Rapport sur les olympiades académiques de mathématiques 2014

Charles Torossian et Paul-Louis Hennequin

Depuis leur création en 2001, les annales de ces olympiades ont été publiées par l'APMEP sous forme de brochures qui ont fait l'objet d'une recension (en particulier d'Henri Bareil) dans le Bulletin et de rapports publiés par la DGESCO sur le site du MEN. Le rapport 2014 figure dans la brochure n° 1005 sur le site de l'APMEP et nous en reproduisons ici de larges extraits auxquels nous joignons quelques exemples de sujets.

Principes et origines

Les Olympiades académiques de mathématiques ont été créées en 2001, en direction des élèves des classes de premières scientifiques des lycées, dans le but de favoriser l'émergence d'une nouvelle culture scientifique et technologique. Les problèmes proposés doivent conduire à développer chez les élèves le sens de l'initiative, le goût de la recherche et le plaisir de faire des mathématiques. Sa dimension académique doit favoriser les relations entre les professeurs d'une même académie et les corps d'inspection, tout en stimulant la création de clubs et d'ateliers mathématiques au sein des lycées. À partir de l'année 2005, un nouveau texte réglementaire est venu apporter quelques infléchissements aux dispositions initiales ; en particulier, les Olympiades de mathématiques concernent désormais toutes les séries et s'adressent donc à toutes les lycéennes et tous les lycéens scolarisés en classe de première.
Depuis 2011, les Olympiades ont été étendues avec succès à tout le réseau des lycées français à l'étranger.

Les Olympiades permettent l'éclosion des talents, et valorisent l'image des mathématiques auprès des jeunes. Elles encouragent une préparation transversale parfaitement compatible avec l'accompagnement personnalisé.

Organisation

Le dispositif comprend un groupe national présidé par un inspecteur général et dans chaque académie une cellule présidée par un responsable désigné par le Recteur, en liaison avec l'Inspection générale.
L'épreuve s'est déroulée le mercredi 19 mars 2014 de 8h à 12h en métropole, les horaires étant décalés pour les académies lointaines ou dans certains lycées de l'étranger. Cette date fut l'un des temps forts de la troisième édition de la semaine des Mathématiques qui s'est déroulée du 17 au 21 mars 2014.

Participation

Cette quatorzième édition des Olympiades a confirmé la popularité de ce concours.

(*) charles.torossian@education.gouv.fr ; paul-louis.hennequin@univ-brcclermont.fr

On a compté cette année 23 996 inscrits et 21 284 présents, soit une hausse, par rapport à 2013, de 21,8 % pour les inscrits et 22,8% pour les présents.
C'est la première fois que la barre des 20000 est franchie.
Les jeunes filles représentent **38,3**% des participants (37,6 % pour la série S). Cette proportion est en progression par rapport à l'an passé : 36% en 2013 (36% aussi dans la série S) et 33% en 2012 (32,1% dans la série S), mais reste encore très éloignée de la proportion de filles que l'on trouve en sections scientifiques par exemple (près de 50%).
L'ouverture internationale des Olympiades aux lycées français ou d'enseignement français de l'étranger est maintenant bien ancrée dans le réseau de l'AEFE.
Par ailleurs, la seconde édition des Olympiades académiques dans le vice-rectorat de la Nouvelle Calédonie a nécessité une adaptation due au décalage de calendrier scolaire; c'est ainsi que les épreuves ont eu lieu cette année le 25 septembre 2013 de 7h30 à 11h30. Les Olympiades auront lieu fin septembre 2014 en Nouvelle Calédonie pour leur troisième édition. Le jury national fournit deux sujets spécifiques, complétés par deux exercices locaux.
Au total 150 lycées dans 70 pays ont fait composer des candidats ; on a compté 3155 inscrits et 2553 présents.

Lauréats

Les copies sont corrigées par les cellules académiques.
À l'issue des corrections et sous la responsabilité de l'IA–IPR chargé du concours académique, chaque jury académique établit son propre palmarès.
Les meilleures copies sont transmises au jury national qui les a examinées le 12 mai 2014 (137 copies cette année dont 48 de l'étranger, validées par l'académie partenaire). Chaque copie est accompagnée d'une fiche synthétique résumant les qualités remarquées en académie. Cette fiche académique est un outil particulièrement utile pour le jury national et doit être remplie par les correcteurs académiques avec précision (identité et sexe du candidat, lycée d'origine, appréciations détaillées sur les quatre exercices).
Le jury national, après examen de chaque copie, établit un palmarès qui s'appuie sur l'analyse des appréciations académiques et sur la qualité de la résolution des exercices nationaux. La performance sur les sujets académiques est prise en compte.
Le palmarès compte cette année **trente-deux lauréats**.
Ont été distingués **25 élèves de la série S, 1 en série STI2D, 1 en série STL, 5 en série ES**.

Remise des prix

La cérémonie de remise des prix est marquée par la volonté de faire découvrir aux jeunes l'univers passionnant, international et vivant des mathématiques et de leurs applications, par des conférences et des rencontres avec des mathématiciens ou des utilisateurs de mathématiques exceptionnels.

Les sujets

L'épreuve, d'une durée de quatre heures, propose aux élèves quatre exercices : deux

exercices sélectionnés (en fonction de la grande zone géographique) par le jury national parmi les propositions des académies, et deux exercices choisis par chaque cellule académique. Le caractère national est explicitement indiqué sur les sujets proposés. Ce sont environ **60 exercices**, fort intéressants, souvent originaux et d'une grande richesse, qui ont été élaborés, avec le souci de **privilégier le raisonnement, le sens de l'initiative, le goût de la recherche et le plaisir de trouver**. Remarquons que certaines thématiques manquent encore, comme l'algorithmique, mais que les probabilités ont bien trouvé leur place dans les propositions.
Le jury souhaite cependant que les exercices nationaux restent communs à l'ensemble des séries : il veille donc à ce que les connaissances nécessaires à leur résolution soient communes à tous les programmes de première et que le niveau de difficulté des premières questions reste accessible à tous.
L'intégralité des sujets (nationaux et académiques) avec leurs corrigés, classés par thèmes, sont disponibles librement sur le site de l'APMEP, et ce depuis 2010 (l'intégralité des annales des années antérieures ne sont disponibles qu'en version papier).

Évolutions

Le principe d'avoir une partie de l'épreuve commune à tout le territoire et une partie conçue au niveau académique nous semble devoir être maintenu. Il est cependant envisageable que les académies se coordonnent pour proposer des sujets en commun. Une seule académie a choisi cette option cette année, mais nous espérons que cela se développera dans l'avenir.
L'épreuve des Olympiades constitue un temps fort en lien avec *la semaine des Mathématiques*, consacrée cette année aux « Mathématiques au carrefour des cultures ». Son déroulement dans les établissements doit donc être l'occasion de mettre en synergie l'ensemble des actions de promotion des mathématiques.
La participation en dehors de la série S reste trop modeste ; les Olympiades de première ne doivent pas être assimilées à un petit concours général et se fondent sur un corpus de connaissances issu essentiellement de la classe de seconde (par exemple il n'y a pas de fonction dérivée dans les énoncés). La réforme de la voie technologique aurait dû permettre une ouverture plus franche des Olympiades aux élèves des séries STI2D, ce n'est pas le cas. Nous souhaitons que les établissements concernés encouragent la participation massive des élèves de premières technologiques : les Olympiades de mathématiques sont ouvertes à tous et à toutes. En revanche la participation des élèves issues des classes ES est tout à fait satisfaisante.

Conclusion

Ces actions visent aussi à susciter des vocations scientifiques auprès des jeunes qui ont déjà montré de l'intérêt, du talent pour les mathématiques, mais surtout de la motivation et qui ont plaisir à faire des mathématiques. On ne peut, à nouveau, que se réjouir du succès confirmé de ces Olympiades de mathématiques, et de ses répercussions :

– d'abord en direction des élèves : bien que difficile à évaluer, le fait d'avoir eu plaisir à faire des mathématiques et à réfléchir sur des problèmes motivants pendant quatre heures est sans doute un élément influant lorsqu'un jeune opère des choix pour son avenir;

– en direction des professeurs et des établissements : la préparation et l'organisation d'une telle épreuve sont un vecteur d'émulation collective et mettent à l'honneur les mathématiques, notamment dans le contexte porteur de la semaine des mathématiques. C'est l'occasion de mettre les mathématiques à l'honneur dans les établissements, de manière visible et centrale.

– au niveau académique : la dynamique ainsi lancée, le travail mené, la production d'exercices originaux adaptés à une telle épreuve ne peuvent qu'avoir des retombées positives et enrichissantes dans chaque académie. Les remises de prix académiques, sous le patronage des recteurs, sont, au-delà de leurs aspects conviviaux et festifs, l'occasion de rappeler l'importance des mathématiques dans une société numérisée et de créer un pont entre les lycées, le monde universitaire, la recherche et les entreprises investies dans l'utilisation des mathématiques.

– enfin au plan national : la publication d'annales sur différents sites Internet (Eduscol, Animath, APMEP) permet de diffuser les nombreuses idées originales émanant des académies dont une grande partie est largement exploitable dans les classes. Ces annales pourront être mieux utilisées pour l'accompagnement personnalisé dans les classes de premières dès la rentrée scolaire.

Des progrès restent à réaliser, en particulier sur le taux de participation des filles et des élèves issus des voies technologiques.

Quelques exemples de sujets

Chaque brochure annuelle comporte une grille qui permet à tous ceux qui souhaitent l'utiliser en classe de sélectionner un énoncé à partir de différents critères. Nous nous limitons ici aux 100 sujets de 2014. La comparaison des grilles met en évidence les évolutions liées aux programmes.

Domaine concerné (un même exercice peut en impliquer plusieurs)

28, en particulier Pacifique 3, les 4 de Nice et les 4 de Rouen, explicitent un **algorithme**, 34 sont d'**arithmétique** (tels National 1 et Guyane 3 ci-dessous), 112 de **numération**, 28 de **dénombrement** (tel Grenoble 1 ci-dessous), 7 de **logique** (tel Toulouse 4), 17 utilisent **inégalités et inéquations** (tel National 2), 9 introduisent des **suites** (tel Amiens 3) et 13 des **équations et fonctions** (tel Montpellier 3 ci-dessous). La **géométrie plane** est pratiquée dans 36 (tels Versailles 5 et Nancy-Metz 1 ci-dessous) et celle de l'**espace** dans 5 (tels Amiens 4 et Grenoble 2 ci-dessous). 14 (tels

Paris1 et Strasbourg 1 ci-dessous), calculent des **probabilités**.

Nombre de questions

Variant de 1 à 20, il met en évidence les textes courts qui, tels Amiens 4, Versailles 5, Montpellier 3 et Nancy-Metz 1 ci-dessous font une large place à la recherche des bons outils de résolution et ceux beaucoup plus longs, qui tels les sujets nationaux, Guyane 3, Grenoble 1 et 2 ci-dessous, ou encore Lille 1, présentent une situation et guident pas à pas la démarche qui conduit au résultat final.

Séries concernées

Quelques académies se limitent encore à deux sujets qui, comme les sujets nationaux, sont communs à toutes les sections de première. La grande majorité en proposent trois, l'un commun à tous, le second pour S et le troisième pour les autres ; seules deux académies offrent un texte spécifique aux sections techniques.
Le titre donné avec une pointe d'humour à chaque exercice permet de retrouver les grands classiques : jeu de Nim, suites de Fibonacci, puzzles, pavages, triplets pythagoriciens, … Il permet aussi de repérer les sujets qui, tels Grenoble 2 ci-dessous présentent une mathématisation réaliste d'une situation concrète.

Amiens

Deuxième exercice
Séries STI
Géométrie dans l'espace

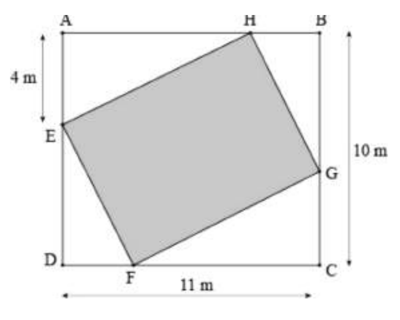
Le trou de la balle
Une balle flottait sur un lac lorsque celui-ci gela.
Sans rompre la glace, on a ôté la glace qui laissa un trou de 24 cm de diamètre et de 8 cm de profondeur.
Quel est le rayon de la balle ?

Versailles

Cinquième exercice
Séries STD2A, STI2D, STL
Géométrie plane

Les pieds dans le tapis

Un touriste a fait glisser le grand tapis rectangulaire du grand salon du château. Le tapis s'est retrouvé les coins contre les murs comme sur la figure ci-contre (qui représente la situation, non la réalité).
Le salon est rectangulaire.
Ses dimensions sont 11 m pour le côté [AB] et 10 m pour le côté [BC].



Un des coins du tapis s'est retrouvé exactement au bas de l'huisserie d'une porte, située à 4 m du point A du côté [AD].
Le tapis recouvre moins de la moitié de la surface du salon.
Quelles sont ses dimensions ?

Montpellier

Troisième exercice
Séries autres que S
Equations, fonctions

Piétons et scooter

Sur une route rectiligne, un scooter est en A et deux piétons sont en B.
Le scooter part de A vers B ; au même instant, les deux piétons partent de B à la même vitesse, mais en sens opposés.

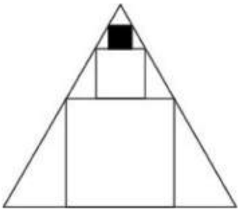
Le scooter croise le premier piéton en M et double le deuxième piéton en M'.
On sait que la vitesse du scooter est trois fois celle de chaque piéton et MM' = 6 km.
(Attention BM n'est pas égale à BM' !).
Calculer alors la distance AB.

Nancy – Metz

Premier exercice
Toutes séries
Géométrie plane

Empilements

On a tracé trois carrés à l'intérieur d'un triangle équilatéral, comme indiqué dans la figure ci-dessous.



Sachant que le côté du petit carré noir mesure 1 cm, quelle est la mesure du côté du triangle équilatéral ?

Paris

Premier exercice
Toutes séries

Probabilités

Le circuit

Des pièces d'un circuit sont dans une boîte. Il y a 4 lignes droites et 8 virages (quart de tour).

1. On prend une pièce au hasard dans la boîte.
   Quelle est la probabilité que cette pièce soit un virage ?
2. On prend une pièce au hasard dans la boîte, puis une deuxième (sans remettre la précédente dans la boîte).
   Quelle est la probabilité que ces deux pièces soient des virages ?
3. On prend au hasard successivement et sans remise quatre pièces dans la boîte.
   Quelle est la probabilité que ces quatre pièces soient des virages ?
4. Quelle est la probabilité que l'on puisse construire un circuit fermé à l'aide de six pièces prises au hasard et sans remise dans la boîte ?

Grenoble

Premier exercice
Toutes séries
Numération, dénombrement

Nombres olympiques et semi-olympiques

Un nombre naturel non-nul est *olympique* si l'écriture décimale $c_n c_{n-1} \ldots c_1 c_0$ (avec $c_n \in \{1,\ldots, 9\}$ et $c_i \in \{0,\ldots,9\}$ pour $i = 0,\ldots, n-1$) de

$$\mathrm{N} = c_n 10^n + c_{n-1} 10^{n-1} + \ldots + c_1 10 + c_0$$

vérifie les deux conditions suivantes :

- Si deux chiffres consécutifs c_i, $c_i - 1$ de (l'écriture décimale de) N sont tous les deux pairs, alors ils sont égaux.
  (On ne tiendra pas compte de zéros inutiles : 0000043 = 43 ne viole pas la condition !)
- Si deux chiffres consécutifs c_i, $c_i - 1$ de N sont tous deux impairs, alors ils sont différents.

Exemples : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont olympiques car ils n'ont qu'un chiffre et n'ont donc aucune condition à satisfaire ; 12345, 3157, 22501300 le sont également, 3112, 21664, 551429 ne le sont pas.

Un nombre naturel N non-nul est *semi-olympique* s'il satisfait au moins une des conditions ci-dessus.

Remarque : Tout nombre olympique est semi-olympique.

Exemples : 1324505, 449667729 sont semi-olympiques mais pas olympiques, 4677 n'est pas semi-olympique.

1. Déterminer le plus petit entier naturel impair qui n'est pas olympique.
2. Déterminer le plus petit entier naturel pair strictement positif qui n'est pas olympique.
3. Déterminer le plus petit entier strictement positif qui n'est pas semi-olympique.
4. Combien y-a-t-il ne nombres olympiques à deux chiffres (c'est-à-dire dans l'intervalle $[10, 99]$) ?

Notons P_n le nombre de nombres olympiques pairs à n chiffres (on convient qu'un nombre à n chiffres appartient à l'intervalle $[10^{n-1}, \ldots, 10^n - 1]$) et notons I_n le nombre de nombres olympiques impairs.

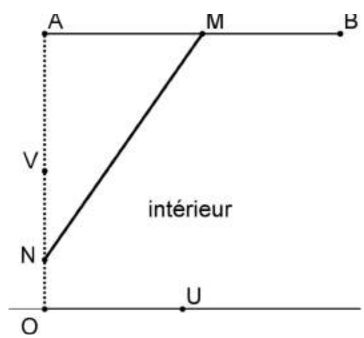
5. Déterminer P_2 et I_2.
6. Déterminer P_3 et I_3.
7. Combien y-a-t-il de nombres olympiques à 4 chiffres ?
8. Combien y-a-t-il de nombres semi-olympiques à 4 chiffres ?

Grenoble

Deuxième exercice
Série S
Inégalités, géométrie dans l'espace, probabilités

Portes basculantes

Les garages des immeubles récents sont équipés de portes basculantes qui permettent l'entrée dans les parties communes ainsi que dans les parties privées. (O, U, V) est un repère orthonormal, l'unité étant le mètre.



Partie A – Accès aux parties communes

Les portes permettant l'accès aux parties communes sont en général conçues de telle sorte qu'elles ne débordent pas sur la voie publique.
La porte étudiée a une hauteur de 2m. Sa partie supérieure peut être assimilée à un point mobile M se déplaçant sur le segment [AB], sa partie inférieure à un point mobile N situé sur le segment [AO].

1. Montrer que lorsque M décrit [AB], le milieu I de [MN] décrit un arc de cercle que l'on précisera.
2. On note x l'abscisse de M dans le repère (O, U, V). Exprimer l'ordonnée y de N en fonction de x.
3. a) Calculer en fonction de x les coordonnées du milieu J de [NI].
   b) Tracer dans un repère orthonormal, avec soin, la courbe décrite par le point J lorsque M décrit [AB].

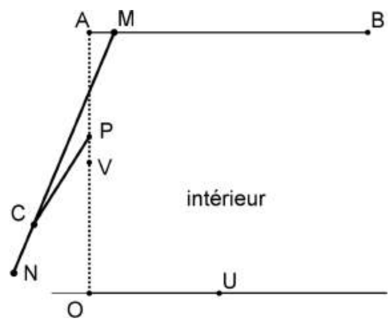
. Dans cette question une réponse précise et argumentée est attendue. La porte est fermée. Une camionnette de hauteur 1,5 m souhaite sortir. Elle s'est arrêtée à 0,9 m de la porte. Celle-ci pourra-t-elle s'ouvrir ?

Partie B – Accès aux garages privés

Les garages privés sont en général de taille limitée. La porte basculante est donc conçue de telle sorte qu'elle s'ouvre sur l'extérieur du garage.

La hauteur de la porte est encore de 2m et le point M se déplace sur le segment [AB]. Un bras rigide [PC] de longueur 0,8 m est ancré au mur au point P situé à 1,2 m du sol. La porte est fixée à ce bras en C situé à 1,6 m de M. Le point N matérialise l'extrémité de la porte.

1. Construire la figure correspondante en indiquant la position de la porte lorsque :
   a) M est au milieu de [AB].
   b) M est en B.
2. La porte du garage est fermée. Jean prétend qu'il n'y a aucun risque à laisser un véhicule à l'extérieur stationné à 1,2 m de la porte. A-t-il raison ?
3. La porte peut-elle s'ouvrir lorsqu'un objet de hauteur 0,6 m est déposé à l'extérieur du garage à 1 m de la porte ?

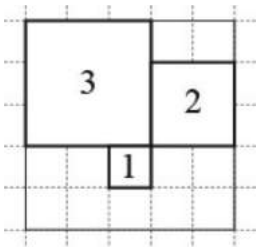


Guyane

Troisième exercice
Toutes séries
Arithmétique, inégalités

Carrure d'un entier

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 1. On appelle carrure de n, notée $C(n)$, le plus grand entier p tel qu'on puisse faire entrer les carrés de côté 1, 2, …, p dans un carré de côté n, sans qu'ils ne se chevauchent.



Par exemple la carrure de 5 est 3, car les carrés de côté 1, 2, 3 entrent dans le carré de côté 5 sans se chevaucher, et qu'on ne peut pas faire entrer en plus le carré de côté 4. Voici un dessin représentant les carrés de côté 1, 2, 3 dans un carré de côté 5.

1. **Carrure de quelques entiers**

   (a) Déterminer la carrure de tous les entiers compris entre 1 et 10. (*On pourra appuyer son raisonnement sur des dessins similaires à celui donné en exemple pour la carrure de 5*)
   (b) Justifier que la carrure est une fonction croissante de n, c'est-à-dire que si n et m sont deux entiers tels que n ″ m, alors $C(n) \leq C(m)$.

2. Quelques majorations de C(*n*)

(a) Montrer que si n est un nombre pair, on ne peut pas faire entrer un carré de côté $\frac{n}{2}$ et un carré de côté $\frac{n}{2}+1$ dans un carré de côté n sans qu'ils ne se chevauchent. En déduire que

$$\mathrm{C}(n) \leq \frac{n}{2}. \qquad (1)$$

(b) De manière analogue, montrer que si n est impair,

$$\mathrm{C}(n) \leq \frac{n+1}{2}. \qquad (2)$$

(c) En raisonnant sur l'aire totale des carrés, montrer que

$$1^2 + 2^2 + \ldots + \left(\mathrm{C}(n)\right)^2 \leq n^2.$$

En déduire que

$$\left(\mathrm{C}(n)\right)^2 \leq 3n^2. \qquad (3)$$

On pourra utiliser sans la démontrer l'inégalité suivante, vraie pour tout entier naturel p :

$$1^2 + 2^2 + \ldots + p^2 \geq \frac{p^2}{3}.$$

(d) En déduire que pour n assez grand, on ne peut plus avoir égalité dans les inégalités (1) et (2).