Que serais-je sans toi ? …
Ma bonne partie entière…

richardchoulet(*)

I. Introduction

Dans cet article je vais montrer que la fonction partie entière (notation $\lfloor\ \rfloor$) est particulièrement utile dès que l'on exprime le terme général de certaines suites. À cette occasion, la notion de suite complémentaire d'une suite d'entiers est dégagée ; un théorème récent permet alors de construire explicitement les complémentaires de quelques suites basiques.

Dans tout ce qui suit et qui concerne des suites d'entiers, valeurs comme indices sont pris dans $\mathbb{N}^*$.

II. Un exemple simple où le travail se met en place

Je considère la suite de nombres :

$$1,2,2,3,3,3,\cdots,\underbrace{n,n,\cdots,n}_{n \text{ nombres } n},\cdots$$

Comment le terme général de la suite s'écrit-il ?

D'abord de quelle suite parle-t-on ? De manière naturelle, je la définis par $u_1 = 1$, $u_2 = u_3 = 2$, $u_4 = u_5 = u_6 = 3$, etc. Tout réside dans le « etc » justement ! Je remarque que $u_r = n$ si et seulement si

$$1+2+\cdots+(n-1) < r \leq 1+2+\cdots+n,$$

de sorte que généralement, pour tout $r \geq 1$:

$$1+\frac{n(n-1)}{2} \leq r \leq \frac{n(n+1)}{2} \Leftrightarrow u_r = n.$$

Le problème est de calculer r à l'aide de n.

Pour $r \geq 1$, $u_r = n$ si et seulement si

$$\left(n-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \leq 2r \leq \left(n+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}.$$

Or cette dernière double inégalité a pour conséquence que $\left(n-\frac{1}{2}\right)^2 < 2r < \left(n+\frac{1}{2}\right)^2$: soit encore $n < \sqrt{2r}+\frac{1}{2} < n+1$.

(*) richardchoulet@wanadoo.fr

Ainsi ai-je démontré que pour $r > 1$: $u_r = \left\lfloor \sqrt{2r} + \frac{1}{2} \right\rfloor$.

Voir [1] où une subtile généralisation enchante le lecteur passionné.(1)

III. La notion de suite complémentaire d'une suite d'entiers

Brutalement dit : la suite des entiers pairs a pour complémentaire celle des entiers impairs ; celle des entiers naturels n'en a aucune.

Je prends un autre exemple plus formalisé : je considère la suite des carrés. Je la définis sur $\mathbb{N}^*$ par ur = r2. Une suite complémentaire décrit l'ensemble des entiers qui ne sont pas des carrés d'entiers : 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, ….

Je peux ainsi définir la suite v par : $v_1 = 2$, $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, $v_4 = 6$, … , $v_6 = 8$, $v_7 = 10$, … , $v_{12} = 15$, $v_{13} = 17$, … .

Plus généralement la suite complémentaire d'une suite d'entiers $(u_r)_{r\in \mathbb{N}^*}$ supposée strictement croissante est la suite strictement croissante $(v_n)_{n\in \mathbb{N}^*}$ des entiers qui ne se retrouvent pas dans $\{u_r, r \in \mathbb{N}^*\}$: le complémentaire de $\{u_r, r \in \mathbb{N}^*\}$ dans $\mathbb{N}^*$ étant naturellement ordonné, la suite v décrit la liste de ces entiers. Remarquons qu'alors la suite (v_n) est infinie si et seulement si $\lim\limits_{r\to+\infty}(u_r - r) = +\infty$.

Je détaille l'exemple de la suite des « non-carrés ».

Soit v la suite des non-carrés. Si un de ses termes vn vaut k, les valeurs entières non prises par les éléments de v d'indice inférieur à n, sont les carrés inférieurs à k, qui sont au nombre de $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$. Le nombre de non-carrés jusqu'à k inclus est $n = k - \left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor$. Il reste à « inverser » cette formule.

Imposons $\left\lfloor \sqrt{k} \right\rfloor = r$, ce qui revient à $r^2 < k < (r + 1)^2$, compte tenu de ce que k est un non-carré, soit encore $r^2 < k \leq r^2 + 2r$. Alors $n = k - r$ vérifie $r^2 - r < n \leq r^2 + r$ ou mieux

$$r(r-1) < n \leq r(r+1).$$

Les $\left]r(r-1) ; r(r+1)\right]$ réalisant une partition de $\mathbb{N}^*$, j'ai une première formule donnant v_n :

$$\text{si } r(r-1) < n \leq r(r+1) \text{ alors } v_n = n + r.$$

À partir de là, j'ai aussitôt : $r(r-1) < n \leq r(r+1)$ qui s'écrit

$$(r-0,5)^2 < n + 0,25 \leq (r+0,5)^2,$$

puis

(1) [1] L'Omega, *Défunt bulletin de la régionale de Normandie Occidentale de l'APMEP*, Numéro 8 de septembre 2009. Site de l'APMEP.

$$r - 0,5 < \sqrt{n + 0,25} \leq r + 0,5,$$

ou encore

$$r < 0,5 + \sqrt{n + 0,25} \leq r + 1.$$

Avec la notation $\lceil x \rceil$ pour le premier entier au moins égal à x, il vient

$$v_n = n + r = n + \left\lceil -0,5 + \sqrt{n + 0,25} \right\rceil.$$

Voyons ce qui se passe en remplaçant $0,5 + \sqrt{n + 0,25}$ par $0,5 + \sqrt{n}$. J'ai donc déjà

$$0,5 + \sqrt{n} < r + 1.$$

Montrons que $r \leq 0,5 + \sqrt{n}$.

Je raisonne par l'absurde en supposant que $r > 0,5 + \sqrt{n}$. Ainsi :

$$0,5 + \sqrt{n} < r < 0,5 + \sqrt{n + 0,25},$$

soit encore

$$4n < (2r - 1)^2 < 4n + 1.$$

Les deux extrêmes étant des entiers consécutifs, la double inégalité est impossible.

J'obtiens donc, au total $r \leq 0,5 + \sqrt{n} < r + 1,$, soit $r = \left\lfloor 0,5 + \sqrt{n} \right\rfloor$ et $v_n = n + \left\lfloor \frac{1}{2} + \sqrt{n} \right\rfloor.$

Observons que $0,5 + \sqrt{n}$ n'est jamais un entier x, car alors le nombre $(2x - 1)^2 = 4n$ serait pair et impair. Je démontrerai au IV. 3. que j'ai aussi

$$v_n = n + \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right.$$

IV. De jolis résultats

IV. 1. Le premier résultat

1. Avec les notations ci-dessus (suite u donnée et sa complémentaire v, définies toutes deux strictement croissantes sur $\mathbb{N}^*$), quelques remarques apparaissent.

1.1. Les trois propositions $v_n = n$, $n < u_1$ et $v_n < u_1$ sont équivalentes.

1.2 Supposons $v_n > n$. Alors il existe un entier r tel que : $u_r < v_n < u_{r+1}$ et ainsi $v_n = n + r$. Il résulte que : $u_r - r < n < u_{r+1} - r$ ou encore

$$u_r - r + 1 \leq n \leq u_{r+1} - (r + 1.) \qquad (J_r)$$

2. **Théorème 1**[(2)] : *Soit* (u_n) *une suite d'entiers strictement croissante et* φ *une fonction définie, continue et strictement croissante sur* $\mathbb{R}^+$, *de limite* $+\infty$ *en* $+\infty$.

Je suppose que φ *vérifie : pour tout entier r*

$$u_r - r < \varphi(r) \leq u_r - r + 1. \qquad (\mathrm{I}_r)$$

Alors la suite définie par $v_n = \lfloor n + \varphi^{-1}(n) \rfloor$ *pour* $n \geq u_1$ *et* $v_n = n$ *pour* $n < u_1$ *est la suite complémentaire de* (u_r).

Démonstration

Remarquons d'abord que φ est une bijection de $[1 ; +\infty[$ vers $[\varphi(1) ; +\infty[$, ce dernier intervalle contenant l'intervalle $[u_1 ; +\infty[$ puisque $\varphi(1) \leq u_1$ d'après la propriété (I_r) appliquée à $r = 1$. Par ailleurs pour tout entier r : $u_r - r + 1 \in [u_1 ; +\infty[$.

En effet, comme (u_r) est strictement croissante, j'ai aisément par récurrence : $u_r \geq u_1 - r + 1$ pour tout r ; ceci assure que $u_r - r + 1 \geq u_1$ pour tout r.

Passons à la démonstration proprement dite.

Je suppose que pour tout entier r, j'ai

$$u_r - r < \varphi(r) \leq u_r - r + 1,$$

où φ est continue et strictement croissante sur $[1 ; +\infty[$.

φ est de limite $+\infty$ en $+\infty$ par hypothèse, donc définit une bijection de $[1 ; +\infty[$ sur $[\varphi(1) ; +\infty[$ avec $u_1 - 1 < \varphi(1) \leq u_1$.

Prenons un élément v_n de la suite (v) complémentaire de (u), tel qu'existe r : $u_r < v_n < u_{r+1}$, ce qui suppose que $n \geq u_1$.

La seconde moitié de (I_r) s'écrit : $\varphi(r) \leq u_r - r + 1$.

La première moitié de (I_{r+1}) s'écrit : $u_{r+1} - (r + 1) < \varphi(r + 1)$.

En reportant dans (J_r), il vient :

$$\varphi(r) \leq u_r - r + 1 \leq n \leq u_{r+1} - (r+1) < \varphi(r+1)$$

d'où $r \leq \varphi^{-1}(n) < r + 1$ et par conséquent : $r = \lfloor \varphi^{-1}(n) \rfloor$.

Finalement : si $n < u_1$ alors $v_n = n$ et si $n \geq u_1$ alors $v_n = \lfloor n + \varphi^{-1}(n) \rfloor$.

IV. 2. Généralisation

L'examen attentif d'une certaine répétitivité dans les exemples de [2] m'a conduit à voir de plus haut la situation décrite sous la forme du théorème suivant.

Théorème 2 : *La suite d'entiers de départ est donnée par* $u_r = f(r)$ *où f est une fonction strictement croissante, dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *; elle est non bornée et définit une bijection convenable de* $[1 ; +\infty[$ *vers* $[f(1) ; +\infty[$. *On suppose de plus que* $f(x) - f(x - 1) \geq x - 1$ *pour tout* $x > 1$.

(2) Ce résultat de Bakir Fahri apparaît dans [2] **An explicit formula generating the non-Fibonacci numbers**, *Arciv :1105.1127v2*, Bakir Farhi, Mai 2011.

Alors la fonction φ telle que $\varphi^{-1}(x) = f^{-1}(x + f^{-1}(x))$ est telle que

$$v_n = \left\lfloor n + \varphi^{-1}(n) \right\rfloor.$$

Il suffit de vérifier que φ est strictement croissante de limite $+\infty$ en l'infini et que (I_r) est satisfaite.

Je dois assurer pour tout $r \geq 1$:

$$u_r - r < \varphi(r) \leq u_r - r + 1.$$

Ceci équivaut à

$$\varphi^{-1}\left(f(r) - r\right) < r \leq \varphi^{-1}\left(f(r) - r + 1\right)$$

ou encore à

$$f^{-1}\left(f(r) - r + f^{-1}\left(f(r) - r\right)\right) < r \leq f^{-1}\left(f(r) - r + 1 + f^{-1}\left(f(r) - r + 1\right)\right)$$
$$f(r) - r + f^{-1}\left(f(r) - r\right) < f(r) \leq f(r) - r + 1 + f^{-1}\left(f(r) - r + 1\right)$$
$$f^{-1}\left(f(r) - r\right) < r \leq 1 + f^{-1}\left(f(r) - r + 1\right)$$
$$f(r) - r < f(r) \quad \text{et} \quad f(r) - r + 1 \geq f(r-1).$$

Cette dernière inégalité, équivalente à $f(r) - f(r-1) \geq r - 1$, est donc satisfaite d'après l'hypothèse faite sur f.

Corollaire : *Si on sait que $f'(x) \geq x$, la condition ci-dessus est réalisée.*

En effet, d'après le théorème des accroissements finis(3)

$$f(r) - f(r-1) = \left(r - (r-1)\right) f'(r-h)$$

où $0 < h < 1$, donc

$$f(r) - f(r-1) = f'(r-h) \geq r - h > r - 1.$$

IV. 3. Des exemples relevant des théorèmes ci-dessus

$f(x) = x^2, f^{-1}(x) = \sqrt{x}, f'(x) = 2x \geq x$ pour $x \geq 0$.

$f(x) = x^3, f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{3}}, f'(x) = 3x^2 \geq x$ pour $x \geq 1$.

$f(x) = x^k\ (k \geq 2), f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{k}}, f'(x) = kx^{k-1} \geq x$ pour $x \geq 1$.

$f(x) = a^x\ (a$ entier $\geq 2), f^{-1}(x) = \log_a(x), f'(x) = \ln a \times a^x \geq x$.

Cette dernière inégalité est obtenue en faisant une étude succincte de $x \to \ln a \times a^x - x$. Il suffit d'ailleurs de prouver le résultat lorsque $a = 2$.

MAIS cela ne convient pas avec notre simple $f(x) = 2x$ pour la suite des nombres pairs. Heureusement, directement, pour réaliser (I_n) il suffit de prendre

(3) Rappel du Théorème des Accroissements Finis : en gros $f(x) - f(y) = (x - y) f'(z)$ avec z entre x et y strictement.

$n < \varphi(n) \leq n + 1$ avec par exemple $\varphi(n) = n + \frac{1}{2}$ et $\varphi^{-1}(n) = n - \frac{1}{2}$.

Faisons le bilan :

La suite des non-carrés est définie par $v_n = n + \left\lfloor \sqrt{n + \sqrt{n}} \right\rfloor$ où n ≥ 1.

La suite des non-puissances k est définie par $v_n = n + \left\lfloor \left(n + n^{1/k}\right)^{1/k} \right\rfloor$ ($n \geq 1$).

La suite des non-puissances de a est définie par $v_n = n + \left\lfloor \log_a\left(n + \log_a(n)\right) \right\rfloor$ ($n \geq 1$). Mais la suite des non-pairs, en revenant à la généralité, est la suite des $v_n = n + \left\lfloor n - \frac{1}{2} \right\rfloor = 2n - 1$: ouf il s'agit bien des impairs !

V. Annexe : ouverture sur un résultat asymptotique.

Il semble que le résultat annoncé dans la généralisation soit encore valable « à partir d'un certain rang » avec une suite u qui soit donnée par $u_r = \lfloor f(r) \rfloor$ où f vérifie les bonnes propriétés utilisées. La suite v complémentaire de u est donnée par $v_n = n + \left\lfloor f^{-1}\left(n + f^{-1}(n)\right) \right\rfloor$ pour n suffisamment grand. Cela veut dire qu'il y a au début des valeurs anarchiques qui sont ou non des termes de u et que le résultat se régularise au delà d'un certain entier. Par exemple avec $f(r) = a^r$ où $a > 1$, le résultat est d'autant meilleur que a est loin de 1. Cela se comprend en ce sens que les termes sont de plus en plus espacés et ainsi la condition (I_r) peut être réalisée en y mettant un prix qui n'est pas forcément élevé. Tout cela est bel et bon mais est à démontrer proprement.

Dans [2], l'auteur donne un résultat raffiné dès $n \geq 2$, mais en prenant la formule de Binet, le nombre de Fibonacci F_n ($F_1 = 1$, $F_2 = 1$, …) se calcule par $\left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n \right\rfloor$ pour $n > 8$ de sorte qu'à partir de 35, « j'ai » la suite complémentaire donnée par

$$v_n = n + \left\lfloor \frac{1}{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}} \ln\left(\sqrt{5}\left(n + \frac{n \ln \sqrt{5}}{\ln \frac{1+\sqrt{5}}{2}}\right)\right) \right\rfloor$$

ou encore

$$v_n = n + \left\lfloor \log_\Phi \sqrt{5}\left(n + \log_\Phi\left(\sqrt{5}n\right)\right) \right\rfloor$$

avec le logarithme de base $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.