

L'algorithme de la jeep

Philippe Langlois(*)

Introduction

C'est pendant la seconde guerre mondiale et juste après elle que, pressés ou inspirés par les militaires, les mathématiciens se sont mis à étudier systématiquement les problèmes de logistique dont l'ancêtre est « le chameau d'Alcuin », qui a fait l'objet d'un article⁽¹⁾ dans le Bulletin n° 511.

Pour que les jeeps et les chars puissent traverser le désert sans tomber en panne sèche, comment placer les relais de ravitaillement et quelles quantités de carburant prévoir ?

Ce « problème de la jeep », qui constitue un excellent exemple d'algorithme à la fois non trivial et non lié au calcul sur ordinateur, a été résolu⁽²⁾ par l'Américain Nathan Fine en 1946.

1. Mise en place des données

Le problème

On donne un point A muni d'une réserve d'essence, une piste qui, partant de A, traverse un désert et une jeep qui ne peut emporter qu'une quantité donnée de carburant, mais peut en déposer à des points relais choisis pour en récupérer lors d'un trajet ultérieur. Deux questions :

- 1) Avec la réserve de carburant dont on dispose en A, jusqu'où peut-on aller sur la piste ?
- 2) Pour atteindre un point situé à une distance donnée, combien de carburant faut-il avoir en A ?

La suite de l'article est consacrée à la première question, plus facile à traiter directement. Mais si on sait la résoudre pour une réserve de carburant r quelconque placée en A, c'est-à-dire déterminer la plus grande distance accessible d sous forme $d = f(r)$, la fonction f étant croissante, la solution de la seconde question, carburant r nécessaire pour aller jusqu'à la distance d , est manifestement donnée par $r = f^{-1}(d)$.

Conventions

La piste sur laquelle se fait le trajet est représentée par une demi-droite issue du point de départ A. On suppose pouvoir créer sur le parcours des points relais où déposer du carburant ; au départ ces relais sont vides.

Il est commode de faire les conventions suivantes :

- ♦ on choisit pour unité de carburant (UK) la quantité maximum de carburant que le véhicule peut transporter (réservoir + bidons) ;

(*) philippe.r.langlois@gmail.com

(1) « Les trois voyages du chameau », de Philippe Langlois.

(2) « The Jeep Problem », *American Mathematical Monthly* n° 54, pages 24-31, 1947.

♦ on choisit pour unité de distance (UL) la longueur du parcours que le véhicule peut faire avec 1UK de carburant (on admet que la consommation par unité de distance est une constante, indépendante en particulier de la charge du véhicule) ; ainsi un trajet de q UL consommera q UK.

Dans l'étude qui suit on sous-entendra souvent les notations UK et UL : un même nombre sans indication d'unité mesurera le chemin parcouru et la consommation correspondante.

2. Traversée avec 2UK

Énoncé

On dispose de 2UK situées en un lieu A. On veut, partant de A, aller aussi loin que possible (sans retour) sur une piste donnée. Comment faire ? Quelle distance peut-on atteindre ?

Solution

On fait deux voyages.

♦ Le premier est un aller-retour permettant de déposer du carburant en un point C situé sur la piste à une distance de A égale à x . Au cours du premier voyage on consomme x à l'aller et autant au retour. Il faut donc prendre $x \leq \frac{1}{2}$. On dépose alors $(1 - 2x)$ en C.

♦ Au cours du second voyage, on arrive en C avec $(1 - x)$ et on y trouve $(1 - 2x)$. On dispose donc en tout d'une quantité de carburant de $(2 - 3x)$.

a) Ou bien $2 - 3x \geq 1$, soit $x \leq \frac{1}{3}$, et on repart avec une quantité de carburant égale à 1.

b) Ou bien $2 - 3x \leq 1$, soit $x \geq \frac{1}{3}$, et on repart avec une quantité de carburant égale à $(2 - 3x)$.

♦ Si $x \leq \frac{1}{3}$, on fait à partir C de un trajet de longueur 1 pour arriver à la distance $(1 + x)$ de A.

♦ Si $x \geq \frac{1}{3}$, on fait à partir de C un trajet de longueur $(2 - 3x)$ pour arriver à la distance $(2 - 2x)$.

On a donc à chercher le maximum d'une fonction $x \rightarrow d(x)$ affine par morceaux. Le tableau de variation montre l'existence d'un maximum pour

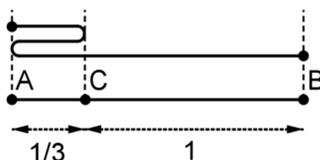
$$x = \frac{1}{3}.$$

x	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
$d(x)$	$1 + x$	$2 - 2x$	
$d(x)$	1	\nearrow $\frac{4}{3}$ \searrow 1	1

On voit donc qu'en créant un relais à la distance $\frac{1}{3}$ UL on peut atteindre la distance $\frac{4}{3}$ UL.

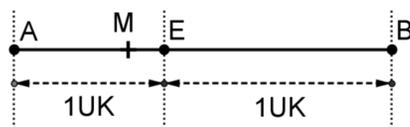
Commentaire

On vient de trouver un algorithme, qu'on appellera V_2 , représenté par le schéma ci-contre. Partant de A, on fait un aller-retour suivi d'un aller simple jusqu'en C où l'on apporte 1UK (en deux fois : $\frac{1}{3}$ puis $\frac{2}{3}$), qui permet ensuite d'aller de C en B. On a donc ramené, en utilisant un point relais bien choisi, le cas $n = 2$ au cas $n = 1$, n désignant le nombre d'unités de carburant disponibles en A.



L'algorithme V_2 est optimal

Considérons un trajet où, parti de A, on arrive en un point B après avoir épuisé 2UK de carburant. On appelle le point E tel que sur [AE] et donc aussi sur [EB] on ait consommé exactement 1UK. Soit M un point de [AE]. D'après la définition même de E, sur [MB] la jeep consomme plus de 1UK. *Puisqu'elle ne peut emporter plus de 1UK à la fois, elle passe au moins deux fois en M dans le sens aller*, ce qui implique qu'elle y passe au moins une fois dans le sens retour, donc au moins trois fois en tout. Sa consommation sur [AE] est



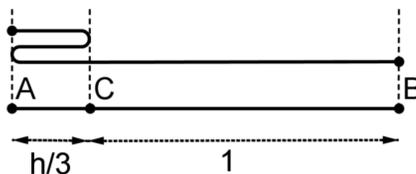
donc au moins $3AE$, donc $AE \leq \frac{1}{3}$; sur [EB] la consommation est 1, donc $EB \leq 1$.

Au total $AB \leq 1 + \frac{1}{3}$. L'algorithme est donc bien optimal.

Il est même strictement optimal, car pour avoir $AB = 1 + \frac{1}{3}$ il nous faut $AE = \frac{1}{3}$ et $EB = 1$.

Traversée avec $(1 + h)UK$, où $0 < h < 1$

On reprend la même méthode : partant de A, faire un aller-retour suivi d'un aller simple jusqu'en un point C où l'on apportera 1 UK, permettant ensuite d'aller de C en B. Sur les trois trajets entre A et C, on peut consommer en tout h UK, donc



$\frac{h}{3}$ sur chacun.

Il faut donc prendre $AC = \frac{h}{3}$. Décomposons le trajet : au premier aller on part de A

avec 1, on dépose $1 - \frac{2h}{3}$ en C, on rentre à vide en A, dont on repart avec h UK ; on arrive en C avec $\frac{2h}{3}$; on y trouve $1 - \frac{2h}{3}$, ce qui permet de repartir avec 1UK et d'aller jusqu'à la distance $AB = 1 + \frac{h}{3}$.

Observons que la formule reste valable pour $h = 0$ et $h = 1$: l'algorithme ainsi étendu réalise donc une interpolation linéaire entre les cas $n = 1$ et $n = 2$.

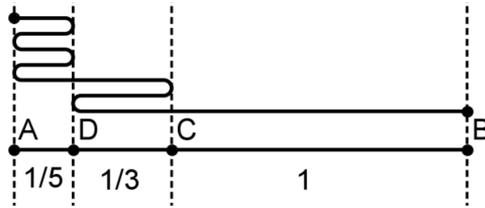
3. Traversée avec 3UK

Énoncé

On dispose de 3UK situées en un lieu A. On veut en partant de A aller aussi loin que possible (sans retour) sur une piste donnée. Comment faire ? Quelle distance peut-on atteindre ?

Algorithme pour $n = 3$

On exploite la même idée qu'au § 2 : faire d'abord des allers-retours (suivis forcément d'un aller simple) pour arriver avec 2UK en un point D et appliquer ensuite l'algorithme trouvé pour $n = 2$.



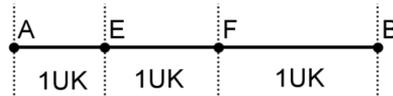
Posons $AD = x$ et soit p le nombre d'allers-retours. On veut donc dépenser 1UK en

$(2p + 1)$ trajets de longueur x , ce qui se traduit par $x = \frac{1}{2p+1}$. Chaque aller-retour coûte $2x$ UK et permet donc d'en déposer $1 - 2x$; l'aller simple final permet, lui, de déposer $1 - x$.

Le dépôt total en D est $p(1 - 2x) + (1 - x) = p + 1 - (2p + 1)x$, soit p UK. Il nous faut donc $p = 2$ dont on tire $x = \frac{1}{5}$. Le trajet de la jeep est représenté ci-dessus.

L'algorithme V_3 est optimal

Considérons un trajet où, parti de A, on arrive en un point B après avoir épuisé 3UK de carburant. On appelle le point E tel que sur [AE] on ait consommé exactement 1UK, F le point tel que sur [EF] on ait consommé exactement 1UK ; sur [FB] la consommation a donc été aussi de 1UK.



On raisonne comme on a fait pour V_2 .

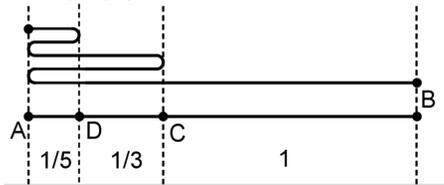
Soit M un point de [AE[. D'après la définition même de E, sur]MB] la jeep consomme plus de 2UK. Puisqu'elle ne peut emporter plus de 1UK à la fois, elle passe au moins trois fois en M dans le sens aller, ce qui implique qu'elle y passe au

moins deux fois dans le sens retour, donc au moins cinq fois en tout. Sa consommation sur [AE] est donc au moins $5AE$, donc $AE \leq \frac{1}{5}$. Soit maintenant un point N de [EF] ; *puisque'elle ne peut emporter plus de 1HK à la fois, la jeep passe au moins deux fois en N dans le sens aller, donc au moins une fois dans le sens retour, donc au moins trois fois en tout. La consommation sur [EF] est donc au moins $3EF$, donc $EF \leq \frac{1}{3}$. Sur [FB] la consommation est de 1, donc $FB \leq 1$. Au total $AB \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}$. L'algorithme V_3 est donc bien optimal.*

L'algorithme V_3 n'est pas strictement optimal

Nous avons établi que $AE \leq \frac{1}{5}$, $EF \leq \frac{1}{3}$, $FB \leq 1$. Pour maximiser la distance AB, il nous faut donc $AE = \frac{1}{5}$, $EF = \frac{1}{3}$, $FB \leq 1$, la jeep parcourant alors cinq fois [AE] (trois fois sens aller, deux fois sens retour), trois fois [EF] (deux fois sens aller, une fois sens retour), et une fois [FB] (aller simple).

Mais V_3 n'est pas le seul parcours respectant ces conditions. Il en existe un autre : le parcours W_3 présenté ci-contre⁽³⁾, qui ne s'écarte de V_3 que par l'ordre dans lequel sont effectués les morceaux du trajet. On notera qu'il est en un sens plus agréable que V_3 , car il ne comporte que deux retours en arrière au lieu de trois.



N.B. : On trouvera en annexes 1 et 2 le détail des consommations lors des parcours V_3 et W_3 .

Traversée avec $(2 + h)UK$, où $0 < h < 1$

La même méthode que celle utilisée pour $(1 + h)UK$ amène à prendre un point D tel que $AD = \frac{h}{5}$. On fait deux allers-retours entre A et D (à chacun on emporte 1, on dépose $1 - \frac{2h}{5}$, on revient à vide) suivis d'un aller simple (on emporte h, on consomme $\frac{h}{5}$, on arrive avec $\frac{4h}{5}$) ; on peut donc repartir de D avec $2UK$ et appliquer l'algorithme décrit pour $n = 2$.

Cela permet d'obtenir un trajet $AB = 1 + \frac{1}{3} + \frac{h}{5}$. Là encore l'algorithme réalise une

(3) Le lecteur pourra, en se reportant au § 3.3 de l'article cité dans l'introduction, constater que le problème de la jeep pour $n = 3$ et le problème du « chameau vorace » n'en font qu'un : seuls les habillages sont différents.

interpolation linéaire, entre les cas $n = 2$ et $n = 3$ cette fois.

4. Algorithme pour n entier quelconque

Construction par récurrence

En supposant connu un algorithme V_{n-1} valable pour un départ avec une réserve de $(n - 1)$ UK, essayons d'en déduire un algorithme pour la valeur n . On calque la méthode sur celle utilisée pour passer de $n = 2$ à $n = 3$.

On part d'un point A_n ; on veut trouver un point A_{n-1} , situé à une distance x de A_n , où déposer $(n - 1)$ UK au prix d'une dépense de 1 UK. On repartira alors de A_{n-1} en appliquant V_{n-1} .

Faisons comme précédemment p allers-retours suivis d'un aller simple pendant chacun desquels on consomme x UK, ce qui donne là encore $x = \frac{1}{2p+1}$. Le dépôt total en A_{n-1} est de nouveau $p(1 - 2x) + (1 - x) = p + 1 - (2p + 1)x$, soit p , ce qui fait qu'il nous faut prendre $p = n - 1$ et donc $x = \frac{1}{2n-1}$.

Description de l'algorithme

On peut alors en déduire immédiatement l'algorithme V_n suivant, valable pour tout n :

Une réserve de n UK en A_n permet d'atteindre une distance

$$A_n A_0 = \delta(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}$$

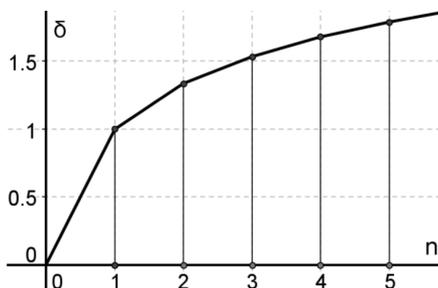
en utilisant des relais A_j se succédant dans l'ordre des j décroissants et tels que pour

tout j vérifiant $1 \leq j \leq n$, $A_j A_{j-1} = \frac{1}{2j-1}$. Le trajet consiste en des va-et-vient entre

A_n et A_{n-1} , puis des va-et-vient entre A_{n-1} et A_{n-2} , ... puis des va-et-vient entre A_2 et A_1 , enfin un aller simple de A_1 à A_0 . Le nombre de trajets entre A_j et A_{j-1} est de j dans le sens aller et $j - 1$ dans le sens retour. Entre deux points relais successifs, la consommation est de 1UK.

Extension au cas où n n'est pas entier

Posons $n = m + h$ avec m entier et $0 < h < 1$. Utilisons la méthode qui a servi dans les cas $m = 1$ et $m = 2$. Partant de A_n , on place un point A_m à la distance de A_n , de telle sorte que les m allers et $m - 1$ retours entre A_n et A_m , consommant en tout h UK, permettent de repartir de A_m avec m UK et donc d'utiliser V_m . On peut donc aller jusqu'à la distance



$$\delta(m+h) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2m-3} + \frac{1}{2m-1} + \frac{h}{2m+1}.$$

On observera que la formule reste valable si $h = 0$ ou $h = 1$ et qu'elle réalise une interpolation linéaire entre les cas $n = m$ et $n = m + 1$. La courbe représentant la fonction est donnée ci-dessus.

5. La qualité de l'algorithme V_n pour n entier

On montrera plus loin qu'on ne peut pas trouver mieux. Cet algorithme n'est pas enthousiasmant pour autant, comme la courbe ci-dessus le faisait pressentir. Pour une traversée de 2UL, le fait que

$$\delta(7) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} \approx 1,9551$$

montre qu'il faut prendre $2n - 1 = 15$, soit $n = 8$, autrement dit 8 fois ce qu'aurait exigé une traversée de 1UL.

Un encadrement de $\delta(n)$

Précisons un peu les choses : avec comme points de subdivision les entiers impairs, la méthode des trapèzes, appliquée à l'intégrale $I_n = \int_1^{2n+1} \frac{dx}{x}$, donne une valeur approchée par excès :

$$1 + 2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1} \right) + \frac{1}{2n+1} = I_n + \varepsilon_n = \ln(2n+1) + \varepsilon_n$$

où ε_n est l'erreur commise, évidemment positive. La distance accessible avec une réserve de nUK est $\delta(n)UK$, avec $\delta(n) = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-3} + \frac{1}{2n-1}$. On a donc

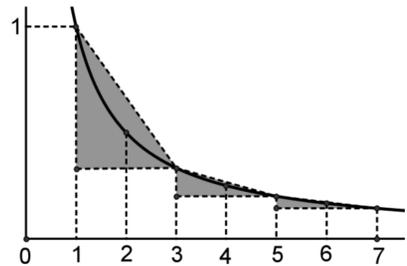
$$I_n = 2\delta(n) - 1 + \frac{1}{2n+1} - \varepsilon_n.$$

De $I_n = \ln(2n+1)$, on tire

$$\delta(n) = \frac{1}{2} \ln(2n+1) + \frac{1}{2} - \frac{1}{2(2n+1)} + \frac{1}{2} \varepsilon_n.$$

Or ε_n est l'aire d'une zone incluse dans la réunion des triangles hachurés sur la figure, de base 2, dont la somme des hauteurs est inférieure à 1, donc $\varepsilon_n < 1$. Au total :

$$\boxed{\frac{1}{2} \ln(2n+1) < \delta(n) < \frac{1}{2} \ln(2n+1) + 1.}$$



On aurait pu faire mieux, mais cela permet de voir :

- ♦ qu'avec assez de carburant au départ on peut aller aussi loin qu'on veut ;
- ♦ que la distance accessible avec une quantité donnée de carburant augmente en fonction logarithmique de cette quantité et qu'inversement, donc, la quantité de

carburant nécessaire pour aller à une distance donnée augmente exponentiellement en fonction de cette distance.

N.B. : Pour avoir une idée du comportement de la somme $\delta(n)$, on peut se passer d'intégrale en groupant par paquets les termes consécutifs : la somme

$u_k = \frac{1}{3^k+2} + \frac{1}{3^k+4} + \dots + \frac{1}{3^{k+1}}$ comporte 3^k termes, car $3^{k+1} = 3^k + 2 \times 3^k$ et ces

termes sont tous compris entre $\frac{1}{3^{k+1}}$ et $\frac{1}{3^k}$. On en tire $\frac{1}{3} \leq u_k \leq 1$, puis

$\frac{k}{3} \leq u_0 + u_1 + \dots + u_{k-1} \leq k$, d'où $1 + \frac{k}{3} \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{3^k} \leq 1 + k$. Cela permet de justifier que $\delta(n)$ peut être rendu aussi grand que l'on veut, mais augmente très lentement.

Une estimation asymptotique

Nous supposons connue la formule suivante :

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \ln(n) + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right),$$

où γ désigne la constante d'Euler, soit environ 0,5772.

Alors :

$$\delta(n) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n}\right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right).$$

D'où :

$$\delta(n) = \ln(2n) + \gamma + \frac{1}{24n} + o\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{2} \left(\ln(n) + \gamma + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

et finalement

$$\boxed{\delta(n) = \frac{1}{2} \ln(n) + \ln(2) + \frac{\gamma}{2} + \frac{1}{12n} + o\left(\frac{1}{n}\right)}$$

Exemple : la formule ci-dessus donne pour $\delta(7)$ la valeur approchée 1,9547 très raisonnablement proche de celle qu'on obtient par calcul direct, qui est 1,9551.

6. L'algorithme V_n est optimal

Le problème

On suppose que la jeep part d'un point A de la piste où est entreposée une réserve de carburant de nUK , n étant un entier, et qu'elle finit son parcours en un point B situé à la distance d de A. Il s'agit de démontrer l'inégalité :

$$d \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1}$$

Le raisonnement a été rodé sur les premières valeurs de n .

Dans le cas $n = 1$, le mieux qu'on puisse faire est évidemment, partant de A , de continuer tout droit jusqu'à épuisement (algorithme V_1). On a déjà montré aux paragraphes 2 et 3 que V_2 et V_3 sont optimaux, en faisant sur le chemin parcouru un découpage en tranches sur lesquelles la consommation est de 1UK. Cette technique va être étendue au cas général.

Un découpage auxiliaire

Découpons donc $[AB]$ en allant de A vers B par des points E_j , avec $E_n = A$ et $E_0 = B$, chacun des E_j étant tel que sur le segment de piste $[E_{j+1}E_j]$ où $0 \leq j \leq n - 1$, la jeep consomme exactement 1UK.

Il en résulte que sur $[E_jE_0]$ elle consomme en tout j UK dans ses trajets d'aller ou de retour.

V_n est optimal

Prenons un point M situé sur $[E_{j+1}E_j]$. D'après la définition même de E_j , sur $[ME_0]$ la jeep consomme plus de j UK. Puisqu'elle ne peut emporter plus de 1UK à la fois, elle passe au moins $(j + 1)$ fois en M dans le sens aller, ce qui implique qu'elle y passe au moins j fois dans le sens retour, donc au moins $(2j + 1)$ fois en tout. On en déduit que la consommation sur $[E_{j+1}E_j]$ est au moins égale à $(2j + 1)E_{j+1}E_j$.

Mais la consommation totale sur $[E_{j+1}E_j]$ est 1. Il en résulte

$$E_{j+1}E_j \leq \frac{1}{2j+1} \quad (1)$$

et par suite d , distance entre les deux points extrêmes (soit $AB = \sum E_{j+1}E_j$), vérifie bien :

$$d \leq 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \quad (2)$$

La distance maximale que l'on puisse atteindre est celle que l'on obtient en suivant V_n .

Pour $n \geq 3$, l'algorithme V_n n'est pas strictement optimal

◆ Pour avoir l'égalité dans (2) il faut avoir, pour tout j tel que $0 \leq j \leq n - 1$, l'égalité dans (1). Autrement dit, le découpage doit être formé des mêmes points relais que pour V_n . *Ce découpage est donc strictement optimal.* En outre, pour un tel découpage, le nombre d'allers et de retours entre E_{j+1} et E_j est $2j + 1$, donc le même que pour V_n .

◆ En revanche, on peut faire sur le modèle V_n certaines permutations de voyages sans perdre le caractère optimal. En particulier, on voit immédiatement qu'en remplaçant dans V_n la partie V_3 (correspondant au trajet entre E_3 et E_0) par W_3 (cf. § 3), on obtient encore un algorithme optimal.

Conclusion

Cet algorithme de la jeep, par cela même qu'il est issu d'un problème pratique *a priori* non numérique, peut aider les élèves à prendre conscience d'un fait souvent quelque peu négligé : l'algorithmique n'est pas seulement un outil de l'informatique, mais une discipline à part entière.

Il a un autre mérite : il présente un exemple d'algorithme dont, et ce n'est pas si courant, on peut discuter sans trop de mal et assez à fond l'optimalité et le coût.

Appendice : Une variante du problème

Dans ce qui précède a été étudiée la « traversée du désert » : la jeep effectue un aller simple et s'arrête après avoir épuisé son carburant. Mais on peut aussi se poser le problème d'un aller-retour : « l'exploration du désert ». Ce problème (également résolu par Nathan Fine dans le même article) est un peu plus délicat car la jeep peut, aux points relais choisis, se ravitailler à l'aller et au retour.

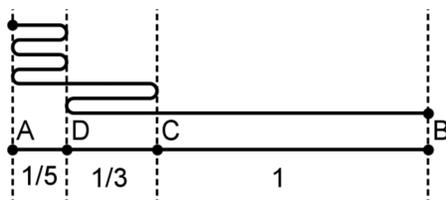
Il peut être formulé en termes militaires : quelle organisation mettre en place pour que les bombardiers puissent aller arroser des territoires situés à l'autre bout du monde et rentrer ensuite à leur base ? Il s'agit bien cette fois d'un aller-retour : il est en effet assez rare qu'un bombardier ait envie d'atterrir à l'endroit où il vient de larguer sa cargaison.

Référence

L'article de David Gale, « The jeep once more or jeeper by the dozen » (*American Mathematical Monthly*, mai 1970), accessible sur Internet, traite de façon (relativement) simple le problème de la traversée du désert, celui de l'exploration du désert et celui d'une traversée par plusieurs jeeps dont au moins une doit arriver au but.

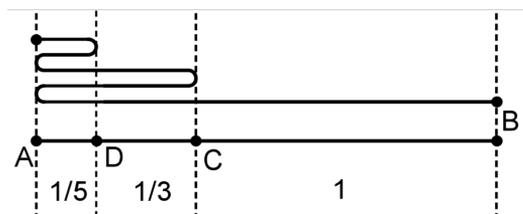
Je remercie vivement Bernard Langer, qui a conçu et réalisé les deux annexes qui suivent.

Annexe 1 : Le parcours V_3



Trajet	Carburant Disponible en A	Conso. Sur [AD]	Carburant Disponible en D	Conso. Sur [DC]	Carburant Disponible en C	Conso. Sur [CB]	Carburant Disponible en B
	3		0		0		0
$A \rightarrow D$	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$		0		0
$D \rightarrow A$	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$		0		0
$A \rightarrow D$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$		0		0
$D \rightarrow A$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5}$		0		0
$A \rightarrow D$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{6}{5} + \frac{4}{5} = 2$		0		0
$D \rightarrow C$	0		1	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		0
$C \rightarrow D$	0		1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0
$D \rightarrow C$	0		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$		0
$C \rightarrow B$	0		0		0	1	0

Les cases grisées indiquent la position de la Jeep en fin d'étape.

Annexe 2 : Le parcours W_3 

Trajet	Carburant Disponible en A	Conso. Sur [AD]	Carburant Disponible en D	Conso. Sur [DC]	Carburant Disponible en C	Conso. Sur [CB]	Carburant Disponible en B
	3		0		0		0
$A \rightarrow D$	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$		0		0
$D \rightarrow A$	2	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$		0		0
$A \rightarrow D$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5} + \frac{4}{5} = \frac{7}{5}$		0		0
$D \rightarrow C$	1		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$		0
$C \rightarrow D$	1		$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$		0
$D \rightarrow A$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{3}$		0
$A \rightarrow D$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5} + \frac{4}{5} = 1$		$\frac{1}{3}$		0
$D \rightarrow C$	0		0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$		0
$C \rightarrow B$	0		0		0	1	0

Les cases grisées indiquent la position de la Jeep en fin d'étape.