

## Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART  
13, rue des Garennes  
63 800 Cournon d'Auvergne

ou

hochartmax@yahoo.fr

\* \* \* \* \*

### Énoncés des nouveaux problèmes

#### Problème 515-1 (Lazare Georges Vidiani, Fontaine Les Dijon)

Si  $f(x, y)$  est un polynôme en  $x$  pour tout  $y$  fixé et vice versa, est-ce que  $f$  est un polynôme en  $(x, y)$  ?

#### Problème 515-2

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Pour  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ , on note  $f(X) = 'XMX$ . Préciser les valeurs prises par l'application  $f$ .

#### Problème 515-3 (Michel Lafond, Dijon)

Si  $x, y$  sont deux entiers, on pose

$$\begin{cases} a = -x^2 + 2xy + 3y^2 \\ b = x^2 + 2xy - 3y^2 \\ c = 4xy = a + b \\ d = x^2 + 3y^2 \end{cases} \quad (1)$$

Vérifier que

$$a^2 + b^2 + c^2 = 2d^2 \quad (2)$$

et

$$a^4 + b^4 + c^4 = 2d^4 \quad (3)$$

Y-a-t-il des solutions  $(a, b, c, d)$  en nombres entiers de l'équation (3) qui ne vérifient pas (2) ?

### Solutions des problèmes antérieurs

#### Problème 506-4 (Fernand Canonico, Clermont-Ferrand)

Calculer la somme suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

Réponses de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Bernard Collignon (Coursan), Moubinool Omarjee (Lycée Henri IV), Martin Pépin (ULM), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Trois types de réponse ont été proposés : en utilisant des séries de fonctions (et une intégration terme à terme), par les séries entières (et une équation différentielle), et enfin une solution un peu mystérieuse et eulérienne.

La convergence de la série ne pose pas de problème : pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}. \quad (4)$$

Ainsi,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n+1}{2n+3} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

et l'on conclut par la règle de d'Alembert.

On aborde maintenant le calcul de la somme, en commençant avec les séries de fonctions, approche proposée par **Maurice Bauval**, **Bernard Collignon** et **Pierre Renfer**. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on introduit les classiques intégrales de Wallis :

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n(t) dt.$$

Une intégration par parties donne, pour  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$W_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} W_n$$

puis, avec  $W_1 = 1$ ,

$$W_{2n+1} = \frac{(2n) \times (2n-2) \times \cdots \times (2)}{(2n+1) \times (2n-1) \times \cdots \times (1)} = \frac{2^n n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)}.$$

Ainsi,

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \cdots \times (2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{W_{2n+1}}{2^n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(t) \left( \frac{\sin^2(t)}{2} \right)^n dt.$$

Pour  $n \in \mathbb{N}$  et  $t \in \left[ 0, \frac{\pi}{2} \right]$ , on pose

$$f_n(t) = \sin(t) \left( \frac{\sin^2(t)}{2} \right)^n.$$

Facilement, chaque application  $f_n$  est continue sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et

$$\sup_{t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]} |f_n(t)| \leq \frac{1}{2^n},$$

qui est le terme général d'une série convergente. Par convergence normale sur le segment  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  de la série de fonctions  $\sum f_n$ , on peut intégrer terme à terme. On reconnaît une somme géométrique :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1 - \frac{\sin^2(t)}{2}} dt.$$

Le calcul de cette intégrale est aisé :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(t)}{1 - \frac{\sin^2(t)}{2}} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(t)}{2 - \sin^2(t)} dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2 \sin(t)}{1 + \cos^2(t)} dt.$$

Le changement de variable  $u = \cos(t)$  donne alors le résultat :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = 2 \int_0^1 \frac{du}{1+u^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Toujours avec des séries de fonctions, **Michel Bataille** propose une autre méthode, en passant par les intégrales eulériennes. On transforme le terme général de la série ainsi :

$$\frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^n \Gamma(n+1)^2}{\Gamma(n+2)},$$

où  $\Gamma$  est la fonction d'Euler. On utilise alors la fonction Béta, définie pour  $x, y > 0$  par

$$B(x, y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$$

et son expression sous forme intégrale :

$$B(x, y) = \int_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1} dt.$$

Ainsi,

$$\frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = 2^n B(n+1, n+1) = \int_0^1 (2t(1-t))^n dt.$$

Donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^1 (2t(1-t))^n dt.$$

Sur  $[0, 1]$ ,

$$0 \leq t(1-t) \leq \frac{1}{4},$$

ce qui permet d'établir la convergence normale :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \int_0^1 \frac{1}{1-2t(1-t)} dt.$$

que l'on transforme en

$$\int_0^1 \frac{2}{1+(2t-1)^2} dt = [\arctan(2t-1)]_0^1 = \frac{\pi}{2},$$

ce qui conclut.

Les séries entières permettent également le calcul de la somme, comme le font **Michel Bataille** (encore lui) et **Martin Pépin**, dont voici le raisonnement. Toujours avec

$$a_n = \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2^n}{(2n+1) \binom{2n}{n}},$$

on introduit la série entière

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Le rayon de cette série entière vaut 2 par la règle de d'Alembert (voir le calcul (4)) ou en reconnaissant un équivalent classique :

$$\frac{\binom{2n}{n}}{4^n} \sim \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

dû à Wallis, ce qui fournit

$$a_n \sim \frac{1}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

On observe que

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2n+3} a_n.$$

En arrangeant l'égalité et en multipliant par  $x^{n+1}$ , on obtient

$$2x(n+1)a_{n+1}x^n + a_{n+1}x^{n+1} = x^2 n a_n x^{n-1} + x a_n x^n.$$

Puis on somme pour  $n$  allant de 0 à l'infini, ce qui donne

$$2x f'(x) + f(x) - 1 = x^2 f'(x) + x f(x)$$

ou

$$(2x - x^2) f'(x) + (1 - x) f(x) = 1.$$

Les solutions de l'équation homogène associée à cette équation différentielle sont de la forme

$$\lambda \exp\left(-\int \frac{1-x}{x(2-x)}\right) = \frac{\lambda}{\sqrt{|2x-x^2|}} \quad (\lambda \in \mathbb{R})$$

Si  $x \in ]0; 2[$ , par la méthode de la variation de la constante, on cherche une solution particulière de la forme

$$x \mapsto \frac{\lambda(x)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

avec

$$\lambda'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(1-x)^2}} = \frac{d}{dx}(\arccos(1-x)).$$

Si  $x \in ]-2; 0[$ , on cherche alors  $\lambda$  telle que

$$\lambda'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-1}{\sqrt{(x-1)^2-1}} = \frac{d}{dx}(\operatorname{argch}(1-x)).$$

On a donc

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda + \arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } x \in ]0; 2[ \\ \frac{\mu + \operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x \in ]-2; 0[ \end{cases}$$

Il faut nécessairement que le numérateur tende vers 0 quand  $x$  tend vers 0 dans les deux expressions, ce qui impose

$$\lambda = \mu = 0$$

Ainsi,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^n = \begin{cases} \frac{\arccos(1-x)}{\sqrt{2x-x^2}} & \text{si } x \in ]0; 2[ \\ \frac{\operatorname{argch}(1-x)}{\sqrt{x^2-2x}} & \text{si } x \in ]-2; 0[ \end{cases}$$

On trouve enfin la somme demandée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = f(1) = \arccos(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Michel Bataille préfère choisir la série entière impaire

$$g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} x^{2n+1}$$

dont le rayon de convergence est  $\sqrt{2}$ . Les idées sont essentiellement les mêmes que celles de **Martin Pépin**, je passe donc rapidement sur les calculs. On établit d'abord l'équation différentielle

$$(x^2 - 2)g'(x) + xg(x) = -2$$

puis la relation

$$g(x) = 2 \frac{\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{2-x^2}}.$$

et l'on trouve enfin la somme cherchée :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n+1)} = g(1) = 2 \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 \times \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Une dernière solution est proposée par **Moubinool Omarjee** avec l'argument suivant : d'après Euler,

$$\arctan(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2^n} (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{z^{2n+1}}{(1+z^2)^{n+1}}.$$

Si on admet cette formule, il suffit de tester en  $z = 1$ ,

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{2^n} (n!)^2}{(2n+1)!} \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

ce qui permet de conclure.