donc

$$\mathrm{I}_2 = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x^2} f(x)\,\mathrm{d}x + \ln 2. \tag{5}$$

Pour conclure, on définit, pour $x \geq 0$,

$$\mathrm{F}(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} f(tx)\,\mathrm{d}t.$$

Il reste à calculer F(1). Facilement, F(0) = 0. L'application F est continue sur [0, 1].

En effet, les équivalents (3) et (4) montrent que l'expression $\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}$ est bornée sur $[0, +\infty[$, disons par $\mathrm{C} > 0$ donc pour $x \in [0, 1]$,

$$\left|\frac{\sin(t) f(tx)}{t^2}\right| \leq \mathrm{C}\frac{|\sin(t)|}{t^{3/2}}$$

qui est intégrable sur $[0, +\infty[$ et le théorème de convergence dominée assure la continuité. De plus, l'application F est C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour $x > 0$,

$$\mathrm{F}'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} f'(tx)\,\mathrm{d}t == \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)(\cos(tx)-1)}{t^2 x}\mathrm{d}t.$$

En effet, le théorème de Leibniz s'applique car pour $0 < a \leq x \leq b$,

$$\left|\frac{\sin(t)(\cos(tx)-1)}{t^2 x}\right| \leq \frac{2}{at^2}$$

qui est intégrable sur $[1, +\infty[$ et

$$\left|\frac{\sin(t)(\cos(tx)-1)}{t^2 x}\right| \leq |x| \leq b$$

qui est intégrable sur]0, 1].

Intégrons par parties :

$$
\begin{aligned}
x\mathrm{F}'(x) &= \left[\frac{\sin(t)\left(\cos(tx)-1\right)}{t}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \frac{1}{t}\left(\cos(t)\cos(tx) - \cos(t) - x\sin(t)\sin(tx)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t}\Big(\cos\big((1+x)t\big) + \cos\big((1-x)t\big) - 2\cos(t) + x\cos\big((1+x)t\big) - x\cos\big((1-x)t\big)\Big)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{2t}\Big((1+x)\cos\big((1+x)t\big) - \cos(t) + (1-x)\cos\big((1-x)t\big) - \cos(t)\Big)\mathrm{d}t.
\end{aligned}
$$

Le lemme permet de nouveau de calculer ces intégrales pour $|x| < 1$:

$$
x\mathrm{F}'(x) = -\frac{1+x}{2}\ln(1+x) - \in \frac{1-x}{2}\ln(1-x).
$$

Ainsi, $x\mathrm{F}'(x)$ est donc la partie paire de $-\frac{1+x}{2}\ln(1+x)$:

$$
x\mathrm{F}'(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n} - \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1}.
$$

En regroupant les termes, il y a convergence normale sur [0, 1], donc

$$
\mathrm{F}(1) = \int_0^1 \left(\sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n} - \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n}}{2n-1} \right)\mathrm{d}x = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n)^2} - \sum_{n\geq 1} \frac{1}{(2n-1)(2n)},
$$

soit encore

$$
\mathrm{F}(1) = \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}\right) = \frac{1}{4}\zeta(2) - \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \frac{\pi^2}{24} - \ln(2).
$$

D'après la relation (5),

$$
\mathrm{I}_2 = \ln(2) + \mathrm{F}(1) = \frac{1}{4}\zeta(2) = \frac{\pi^2}{24}.
$$

Finalement,

$$
\mathrm{I} = \int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\left(\int_0^x \frac{\cos(x-y) - \cos(x)}{y}\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}x = \mathrm{I}_1 + \mathrm{I}_2 = \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi^2}{24} = \frac{\pi^2}{6}.
$$