Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

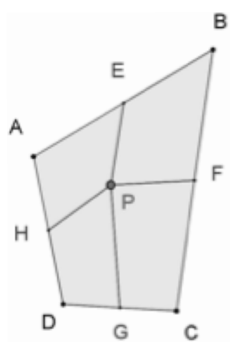
Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 515–1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach *Puzzle*

On donne un quadrilatère convexe ABCD et un point P en son intérieur.
Soient E, F, G, H les milieux des côtés.
On découpe le quadrilatère selon les quatre quadrilatères PEBF, PFCG, PGDH, PHAE.



- Montrer que, assemblés autrement, ces quatre quadrilatères permettent de constituer un autre quadrilatère a priori non isométrique au premier.
- Peut-on trouver un point intérieur (des points) tel(s) que le nouveau quadrilatère soit superposable à l'initial ?
- Discuter de la demande de convexité du quadrilatère initial.

Exercice 515–2 Daniel Reisz – Auxerre *Il préféra s'adonner aux sciences*

Joseph Fourier, lors de son noviciat à l'abbaye de St Benoit sur Loire (1787 - 1789), s'est posé ce « petit problème » :
Comment disposer 17 droites pour avoir 101 points d'intersection ?

Exercice 515–3 Paul-Alain Bonvert – Alfa du Ginseng *Dénombrements et probabilités*

Dans le plan muni d'un repère on appelle point entier tout point dont les deux coordonnées sont entières.
Cinq points entiers étant donnés, on considère les milieux de tous les segments d'extrémités deux quelconques de ces points.
Déterminer la loi de la variable aléatoire X qui compte le nombre de milieux entiers.

Exercice 515–4 Michel Lafond – Dijon *Approximations de cosinus4*

Soit l'intervalle $I = \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

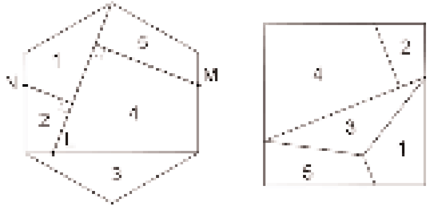
1) Trouver deux réels a, b tels que pour tout x de I, $\left|a + bx^2 - \cos(x)\right| \leq 0{,}03$.

2) Trouver trois réels a, b, c tels que pour tout x de I, $\left|\frac{a + bx^2}{1 + cx^2} - \cos(x)\right| \leq 0{,}01$.

Solutions

Exercice 513–1 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans *(d'après le rallye mathématique de la Sarthe)*

On partage un hexagone régulier en cinq morceaux, et en les juxtaposant, on réalise un carré de la manière suivante :



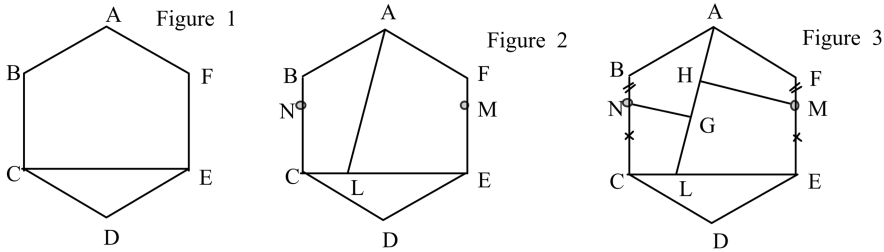
Expliquer comment sont obtenus les points L, M et N.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez), Michel Lafond (Dijon)

- Voici la solution de Michel Lafond.

Soit un hexagone régulier convexe (ABCDEF) de côté 1, avec une diagonale CE. [Figure 1]

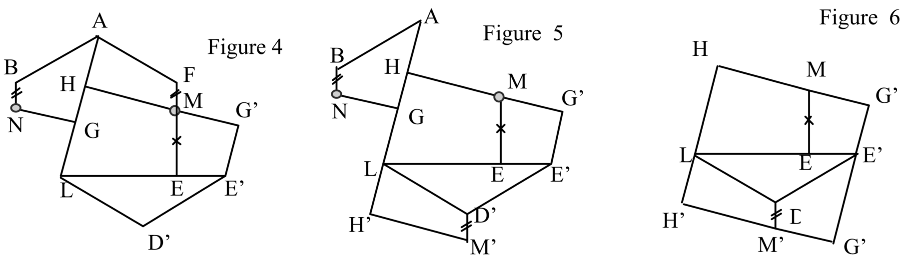
Traçons une oblique AL avec L sur [CE] (plus près de C que de E) puis, choisissons deux points M sur [EF] et N sur [CB] de telle sorte que CN = EM. [Figure 2]
Abaissons de N le segment [NG] perpendiculaire à [AL] et de M le segment [MH] perpendiculaire à [AL]. [Figure 3]



Dans la figure 3, translatons le triangle CDE selon le vecteur $\overrightarrow{CL}$, et le quadrilatère CLGN selon le vecteur $\overrightarrow{CE}$ pour obtenir la figure 4.

Dans la figure 4, translatons le quadrilatère AHMF selon le vecteur $\overrightarrow{AL}$, pour obtenir la figure 5.

Enfin, dans la figure 5, translatons le quadrilatère ABNG selon le vecteur $\overrightarrow{BD}$, pour obtenir la figure 6 :



La figure 6 est un rectangle dont une dimension est la mesure de l'oblique AL dans la figure 2.
En effet, $HH' = HL + LH' = HL + AH = AL$ [Voir les figures 4 et 5]

L'aire de ce rectangle est égale à celle de l'hexagone de départ, à savoir $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

Si on veut un carré, il suffit de faire en sorte que dans la figure 2,

$$AL = \sqrt{\frac{3\sqrt{3}}{2}} = c \approx 1{,}612.$$

C'est possible puisque $AK = \dfrac{3}{2} < c < \sqrt{3} = AC$ [Voir la figure 7 ci-dessous].

En résumé, pour partager l'hexagone (ABCDEF) de côté 1, en cinq pièces, afin de reconstituer un carré :

On trace la diagonale CE.

On trace l'oblique $AL = \sqrt{\dfrac{3\sqrt{3}}{2}}$ avec L sur [CE], puis on choisit M sur [EF] et N sur [BC] équidistants de [CE].
On abaisse de N la perpendiculaire [NG] à [AL] et de M la perpendiculaire [MH] à

[AL] :

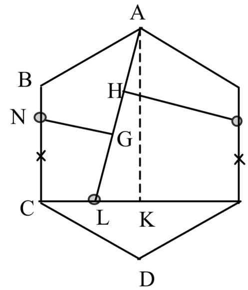


Figure 7

Remarque.
N peut être choisi au hasard sur [BC] entre les deux positions limites qui font d'une part confondre G avec L et d'autre part confondre N et B.

Exercice 513–2 Bill Sands – Calgary *(tiré de Crux Mathematicorum 37-1)*

On suppose que b est un nombre réel positif tel qu'il existe exactement deux entiers strictement compris entre b et $2b$, de même qu'exactement deux entiers strictement compris entre $2b$ et b^2. Trouver toutes les valeurs possibles de b.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez).

- Voici la solution de Pierre Renfer.

Il existe deux entiers naturels n et m tel que : $\begin{cases} n \le b < n+1 < n+2 < 2b \le n+3 \\ m \le 2b < m+1 < m+2 < b^2 \le m+3 \end{cases}$

Puisque $\begin{cases} 2b > n+2 \\ -b > -m-1 \end{cases}$ on a $b > 1$ et de $\begin{cases} 2b \le n+3 \\ -b \le -n \end{cases}$ on tire $b \le 3$.

De même, les inégalités entre b et m donnent les conditions nécessaires $\begin{cases} b^2 - 2b > 1 \\ b^2 - 2b \le 3 \end{cases}$

soit encore $\begin{cases} b^2 - 2b - 1 > 0 \\ b^2 - 2b - 3 \le 0 \end{cases}$.

De ces dernières on déduit alors que $1+\sqrt{2} < b \le 3$. (1)
Examinons les conditions suffisantes :

1) Si $1+\sqrt{2} < b \le \sqrt{6}$, alors $\begin{cases} 2+2\sqrt{2} < 2b \le 2\sqrt{6} \\ 3+2\sqrt{2} < b^2 \le 6 \end{cases}$.

Deux entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3 et 4.
Mais un seul entier est strictement compris entre $2b$ et b^2, à savoir 5.

(1) On remarquera que cette double inégalité rend finalement non nécessaire l'inégalité $1 < b \le 3$ obtenue précédemment. Pour autant, mon sentiment est qu'il était naturel de la chercher et loin d'être inutile.

2) Si $\sqrt{6} < b \leq \frac{5}{2}$., alors $\begin{cases} 2\sqrt{6} < 2b < 5 \\ 6 < b^2 < \frac{25}{4} \end{cases}$.

Deux entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3 et 4.
Et deux entiers également sont strictement compris entre $2b$ et b^2, à savoir 5 et 6.

3) Si $\frac{5}{2} < b < 3$, alors $5 < 2b < 6$.

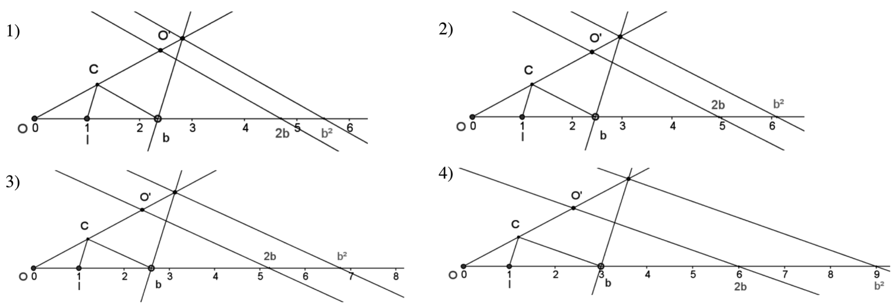
Trois entiers sont strictement compris entre b et $2b$, à savoir 3, 4 et 5.

4) Si $b = 3$, alors $\begin{cases} 2b = 6 \\ b^2 = 9 \end{cases}$.

Deux entiers sont strictement compris entre 3 et 6, à savoir 4 et 5.
Deux entiers sont strictement compris entre 6 et 9, à savoir 7 et 8.

Finalement l'ensemble des solutions est $S = \left]6\,;\frac{5}{2}\right[\cup \{3\}$.

- Je vous propose ci-dessous une découverte visuelle de la solution, qui utilise les constructions des nombres $2b$ et b^2 à la façon de Descartes, alliées aux possibilités offertes par un logiciel de géométrie dynamique. Cette construction permet particulièrement de mettre en évidence les nombres $\sqrt{6}$ et $\frac{5}{2}$ qui apparaissent selon la position de b^2 et $2b$.



Exercice 513–3 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans

Soit k un entier, $k \geq 1$. On considère les polynômes définis par $P_1(X) = X - 1$ et pour tout $k \geq 2$

$$P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{k-1} \left(X^2+1\right)^{k-2} \times \ldots \times \left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j} \times \ldots \times \left(X^{2^{k-2}}+1\right)$$
$$= (X-1)^k \times \prod_{j=0}^{k-2} \left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j}.$$

Déterminer le degré du polynôme P_k, et montrer que, sous forme développée, tous ses coefficients sont égaux à +1 ou −1.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Lafond (Dijon), Jérémy Possamaï (Clermont-Ferrand).

- Voici la solution de Jérémy Possamaï.

Cherchons une relation de récurrence entre les polynômes P_k. Soit $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned}
P_{k+1}(X) &= (X-1)^{k+1} \times \prod_{j=0}^{k-1}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-j} \\
&= (X-1)(X+1)^{k+1}\left(X^{2^j}+1\right)\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-j} \\
&= (X-1)(X+1)^{k+1}\left(X^{2^j}+1\right)\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)\times\prod_{j=0}^{k-2}\left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j} \\
&= \underbrace{(X-1)\prod_{j=0}^{k-1}\left(X^{2^j}+1\right)}_{Q_k(X)}\times P_k(X)
\end{aligned}$$

Montrons, par récurrence sur k, que $Q_k(X) = X^{2^j} - 1$..

On a $Q_1(X) = (X-1)(X+1) = X^2 - 1 = X^{2^1} - 1$.

Soit maintenant $k \in \mathbb{N}^*$. et supposons le résultat montré au rang k. On a alors
On a

$$Q_{k+1}(X) = (X-1)\prod_{j=0}^{k}\left(X^{2^j}+1\right) = Q_k(X)\left(X^{2^k}+1\right) = \left(X^{2^k}-1\right)\left(X^{2^k}+1\right) = X^{2^{k+1}} - 1,$$

ce qui termine la récurrence.

Montrons enfin, toujours par récurrence sur k, que $\deg(P_k) = 2^k - 1$ et que tous les coefficients de P_k sont égaux à +1 ou −1.
On vérifie trivialement la propriété pour P_1.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. et supposons la propriété montrée au rang k.
On sait que $P_{k+1}(X) = \left(X^{2^k} - 1\right)P_k(X)$. Ainsi $\deg(P_{k+1}) = 2^k + 2^k - 1 = 2^{k+1} - 1$..

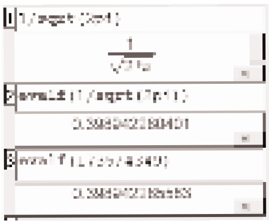
De plus :
– $P_k(X)$est la somme des monômes de degrés 0 à $2^k - 1$ avec des coefficients égaux à +1 ou −1 (hypothèse de récurrence) ;
– $X^{2^k} \times P_k(X) - P_k(X)$ est la somme des monômes de degrés 2^k à $2^{k+1} - 1$ avec des coefficients égaux à +1 ou −1.

On en déduit que $P_{k+1}(X) = X^{2^k} \times P_k(X) - P_k(X)$ a bien tous ses coefficients égaux à +1 ou −1, ce qui termine la récurrence.

Nota.

Pour qui s'intéresserait plus avant aux polynômes n'ayant que 0 ou 1 comme coefficients, L.G Vidiani signale la référence suivante : François Morain et Jean-Louis Nicolas, *Mathématiques et informatique quatorze problèmes corrigés pour l'enseignement supérieur*, Vuibert 1996.
En pages 221-240 on s'intéresse à la zone des zéros de ces polynômes (l'image est d'ailleurs en couverture zone couronne entre deux courbes ressemblant à des cardioïdes). Ce problème exploite l'article de A. M. Pdlyzko et B. Poonen « Zeros of polynomials with 0, 1 coefficients » paru dans L'enseignement mathématiques nº 39 (1993) pages 317-348.

Exercice 513—4 Michel Lafond – Dijon
Approximation rationnelle *(transmis par Vincent Thill)*



Une calculatrice ou un logiciel (ici Xcas) permet de constater que $\frac{1735}{4349}$ est une bonne approximation de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Comment la fraction $\frac{1735}{4349}$ s'obtient-elle ?

Solutions : Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Vincent Thill (Migennes).

- Voici la solution de Pierre Renfer.

C'est la neuvième réduite du développement en fractions continues de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

$$x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ a_0 = \lfloor x_0 \rfloor = 0^{(2)};\ x_1 = \frac{1}{x - a_0},\ a_1 = \lfloor x_1 \rfloor = 2;\ x_2 = \frac{1}{x_1 - a_1},\ a_2 = \lfloor x_2 \rfloor = 1;$$

$$x_3 = \frac{1}{x_2 - a_2},\ a_3 = \lfloor x_2 \rfloor = 1\ ;\ x_4 = \frac{1}{x_3 - a_3},\ a_4 = \lfloor x_4 \rfloor = 37;\ x_5 = \frac{1}{x_4 - a_4},$$

$$a_5 = \lfloor x_5 \rfloor = 4\ ;\ x_6 = \frac{1}{x_5 - a_5},\ a_6 = \lfloor x_6 \rfloor = 1;\ x_7 = \frac{1}{x_6 - a_6},\ a_7 = \lfloor x_7 \rfloor = 1;$$

$$x_8 = \frac{1}{x_7 - a_7},\ a_8 = \lfloor x_8 \rfloor = 1 \text{ et } x_9 = \frac{1}{x_8 - a_8},\ a_9 = \lfloor x_9 \rfloor = 1;$$

(2) On rappelle que la notation $\lfloor x \rfloor$ désigne la partie entière de x.

On obtient la valeur approchée suivante :

$$a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\cfrac{1}{a_5+\cfrac{1}{a_6+\cfrac{1}{a_7+\cfrac{1}{a_8+\cfrac{1}{a_9}}}}}}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1}}}}}}}}}=\frac{1735}{4349}$$

Remarque.

Michel Lafond indique que le nombre de chiffres exacts fourni par cet algorithme des fractions continues est environ le double de celui du dénominateur de la fraction obtenue. Ici : $2 \times 4 = 8$.

Les calculs manuels sont relativement pénibles à cause des inversions, mais les logiciels comme MAPLE donnent instantanément :

with(*numtheory*) :
Digits = 30 : *c* := 1/sqrt(2*Pi);
cfrac(*c*, 10);
convert(*c*,*confrac*,'*convergents*');
convergents;

$$\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{37+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{9\ldots}}}}}}}}}}$$

$$[0,2,1,1,37,4,1,1,1,1,9]$$

$$\left[0,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{75}{188},\frac{302}{757},\frac{377}{945},\frac{679}{1702},\frac{1056}{2647},\frac{1735}{4349},\frac{16671}{41788}\right]$$

Il faut juste prendre un nombre suffisant de chiffres significatifs dans le calcul [ici : Digits = 30].