Le loup et l'agneau.

Une Activité de probabilités en seconde

Pierre-Alain Muller(*)

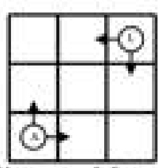
Lors de l’édition 2009 du rallye mathématique organisé par la régionale de Lorraine[1], nous avions posé la question subsidiaire suivante :

Question subsidiaire : Le loup et l’agneau

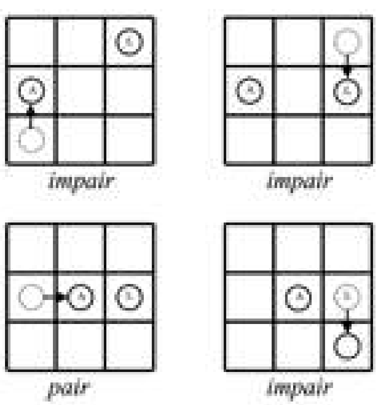
Un agneau (A) et un loup (L) sont placés à deux angles opposés d’un quadrillage. En commençant par l’agneau, ils avancent à tour de rôle d’une case en suivant les flèches (vers la droite ou vers le haut pour l’agneau, vers la gauche ou vers le bas pour le loup). Pour décider de la direction à prendre, on joue avec un dé :

- *l’agneau avance d’une case vers la droite si le dé indique un nombre pair, et d’une case vers le haut si le dé indique un nombre impair.*
- *le loup avance d’une case vers la gauche si le dé indique un nombre pair, et d’une case vers le bas si le dé indique un nombre impair.*

Si le loup et l’agneau arrivent dans la même case, le loup capture l’agneau.
Remarque : le jeu s'arrête dès que chacun a fait deux pas



Voici le déroulement d’une partie (où l’agneau échappe au loup) :



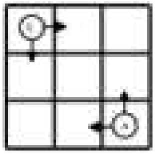
(*) Lycée Henri Nominé, Sarreguemines.Responsable du rallye régional Apmep.
(1) Le rallye organisé par la régionale Lorraine chaque printemps s'adresse aux classes de troisièmes et secondes de notre académie.

La règle du jeu est la suivante :
– *le loup gagne deux euros s'il capture l'agneau*
– *l'agneau gagne un euro s'il échappe au loup*
Le jeu favorise-t-il l'un des joueurs ou pas ?
(La qualité de l'argumentation de la réponse proposée sera déterminante !)

De cette question est née une activité qui a été proposée initialement comme activité d'introduction au chapitre de probabilité en seconde, mais depuis, elle a connu des prolongements en première, en première année de BTS et, traduite en allemand, en DNL, lorsqu'on aborde les probabilités.
Le récit qui suit décrit le déroulement de l'activité en seconde.

Voici le texte proposé aux élèves :

Un agneau (A) et un loup (L) sont placés à deux angles opposés d'un quadrillage. En commençant par l'agneau, ils avancent à tour de rôle d'une case en suivant les flèches (vers la gauche ou vers le haut pour l'agneau, vers la droite ou vers le bas pour le loup). Pour décider de la direction à prendre, on joue à pile ou face :
– *l'agneau avance d'une case vers la gauche si la pièce indique pile, et d'une case vers le haut si la pièce indique face.*
– *le loup avance d'une case vers la droite si la pièce indique pile, et d'une case vers le bas si la pièce indique face.*
Si le loup et l'agneau arrivent dans la même case, le loup capture l'agneau.
Remarque : le jeu s'arrête dès que chacun a fait deux pas.

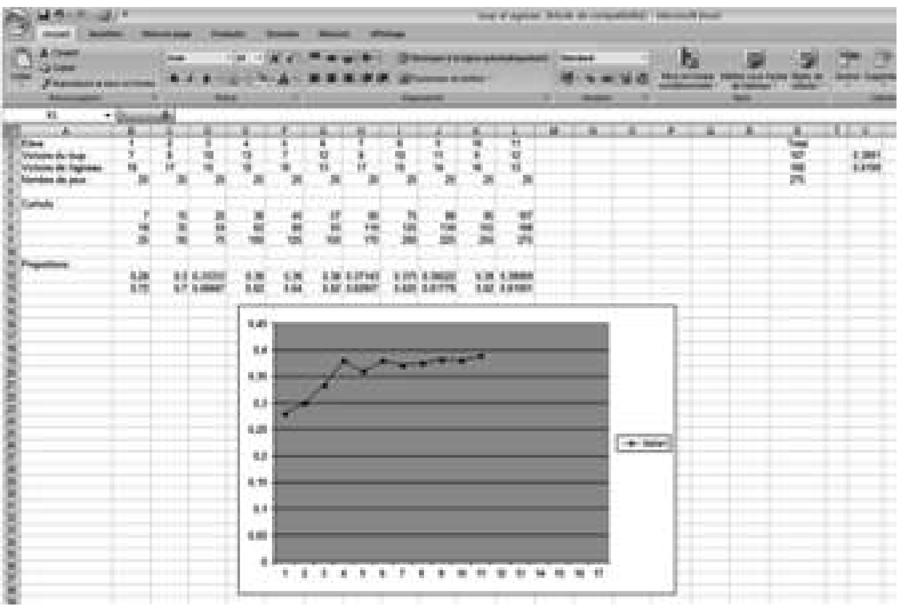


On remarquera la modification de la place initiale du loup et de l'agneau par rapport à l'exercice initial. Cette modification permet un codage des déplacements et une numérotation plus facile à manipuler (comme on le verra plus loin)
Il arrive que le simple fait de distribuer l'activité aux élèves et de l'expliquer au tableau crée un premier temps de réaction des élèves sous la forme d'affirmations du type : « À force, le loup attrapera toujours l'agneau… » ou encore « Ça peut durer longtemps ! ». Un petit moment de débat contradictoire permet alors à chacun de se faire son opinion, puis faire une ou deux parties au tableau permet d'asseoir dans l'esprit des élèves qu'il existe des situations sauves pour l'agneau (personnellement je m'arrête dès que j'ai une situation gagnante pour l'agneau).
Vient alors un deuxième temps de débat, puisque se pose la question : « Quel animal a le plus de chances de gagner ? »
En général les propositions fusent, à partir du moment où un élève a osé émettre une première hypothèse (encore faut-il que ce ne soit pas le meilleur de la classe car il arrive alors que sa proposition ait valeur de vérité auprès des autres).
On entend souvent la proposition d'un jeu équitable, car le jeu de pile ou face est

équitable. On peut aussi assister à des débats sans fondement mathématique comme celui entre élèves qui prétendaient, pour une part que « le loup gagnera plus souvent car il a faim et qu'il a très envie de manger » et d'autre part que « l'agneau lutte pour avoir la vie sauve et qu'il s'agit là d'une motivation suprême pour échapper au loup » ! Malgré un manque de réflexion des élèves lors de ce temps, il me paraît indispensable dans leur appropriation du problème, et lorsque le débat fait ressortir des positions différentes au sein de la classe, la nécessité d'une réflexion mathématique est admise par tous.

On peut alors aiguiller les élèves vers l'idée de faire une simulation de la situation. Suivant les classes et les élèves, on peut proposer de faire 25 parties de ce jeu, soit chacun chez soi pour le prochain cours, soit en classe par groupe de deux, un élève jouant pour le loup et l'autre pour l'agneau…

Une mise en commun des résultats à l'aide d'un tableur permet alors de se faire une idée…



Lors de la présentation de ce recueil de résultats expérimentaux, les élèves sont convaincus que l'agneau a plus de chances que le loup de gagner. Il s'agit maintenant de trouver la probabilité…

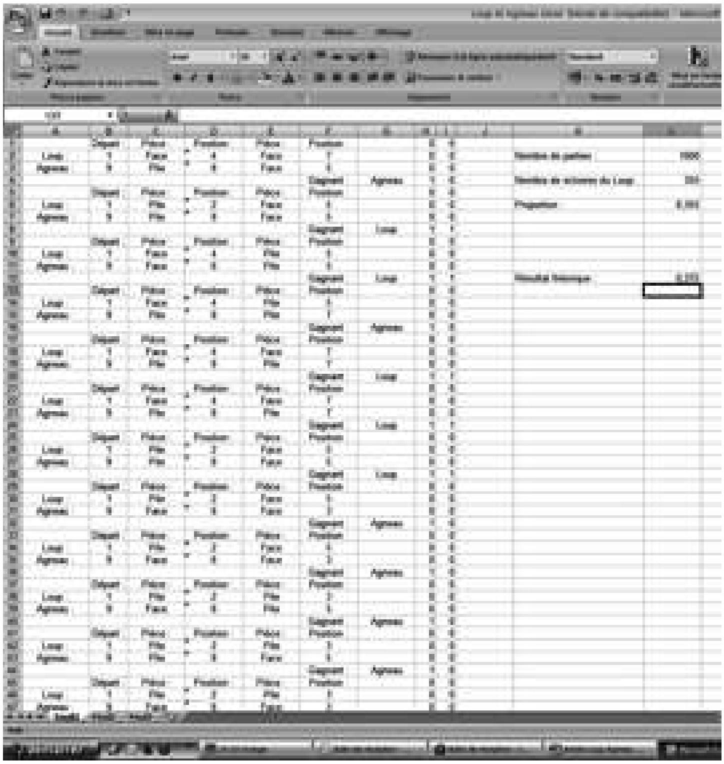
La meilleure remarque obtenue à ce stade de l'activité est : « Le loup gagne avec une probabilité de 1/3 », qui est un résultat pas très éloigné de la réalité, mais c'est surtout l'argumentation donnée qui est intéressante : « J'ai remarqué que quand le loup attrape l'agneau, cela se fait toujours sur la diagonale du carré, il y a donc 3 cases gagnantes pour le loup sur un total de 9 cases du plateau donc $p = 1/3$ »

Inutile de préciser que, entre la proximité de la probabilité proposée avec les résultats expérimentaux obtenus et la justification donnée, les élèves de la classe ont été rapidement convaincus…

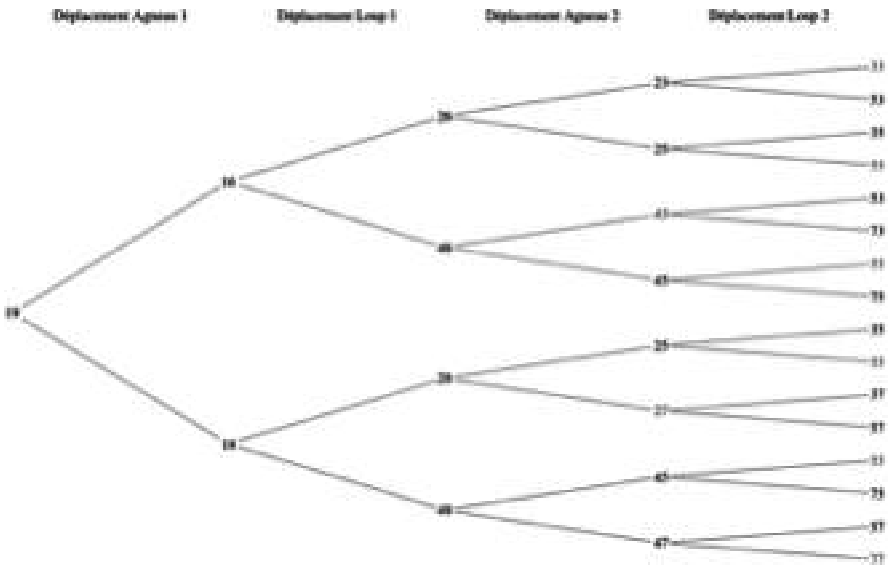
Sans avoir une telle proposition, on peut parfois s'appuyer sur les remarques des élèves qui s'interrogent sur le devenir de la proportion si on joue beaucoup plus de parties. Dans tous les cas, on peut suggérer de faire une simulation d'un grand nombre de parties à l'aide d'un tableur pour confirmer ou infirmer l'impression eue lors de l'expérimentation.
On peut, bien sûr, proposer le fichier tout fait et montrer ce que cela donne, mais la réalisation du fichier avec les élèves est une activité très riche car elle soulève quelques problèmes et permet d'aborder la partie TICE des programmes. De plus, la réflexion menée facilitera la mise en place du raisonnement permettant de trouver la bonne probabilité.
À ce moment là, c'est le plus souvent une séance de brainstorming collective qui est la plus productive car les idées des uns permettent à d'autres de rebondir, même s'il est vrai que pas mal d'élèves se cachent derrière l'activité de quelques-uns. Mais, personnellement je tiens à ce type de « recherche à haute voix », avec ses succès et ses échecs, qui illustre toute la difficulté qu'il y a à trouver une solution…
La première phase consiste à numéroter les cases de la façon suivante :

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Il faut alors modéliser les déplacements du loup et de l'agneau. Le changement de position initiale des deux animaux peut s'avérer judicieux : il est en effet plus facile, pour les élèves, de voir, que, pour l'agneau, un déplacement horizontal correspond à diminuer le numéro de la case occupée de 1 et qu'un déplacement vertical correspond à diminuer le numéro de la case occupée de 3. De même, pour les déplacements du loup, mis à part qu'il faut additionner 1 ou 3 au numéro de la case occupée. Au bout de 25 parties les élèves constatent qu'après deux déplacements de l'agneau et deux déplacements du loup, la partie a trouvé son épilogue : soit les deux animaux sont sur la même case et le loup a gagné, soit ils se trouvent sur deux cases différentes et l'agneau est vainqueur. Cela permet donc, à l'aide d'un tableur, de (re)voir l'utilisation de la conditionnelle SI. On peut aussi faire cette modélisation à l'aide de logiciel type algobox ou python.



Si une telle simulation permet de confirmer le constat fait sur quelques centaines d’exemples, cela ne nous permet pas encore de connaître la valeur exacte de la probabilité.
Il est alors temps de faire une synthèse du travail précédent en exhibant l’outil « arbre de probabilité » que l’on réalisera avec les codages de la grille vus précédemment : ab signifiant l'agneau est sur la case numéro a et le loup sur la case numéro b."
On obtient alors cet arbre :



On pourra noter que certaines branches sont inutiles puisque les positions 43 et 27 sont des positions gagnantes pour l’agneau, mais les élèves de Seconde étant peu familiarisés avec les arbres, la vision complète de l’arbre est nécessaire à certains pour déterminer correctement les probabilités.
On aboutit donc à des probabilités de victoire de 3/8 pour le loup et de 5/8 pour l’agneau. Comparer 3/8 avec la proposition de 1/3 de l'élève !

À d’autres niveaux, on peut réintroduire la notion de gain de l’exercice initial et aborder la notion d’espérance mathématique.

Pour finir, certains élèves, à l’issue de cette activité, imaginent appliquer ce jeu à un plateau plus grand, de 16 cases (4×4), voire plus grand…
Cela peut permettre d’élargir encore ce problème, notamment à travers leur questionnement :
- Si le plateau est plus grand, le loup et l’agneau se rencontreront-ils toujours sur la diagonale ?
- Peut-on déterminer le nombre maximum d’étapes, si on connaît la taille du plateau de jeu ?
- Que deviennent les probabilités si on agrandit le plateau de jeu ? Peut-on les « deviner » ? (Il y a deux choses derrière cette question, d’abord l’idée de limite de la représentation sous forme d’arbres, les branches deviennent trop nombreuses pour être dessinées et une idée de recherche d’une éventuelle récurrence, même si cette deuxième idée est très floue dans l’esprit des élèves)

Voilà des prolongements possibles...