Le concours général de mathématiques

Johan Yebbou

Présentation du concours général

On trouvera sur le site du ministère de l'éducation nationale un historique du concours général, et on se contente ici de quelques indications.

Créé en 1744 pour récompenser les études classiques gréco-latines, le concours général se diversifie au XIXe siècle en accueillant les mathématiques en 1811, la physique en 1833, mais ne concerne encore que les garçons des lycées parisiens. Supprimé de 1904 à 1921, il s'ouvre en 1924 aux élèves de province et aux filles. Depuis 1995, il se décline en deux types de concours :

- le concours général des lycées qui, sur trente disciplines, s'adresse aux élèves de première et de terminale des lycées généraux et technologiques (terminale S pour les mathématiques) ;
- le concours général des métiers qui, sur dix-huit spécialités, s'adresse aux élèves de terminale des lycées professionnels ou des centres de formation d'apprentis.

Dans tous les cas, les candidats sont présentés par leurs professeurs.

En 2014, il y a eu 2209 inscrits au concours général des métiers, 14 931 inscrits au concours général des lycées, dont 3442 en mathématiques, discipline la plus représentée et en progression sensible : 1333 inscrits en mathématiques en 2003, 2216 en 2008, 2946 en 2012. À titre de comparaison, les autres disciplines fortement représentées sont la physique-chimie (1843 inscrits en 2014), l'anglais (1314), la composition française (1108) et les sciences de la vie et de la terre (1051).

Fonctionnement du jury du concours général de mathématiques

Le jury, présidé par un inspecteur général, réunit une douzaine de membres : professeurs de terminale ou de classe préparatoire, en majorité, mais aussi un ou deux inspecteurs, un ou deux universitaires. Ainsi, pour la session 2014 : douze membres, dont cinq femmes : deux inspecteurs généraux, un IPR, quatre professeurs de lycée, quatre professeurs de classe préparatoire, un professeur d'université.

Au premier trimestre de l'année scolaire, le jury élabore le sujet. L'épreuve, d'une durée de cinq heures, se déroule en mars. Les copies sont ensuite anonymées et adressées au jury, qui commence par élaborer le barème à partir de l'examen d'un échantillon. Dans les semaines qui suivent, les copies sont corrigées deux fois par des binômes de correcteurs. La dernière phase du processus se passe lors de la réunion de palmarès, où on extrait les meilleures copies des différents binômes de correcteurs. Ces copies (au nombre de 25 à 30) subissent alors une correction multiple, de façon que les copies primées soient notées par tous les membres du jury. Le palmarès résulte d'une décision collective fondée sur cette correction multiple.

Le règlement du concours général prévoit, pour chaque discipline, au plus trois prix, cinq accessits et dix mentions. S'il juge la qualité des copies insuffisante, le jury peut ne pas attribuer toutes les récompenses (prix, accessits, mentions), mais, s'agissant des mathématiques, il y a peu de raisons de prendre une telle décision : avec 18 récompenses pour plus de 3000 candidats inscrits, la sélection est déjà très forte ; de plus, nombreux sont les candidats qui entrent de façon satisfaisante dans les problèmes posés, et le jury n'a pas de difficultés à attribuer toutes les récompenses.

Fin mai, la liste des copies primées est arrêtée par le jury, sans que l'anonymat soit levé. Le palmarès reste secret jusqu'à la cérémonie de remise des prix, qui se tient en Sorbonne début juillet en présence du ministre de l'éducation nationale.

Sujets des épreuves

Contenus

Le sujet respecte les programmes de terminale S (avec spécialité mathématiques), mais peut en faire une interprétation exigeante. S'adressant aux meilleurs élèves, le sujet peut s'autoriser quelques libertés. On remarque ainsi que, jusqu'à une date récente, on trouvait des problèmes de géométrie classique, en particulier de géométrie du triangle, davantage dans l'esprit des olympiades internationales que dans celui des programmes du lycée. On a pu aussi trouver dans les années quatre-vingt-dix des problèmes de nature combinatoire, assez peu dans l'esprit des programmes français.

Cependant, le jury souhaite que les bons élèves de terminale, avec les connaissances qu'ils ont acquises au lycée, puissent entrer dans les problèmes posés. Il souhaite aussi que les évolutions des programmes soient prises en compte. C'est ainsi que depuis la réforme du lycée on observe une diminution de la géométrie classique au profit d'une augmentation des probabilités, d'une position solide de l'arithmétique et d'une apparition encore modeste de l'algorithmique.

Le jury évite de proposer des sujets utilisant des notions étudiées dans l'enseignement supérieur, afin de ne pas avantager les élèves qui pourraient être entraînés sur ces notions.

Forme

La forme des sujets évolue régulièrement. Il y a quarante ans, on voyait principalement un grand problème, avec questions interdépendantes. Dans les années quatre-vingt, on combinait un grand problème avec un ou deux exercices. Dans les années quatre-vingt-dix, sous l'influence des olympiades internationales, le sujet était constitué de cinq exercices indépendants, parfois très brefs : une question seulement (cf. annexe 1). Dans les années 2000, on observe des sujets de forme variable : un grand problème, pouvant être accompagné d'exercices, ou plusieurs exercices indépendants.

Depuis quelques années, on voit un sujet composé de trois problèmes indépendants de longueur modérée (qu'on pourrait qualifier de gros exercices), le tout tenant sur deux pages (cf. annexe 2). Le jury souhaite que l'entrée dans chacun des problèmes puisse se faire en douceur, permettant aux participants, même ceux qui ne seront pas primés, de faire un travail mathématique consistant.

Palmarès 2005-2014

Quelques observations peuvent être tirées de l'examen des palmarès des dix dernières années.

- Un fort déséquilibre des sexes : les filles obtiennent globalement 10% des prix, accessits, mentions. Ce taux reste valable aussi si on se limite aux prix au sens strict, puisque trois jeunes filles en ont obtenu un depuis 2005 : Suzanne Lanéry, 3^{e} prix en 2005 ; Irène Waldspurger, 2^{e} prix en 2006 ; Diane Gallois-Wong, 1er prix en 2011. Il faut semble-t-il remonter à 1934 pour trouver une autre jeune fille, Jacqueline Ferrand, 1er prix du concours général de mathématiques.
- Un poids important de la région parisienne : en combinant Paris (29%), Versailles (18%), et Créteil (3%) on arrive à la moitié des récompenses (prix, accessits, mentions).
- Les « grand lycées » napoléoniens sont bien représentés, mais on trouve de belles réussites ailleurs : 1er prix en 2007 au lycée Louis Feuillade à Lunel (académie de Montpellier), en 2012 au lycée Frédéric Joliot-Curie à Dammarie-lès-Lys (académie de Créteil), en 2013 au lycée Émilie du Châtelet à Serris (académie de Créteil) ; 2^{e} prix en 2013 au lycée Claude et Pierre Virlogeux à Riom (académie de Clermont-Ferrand).

Perspectives

Les professeurs qui présentent des candidats regrettent, quand ils n'ont pas de lauréats, de n'avoir aucune information sur les performances de leurs élèves. Ce regret est sans doute fondé.

Jusqu'à présent, le jury, pour les mathématiques, s'est contenté de publier le texte et parfois les solutions des épreuves, sans rédiger de rapport. C'est certainement un manque auquel il faudrait remédier. Il serait incontestablement très utile pour les professeurs d'avoir des précisions sur les attentes du jury. En outre, le rapport pourrait contenir quelques statistiques : nombre de filles et de garçons inscrits ou primés ; répartition par académie des inscrits et des primés.

Pour toutes ces raisons, le jury du concours général projette de publier le rapport de la prochaine session 2015. En outre, l'inspection générale fera un bilan des activités de préparation au concours général dans les établissements des diverses académies et analysera la diversité géographique du palmarès.

Liens

Sur le site du ministère de l'éducation nationale, on trouve un historique du concours général et le palmarès, à l'adresse :

www.education.gouv.fr/cid23025/le-concours-general.html.

Pour les sujets et corrigés, on peut aller sur le site du groupe de mathématiques de l'inspection générale : igmaths.org.
On les trouve aussi sur le site d'Animath, www.animath.fr, qui contient en outre le parcours des lauréats membres de l'Olympiade française de mathématiques.

Annexe 1 : concours général 1998

(Calculatrice autorisée, durée 5 heures).

Exercice I

Un tétraèdre ABCD vérifie les conditions suivantes :
(a) les arêtes AB, AC et AD sont deux à deux orthogonales ;
(b) AB = 3 et $\mathrm{CD} = \sqrt{2}$.
Déterminer la valeur minimale de $BC^6 + BD^6 - AC^6 - AB^6$.

Exercice II

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. une suite réelle vérifiant, pour tout entier naturel n, la relation

$$u_{n+2} = |u_{n+1}| - u_n.$$

Montrer qu'il existe un entier p non nul tel que la relation $u_n = u_{n+p}$ ait lieu pour tout entier naturel n.

Exercice III

Pour tout réel x on note E(x) le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x Soit k un entier fixé, supérieur ou égal à 2. On considère la fonction f de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ définie par

$$f(n) = n + \mathrm{E}\left(\sqrt[k]{n + \sqrt[k]{n}}\right).$$

Déterminer l'ensemble des valeurs prises par la fonction f.

Exercice IV

On considère deux droites D_1 et D_2 sécantes en O, et un point M n'appartenant à aucune de ces deux droites. On considère deux points variables A sur D_1 et B sur D_2, tels que le point M appartienne au segment [AB].

(*Les questions 1 et 2 sont indépendantes*)

1) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle l'aire du triangle OAB est minimale. Construire les points A et B ainsi déterminés.
2) Montrer qu'il existe une position des points A et B pour laquelle le périmètre du triangle OAB est minimal et qu'on a alors l'égalité des périmètres des triangles OAM et OBM ainsi que la relation

$$\frac{\mathrm{AM}}{\tan\frac{\widehat{\mathrm{OAM}}}{2}} = \frac{\mathrm{BM}}{\tan\frac{\widehat{\mathrm{OBM}}}{2}}.$$

Construire les points A et B ainsi déterminés.

Exercice V

Soit n un entier supérieur ou égal à 3. On considère un ensemble A de n points du plan, cet ensemble ne contenant pas trois points alignés.
Montrer qu'il existe un ensemble S de $2n - 5$ points du plan tel que pour tout triangle dont les sommets sont des points de A il existe au moins un point de S qui lui soit strictement intérieur.

.

Annexe 2 : concours général 2014

(Calculatrice autorisée, durée 5 heures)

PROBLÈME I

Stabilité géométrique

Dans tout le problème, ε et q sont deux réels strictement positifs.

On considère une suite (x_n). de réels telle que $x_0 > 0$ et, pour tout entier naturel n,

$$0 \leq x_{n+1} - qx_n \leq \varepsilon.$$

1. Pour tout entier naturel n, on pose $b_n = x_{n+1} - qx_n$.

   Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$, on a

   $$x_n = q^n x_0 + q^{n-1} b_0 + q^{n-2} b_1 + \ldots + qb_{n-2} + b_{n-1}.$$

2. Dans cette question, on suppose que $0 < q < 1$.
   a) Montrer qu'il existe une suite géométrique (y_n) telle que, pour tout $n \geq 0$,

   $$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{1-q}.$$

   b) Montrer qu'il existe en fait une infinité de telles suites géométriques (y_n).

3. Dans cette question, on suppose que $q > 1$. Pour tout entier $n \geq 1$, on pose

   $$u_n = \frac{b_0}{q} + \frac{b_1}{q^2} + \ldots + \frac{b_{n-1}}{q^n}.$$

   a) Montrer que la suite (u_n) converge.

   On note s sa limite.

b) Pour tout $n \geq 1$, montrer $0 \leq s - u_n \leq \dfrac{x}{q^n(q-1)}$.

c) Montrer qu'il existe une unique suite géométrique (y_n) telle que, pour tout entier naturel n,

$$|y_n - x_n| \leq \frac{\varepsilon}{q-1}.$$

PROBLÈME II

Vite « pile »

Dans ce problème, k et n sont des entiers supérieurs ou égaux à 2.

Un groupe de k joueurs dispose d'une pièce de monnaie non supposée équilibrée, pour laquelle la probabilité d'obtenir « pile » dans un lancer est notée p, avec $0 < p < 1$.

Chaque joueur lance la pièce au plus n fois en s'arrêtant s'il obtient « pile » : son score est alors le nombre d'échecs, c'est-à-dire le nombre de « face ». Ainsi, si un joueur obtient « pile » au premier lancer, son score est 0 et il s'arrête de lancer; s'il obtient « pile » au deuxième lancer (après un « face »), son score est 1 ; s'il obtient « pile » au n-ième lancer (après $n-1$ « face »), son score est $n-1$; s'il n'obtient pas « pile » durant les n lancers, son score est n.

Après les lancers, chaque joueur a un score. Le ou les gagnants sont les joueurs qui ont réalisé le plus petit score.

1° Déterminer la loi de probabilité du score d'un joueur donné.

2° Déterminer la probabilité qu'il y ait un unique gagnant, puis la limite de cette probabilité quand n tend vers l'infini.

3° Déterminer l'espérance du nombre de gagnants, puis la limite de cette espérance quand n tend vers l'infini.

PROBLÈME III

Des chiffres pour des lettres

Un mot de longueur n est une suite de n lettres choisies parmi les 10 lettres A, B, C, D, E, F, F, G, H, I, J. Par exemple, BEC, JJCD, AFFICHAGE, ABCDEFGHIJ sont des mots de longueurs respectives 3, 4, 9, 10.

Une *attribution* du mot ω est un nombre dont l'écriture décimale est obtenue en remplaçant chaque lettre de ω par un des chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, de sorte que des lettres identiques sont remplacées par le même chiffre et que deux lettres distinctes sont remplacées par des chiffres différents. Il est permis que le premier chiffre de l'attribution soit égal à 0. Par exemple, 121 et 040 = 40 sont deux attributions pour le mot GAG mais 333 et 452 n'en sont pas ; 555 et 000 = 0 sont des attributions de AAA, mais pas 112 ou 789.

Soit d un entier strictement positif. On dit que le mot ω est un *bloqueur* de d si toute attribution de ω est un nombre non divisible par d. Ainsi le mot ω = AABCA n'est pas un bloqueur de $d = 4$, car 66716 est une attribution de ω qui est divisible par 4.

1° a) Montrer que le mot AB est un bloqueur de $d = 100$.
b) Montrer que tout nombre d'au moins trois chiffres admet un bloqueur.

Le nombre $d > 0$ est dit *mauvais* s'il admet au moins un bloqueur. Sinon, on dit que d est bon. La question précédente montre que tout nombre d'au moins trois chiffres est mauvais.

2° a) Montrer que 10 est bon
b) Montrer que 8 est bon.
c) Montrer que le mot AAB est un bloqueur de 27.
d) Montrer que le mot ABBAB est un bloqueur de 32.
e) Un diviseur positif d'un nombre bon est-il forcément bon ? Un diviseur positif d'un nombre mauvais est-il forcément mauvais ?

Si k est un entier strictement positif et si X est une lettre, on note X^k le mot XX…X formé de k lettres X.

3° a) Soit p un nombre premier supérieur ou égal à 7 et soit ω le mot défini par :

$$\omega = \mathrm{AAA}^{p-2}\mathrm{BA}^{p-2}\mathrm{CA}^{p-2}\mathrm{DA}^{p-2}\mathrm{EA}^{p-2}\mathrm{FA}^{p-2}\mathrm{GA}^{p-2}\mathrm{HA}^{p-2}\mathrm{IA}^{p-2}\mathrm{JA}^{p-2}.$$

Montrer que ω est un bloqueur de p.
On pourra utiliser librement le petit théorème de Fermat : si x est un entier non divisible par p, alors p divise $x^{p-1} - 1$.
b) Montrer qu'il existe au plus 27 nombres bons.

4° Soit ω un mot de longueur n, et a une attribution de ω.
On note a' l'attribution de ω obtenue à partir de a en permutant circulairement, dans cet ordre, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 sans toucher aux 9 : autrement dit, dans l'écriture décimale de a, les chiffres 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sont respectivement remplacés par 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 0, 9. Par exemple, si $n = 5$ et $a = 01789$, alors $a' = 12809$.
Soit k le nombre d'apparitions du chiffre 9 dans l'écriture décimale de a.
a) Si a est congru à r modulo 9, à quoi est congru a' modulo 9?
b) En déduire que si k n'est pas congru à n modulo 3, alors il existe une attribution de ω divisible par 9.
c) Montrer qu'il en est de même si k est congru à n modulo 3, mais pas modulo 9.
d) Montrer que 9 est bon.

5° Montrer que 18 est bon.

6° Montrer que si un nombre est mauvais, il admet une infinité de bloqueurs.

Pour information, on peut montrer qu'il existe exactement 22 *nombres bons. Ce sont les diviseurs positifs des nombres* 18, 24, 45, 50, 60, 80.