Autour du théorème de Pythagore

Pierre Legrand(*)

1. En lisant le programme

Le théorème de Pythagore est l'apogée du programme de géométrie de quatrième. Mais en lisant ce dernier, il est difficile de savoir ce qui est attendu du professeur. Doit-il démontrer le théorème ? Ou simplement le rendre plausible ? Ou même le présenter comme une vérité révélée ? « Caractériser le triangle rectangle par le théorème de Pythagore et sa réciproque », c'est vague, d'autant plus que la colonne des commentaires, souvent prolixe, est sur ce point muette.

La suite ne rend pas moins perplexe : « Calculer la longueur d'un côté d'un triangle rectangle à partir de celle des deux autres. En donner, si besoin est, une valeur approchée, en faisant éventuellement usage de la touche $\sqrt{\ }$ de la calculatrice ». La première phrase semble impliquer que l'élève sait ce qu'est une racine carrée… notion qui ne figure qu'au programme de troisième. La seconde ne fait qu'accroître l'embarras du lecteur : on invite l'élève à taper sur une touche dont il ignore le sens(1) pour répondre à une question qu'on se refuse à formuler. Aurait-il été si difficile d'écrire : « on admettra l'existence et l'unicité de la racine carrée d'un nombre positif » ?

2. Les démonstrations

Le théorème de Pythagore semble avoir été connu bien avant notre ère. C'est sans doute, de tous les théorèmes, celui qui a reçu le plus de démonstrations différentes. On en a répertorié plus de trois cents(2), plus ou moins inspirées, pour la plupart, des trois qui sont rappelées ici. Celles-ci sont non seulement les plus célèbres, mais aussi les plus présentes dans les traités et les manuels scolaires des siècles passés.

D'Euclide à Legendre

La première démonstration qui soit parvenue jusqu'à nous est celle d'Euclide, dans la proposition 47 du livre I des *Éléments*. Elle est parfaitement convaincante(3), mais fort complexe. Surtout, elle ne parle guère à l'intuition, comme le montre la figure 1.

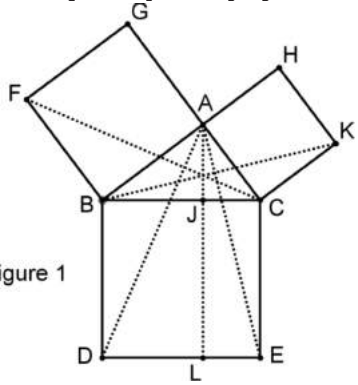

figure 1

(*) p.m.legrand@sfr.fr

(1) C'est en effet le programme de troisième qui parle de « donner du sens à la notion de racine carrée ».

(2) Le lecteur curieux en trouvera cent quatre sur le site http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/

(3) Sous réserve d'admettre la notion d'aire et ses propriétés élémentaires.

Elle repose sur l'utilisation répétée de la formule $S=\frac{1}{2}bh$ donnant l'aire d'un triangle. En abrégé :

Aire ABFG = 2 Aire AFB = 2 Aire FBC = 2 Aire ABD = Aire BDLJ,
Aire ACKH = 2 Aire ACK = 2 Aire CKB = 2 Aire CAE = Aire CELJ.

La preuve d'Euclide a traversé plus de deux millénaires : on la retrouve à peu près inchangée dans les fameux *Éléments de Géométrie* de Legendre (1794), qui allèrent de réédition en réédition pendant près d'un siècle. Ce traité ambitieux visait à refaire Euclide avec plus de rigueur(4), et a par là même contribué à entretenir au XIX^{e} siècle un certain immobilisme dans l'enseignement de la géométrie.

L'image ci-contre, parue en pleine page dans un numéro de *La Vie parisienne* vers 1918, montre à quel point cette démonstration du fameux « pont aux ânes » était devenue une référence familière.

Le puzzle de Clairaut

Encouragé par son amie la charmante et savante marquise du Châtelet (traductrice de Newton et infidèle maîtresse de Voltaire), Alexis Clairaut, bien que déjà célèbre comme mathématicien et comme astronome, se lança dans la rédaction d'*Éléments de Géométrie* (1741) qui eurent un beau succès à l'époque, mais furent ensuite un peu éclipsés par ceux de Legendre et de Lacroix.

L'esprit du livre diffère beaucoup de celui d'Euclide ou de Legendre. Le souci de rigueur et de perfection formelle passe au second plan derrière le désir de faire comprendre et de rendre intuitif. En cela Clairaut était bien de ce XVIII^{e} siècle où les mathématiciens allaient de l'avant sans se préoccuper outre mesure d'assurer leurs arrières.

Sa démonstration du théorème de Pythagore consiste en un puzzle ; le terme n'existait pas alors en français, mais c'est bien de cela qu'il s'agit. On matérialise(5) quatre exemplaires d'un même triangle rectangle dont les côtés ont pour longueur a, b, c, où c correspond à l'hypoténuse. On les place dans un carré de côté $a+b$ de deux façons différentes et la vérité jaillit !

(4) «… mon but a été de faire des éléments très rigoureux. », dit-il dans sa préface.
(5) La présentation diffère un peu de celle de Clairaut, qu'on trouvera aux paragraphes 17 à 19 du livre 2 de ses *Éléments*, consultables sur le site *gallica*.

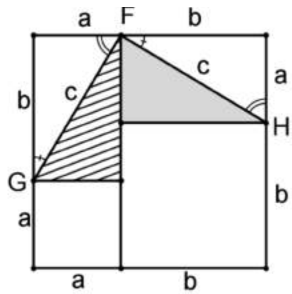

figure 2

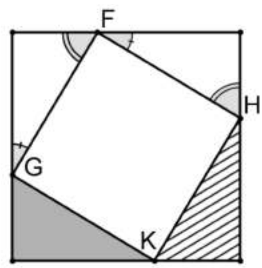

figure 2 bis

La portion du grand carré non recouverte par les triangles est sur la figure 2 la réunion de deux carrés de côtés *a* et *b* ; sur la figure 2 bis c'est le quadrilatère FGKH. Or ce dernier a tous ses côtés de longueur *c* : c'est donc un losange.

Comme l'angle $\widehat{\mathrm{GFH}}$ est droit (la démonstration se lit sur la figure grâce aux angles marqués), c'est un carré, d'aire c^2.

On obtient ainsi, en égalant les aires : $a^2 + b^2 = c^2$.

C'est bref, c'est clair et surtout cela rend le résultat visible. En outre, cela peut, en polissant les détails, être rendu impeccablement rigoureux.

La démonstration par triangles semblables

Une autre preuve vient comme la première d'Euclide (Livre VI, propositions 8 et 31), mais elle semble n'avoir fait son apparition(6) dans l'enseignement qu'avec les *Éléments de géométrie* de Sylvestre-François Lacroix, manuel destiné aux lycéens(7) qui connut une longue vie (première édition en 1796, dix-septième en 1855). On la retrouve ensuite chez d'autres auteurs et jusque dans les *Leçons de Géométrie élémentaire* de Jacques Hadamard, dont la première édition est de 1898 et la treizième de 1944.

Elle est brève et rigoureuse, et ne demande d'autre tracé auxiliaire que celui de la hauteur du triangle. Mais elle suppose des notions sur les triangles semblables. On utilise en effet deux fois le théorème suivant : *deux triangles rectangles ayant un angle aigu égal sont semblables*.

Ainsi les triangles ABC et ACD sont semblables ;

on a donc $\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}}$ donc $\mathrm{AC}^2 = \mathrm{AD} \times \mathrm{AB}$.

De même, ABC et CBD sont semblables ; donc

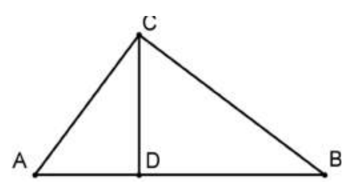

figure 3

(6) Elle est cependant mentionnée en passant (« Nous retombons ainsi sur la proposition du carré de l'hypoténuse ») dans la *Géométrie* de Legendre, comme scholie de la proposition 23 du livre III.

(7) En fait, les élèves des « écoles centrales », ancêtres de nos lycées, au nombre d'une petite centaine.

$\dfrac{BD}{BC}=\dfrac{BC}{AB}$ et $BC^2 = BD \times AB$.
Il reste à additionner pour obtenir

$$AC^2 + BC^2 = (AD + BD) \times AB = AB^2.$$

Remarque : Cette preuve diffère des précédentes sur un point important. C'est la seule des trois à ne pas matérialiser les carrés sur la figure ; on raisonne ici sur des longueurs, non sur des aires(8).

Et dans nos classes ?

Il va de soi que la démonstration d'Euclide et Legendre ne parlera guère à un collégien. Il va de soi aussi qu'est exclue la preuve par triangles semblables, puisque les élèves quittent le lycée sans avoir entendu le mot similitude(9). Or *un résultat aussi important que le théorème de Pythagore ne peut être asséné sans justification*, sous peine de faire perdre aux élèves tout sens critique.

Reste donc le puzzle de Clairaut qui, même sans mise en forme mathématique, peut faire l'objet d'une réalisation en bois ou en carton qui rende le résultat visuellement évident à défaut d'une preuve formelle. Ce puzzle peut aussi faire l'objet d'un joli travail sur *GeoGebra*. On construit la figure 2, puis on effectue sur le triangle hachuré la translation qui amène F en H et sur le triangle ombré la translation qui amène F en G ; on a alors la figure 2 bis.

3. La réciproque

Le raisonnement traditionnel

Cette réciproque figure dans Euclide (proposition 48 du livre I) et la démonstration qui y est suivie a été reprise par la quasi-totalité des auteurs.

Le travail se fait par identification. En bref, si les trois côtés d'un triangle T vérifient $a^2 + b^2 = c^2$, on construit un triangle rectangle T′ dont les côtés de l'angle droit ont pour longueur a et b ; son hypoténuse a pour longueur $\sqrt{a^2+b^2}$, c'est-à-dire c. Les triangles T et T′ ont donc des côtés dont les longueurs sont deux à deux égales : ils sont isométriques. Comme T′ est rectangle, T l'est aussi.

Les problèmes qu'il pose

Le raisonnement a beau être assez simple, il pose au professeur de quatrième deux douloureux problèmes : on utilise la racine carrée (programme de troisième) et le troisième cas d'isométrie des triangles (ex-programme de seconde). Deux solutions pour se tirer d'affaire :

- ou bien (solution de prudence) admettre le résultat ;
- ou bien montrer une mauvaise foi égale à celle des rédacteurs du programme.

(8) Dans le livre VI d'Euclide, la formulation du résultat fait appel aux aires (comme chaque fois qu'il parle de produit de longueurs), mais pas le raisonnement.
(9) Mais ils sont censés savoir lire un plan, voire en dresser un… Comprenne qui pourra.

Voyons ce que donne le second point de vue.

Une présentation possible

Soit un triangle ABC tel que $CB^2 + CA^2 = AB^2$. Le triangle ABC étant tracé, construisons un triangle A′BC rectangle en C tel que CA′ = CA, A′ étant du même côté que A par rapport à la droite (CB), ce qui est au menu de la cinquième : « *construire un triangle connaissant […] les longueurs de deux côtés et l'angle compris entre les deux* ».

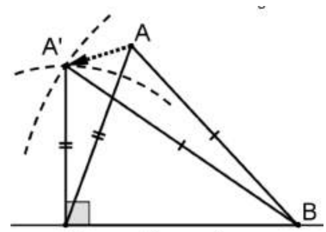

figure 4

D'après le théorème de Pythagore,

$$A'B^2 = CB^2 + CA'^2 = CB^2 + CA^2 = AB^2.$$

Or (programme de quatrième) deux nombres qui ont même carré sont égaux… car, en appuyant sur la touche $\sqrt{}$ de la calculatrice, on obtient un seul résultat ! Donc A′B = AB. Ainsi A′ et A sont à l'intersection du cercle de centre C et de rayon CA, et du cercle de centre B et de rayon BA, du même côté de la droite(BC). Ils sont donc confondus[10].

4. La généralisation au triangle quelconque

Théorème

Étant donné un triangle ABC *: si son angle en* C *est aigu,* $AB^2 < CA^2 + CB^2$ *; si son angle en* C *est droit,* $AB^2 = CA^2 + CB^2$ *; si son angle en* C *est obtus,* $AB^2 > CA^2 + CB^2$.

Démonstration sans calculs

Pour qui considère qu'utiliser la position relative de deux cercles n'est pas un damnable recours à l'intuition visuelle, il est possible de procéder comme suit :

Soit un triangle ABC rectangle en C et supposons (ce qu'on peut toujours faire) CA ≤ CB pour être dans le cas de la figure.

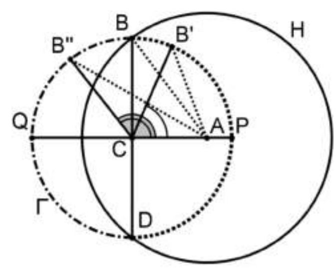

figure 6

Le cercle Γ de centre C passant par B et le cercle H de centre A passant par B se recoupent en D, symétrique de B par rapport à la droite (CA).

Soit B′ un point de Γ tel que $\widehat{ACB'}$ soit aigu ; il est sur l'arc DPB, qui (sauf ses extrémités) est tout entier intérieur à H, donc AB′ < AB, autrement dit :

(10) On peut objecter que l'intersection de deux cercles n'est au programme d'aucune classe (ce qui pourrait faire ricaner un observateur malveillant). Mais, dans le programme de cinquième, la rubrique « *construire un triangle connaissant […] les longueurs de trois côtés* » en tient lieu.

$\mathrm{AB}' < \sqrt{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}'^2}$.

Prenons maintenant un point B″ de tel que $\widehat{\mathrm{ACB}''}$ soit obtus ; il est sur l'arc DQB, qui est tout entier extérieur à H (sauf ses extrémités), donc AB″ > AB, autrement dit

$\mathrm{AB}'' > \sqrt{\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}''^2}$.

Remarque : cette démonstration peut être illustrée par une animation sur *GeoGebra* : on fait décrire l'arc de cercle PBQ à un point M et l'on suit en même temps les variations de AM et de l'angle $\widehat{\mathrm{ACM}}$.

Démonstration calculatoire

Cette démonstration suit fidèlement celles des propositions 12 (angle obtus) et 13 (angle aigu) du livre II des Éléments d'Euclide.

Soit un triangle ABC et H le pied de la hauteur issue de A. On se propose d'étudier le signe de $\Delta = \mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 - \mathrm{AB}^2$ selon la valeur de l'angle $\widehat{\mathrm{ACB}}$.
On a $\mathrm{CA}^2 = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{HA}^2$ et $\mathrm{AB}^2 = \mathrm{BH}^2 + \mathrm{HA}^2$, d'où $\Delta = \mathrm{CH}^2 - \mathrm{BH}^2 + \mathrm{CB}^2$.

▪ Si $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est obtus (figure 6), C est entre H et B, donc BH = BC + CH,
d'où $\Delta = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{CB}^2 - (\mathrm{CH} + \mathrm{CB})^2$, soit $\Delta = -\,2\mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$, et l'on a $\Delta < 0$.

▪ Si $\widehat{\mathrm{ACB}}$ est aigu (figures 6 bis et 6 ter), C n'est pas entre H et B, donc $\mathrm{HB} = |\mathrm{CH} - \mathrm{CB}|$; $\Delta = \mathrm{CH}^2 + \mathrm{CB}^2 - (\mathrm{CH} - \mathrm{CB})^2$, soit $\Delta = 2\mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$, et l'on a $\Delta > 0$.

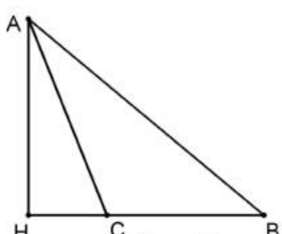

figure 6

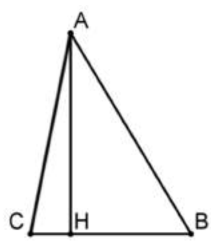

figure 6 bis

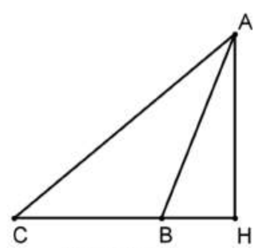

figure 6 ter

Remarque 1 : Cette démonstration a un avantage pédagogique, à savoir donner un exemple naturel d'utilisation du théorème de Pythagore.

Remarque 2 : La formule ($\mathrm{CA}^2 + \mathrm{CB}^2 - \mathrm{AB}^2 = \pm\, 2\mathrm{CH} \times \mathrm{CB}$ (+ pour l'angle aigu, − pour l'angle obtus) est aux notations près celle obtenue par Euclide. Il suffirait, si on disposait de la mesure d'un segment sur une droite orientée, de raisonner sur $\overline{\mathrm{CH}}$ et d'écrire $\overline{\mathrm{CH}} = \mathrm{CA} \cos \widehat{\mathrm{ACB}}$ pour voir apparaître la « formule d'Al Kashi »… ce qui prouve en outre qu'il y a quelque injustice à faire d'un mathématicien du XV$^{\mathrm{e}}$ siècle l'auteur d'un très ancien résultat qu'il n'a fait qu'habiller à neuf.

Réciproque

On a ainsi vu que

<table>
<tr><td rowspan="3">Si l'angle en C est</td><td>aigu</td><td rowspan="3">le carré de AB est</td><td>inférieur</td><td rowspan="3">à la somme des carrés des deux autres côtés</td></tr>
<tr><td>droit</td><td>égal</td></tr>
<tr><td>obtus</td><td>supérieur</td></tr>
</table>

Les trois conclusions s'excluant, les réciproques sont valables.

5. Exercices curieux ou célèbres

Carré inscrit dans un demi-cercle

Énoncé : *On donne un carré* ABCD *de côté* 2 *et le demi-cercle de diamètre* [AB] *intérieur au carré* ; O *désigne le milieu de* [AB], Q *celui de* [CD]. *Les segments* [OD] *et* [OC] *coupent respectivement le demi-cercle en* E *et* F, *qui se projettent sur* [AB] *en* G *et* H. *Donner la nature et l'aire du quadrilatère* EFGH.

Solution : 1) La droite (OQ) est axe de symétrie du carré ABCD et du demi-cercle, donc de la figure tout entière. [EG] et [FH] se correspondent par cette symétrie et sont parallèles à (OQ) donc EFHG est un rectangle. En appliquant le théorème de Thalès, on obtient $\frac{OH}{OB}=\frac{FH}{CB}$, d'où $\frac{FH}{OH}=\frac{CB}{OB}$, donc FH = 2OH et finalement FH = GH. Le rectangle EFHG a deux côtés adjacents égaux, c'est un carré.

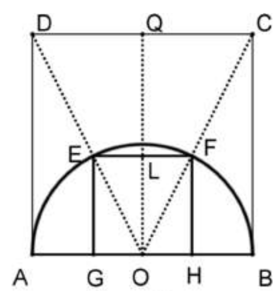

figure 7

2) Le théorème de Pythagore appliqué au triangle OBC donne $OC=\sqrt{5}$. D'après le théorème de Thalès, $\frac{HF}{BC}=\frac{OF}{OC}=\frac{1}{\sqrt{5}}$, d'où $HF=\frac{2}{\sqrt{5}}$. L'aire cherchée est donc $\frac{4}{5}$.

Un trapèze rectangle

Énoncé : *On donne un trapèze* ABCD, *rectangle en* A *et* D, *tel que* AB = 2, BC = 1 *et qu'une des diagonales soit de longueur* 2. *Quelle est cette diagonale ? Quelle est la plus grande des deux bases ? Quelles sont les longueurs* CD *et* DA *?*

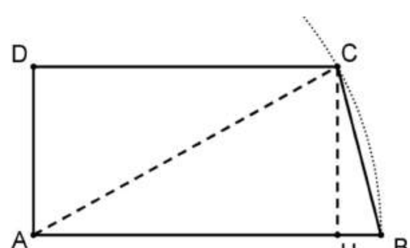

figure 8

Solution : L'hypoténuse BD du triangle ABD est strictement plus grande que le côté AB, donc la diagonale de longueur 2 est AC. L'hypoténuse AC du triangle DAC est strictement plus grande que le côté CD, donc CD < 2.

Soit H la projection de C sur (AB) ; puisque CD < AB, H est entre A et B. Appliquons le théorème de Pythagore à HCA et HBC.

On a le système (S) : $\begin{cases} HA^2 + HC^2 = AC^2 = 4 \\ HB^2 + HC^2 = BC^2 = 1 \end{cases}$.

En retranchant la seconde équation de la première, il vient $HA^2 - HB^2 = 3$, soit encore $(HA - HB)(HA + HB) = 3$ et comme $HA + HB = AB = 2$ on obtient $HA - HB = \dfrac{3}{2}$.

De $\begin{cases} HA + HB = 2 \\ HA - HB = \dfrac{3}{2} \end{cases}$, on tire $HA = \dfrac{7}{4}$ et donc $CD = \dfrac{7}{4}$.

Reste à utiliser $AD^2 = AC^2 - CD^2 = 4 - \dfrac{49}{16} = \dfrac{15}{16}$, d'où $AD = \dfrac{\sqrt{15}}{4}$.

Remarque : On peut trouver plus agréable d'introduire deux inconnues : $AH = x$, $AD = y$. Les deux équations (S) deviennent $x^2 + y^2 = 4$ et $(2 - x)^2 + y^2 = 1$. La différence donne $4x = 7$.

Quadrilatères orthodiagonaux

Théorème : *Si un quadrilatère convexe a ses diagonales perpendiculaires, la somme des carrés de deux côtés opposés est égale à la somme des carrés des deux autres.*

Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires en un point J. En appliquant le théorème de Pythagore aux triangles JAB et JCD, il vient :

$$AB^2 + CD^2 = JA^2 + JB^2 + JC^2 + JD^2.$$

En l'appliquant aux triangles JBC et JDA, on obtient

$$BC^2 + DA^2 = JB^2 + JC^2 + JD^2 + JA^2,$$

d'où finalement $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$.

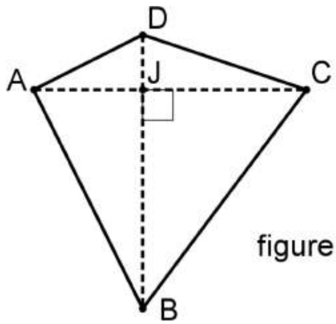

figure 9

Réciproque : *Si la somme des carrés de deux côtés opposés d'un quadrilatère convexe est égale à la somme des carrés des deux autres, ses diagonales sont perpendiculaires.*

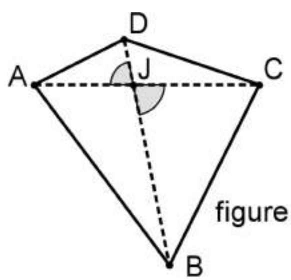

figure 9 bis

On raisonne par l'absurde. Soit un quadrilatère convexe ABCD dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en un point J. On suppose qu'il vérifie $AB^2 + CD^2 = BC^2 + DA^2$ et que par exemple, ce qui n'est pas restrictif, $\widehat{BJC}$ et donc aussi $\widehat{\text{AJD}}$ sont aigus. D'après le théorème du paragraphe 4, on a $BC^2 < JB^2 + JC^2$ et $DA^2 < JD^2 + JA^2$, d'où

$$BC^2 + DA^2 < JA^2 + JB^2 + JC^2 + JD^2. \qquad (1)$$

Les angles $\widehat{\text{AJB}}$ et $\widehat{\text{CJD}}$ étant obtus, on a $AB^2 > JA^2 + JB^2$ et $CD^2 > JC^2 + JD^2$, dont on tire

$$AB^2 + CD^2 > JA^2 + JB^2 + JC^2 + JD^2. \qquad (2)$$

En confrontant les inégalités (1) et (2), on obtient $AB^2 + CD^2 > BC^2 + DA^2$, contraire à l'hypothèse.

Théorème des deux lunules

Un peu d'histoire : Ce théorème est dû à Hippocrate de Chios, qui vécut à Athènes au V^e siècle avant notre ère (ne pas confondre avec son contemporain Hippocrate de Cos, père de la médecine). Il fut, dit-on, le premier à rédiger un livre d'éléments de géométrie, maintenant perdu. Dans ses tentatives sur la quadrature du cercle, il établit plusieurs résultats sur les « lunules », une lunule étant la portion de plan comprise entre deux arcs de cercles de mêmes extrémités.

Énoncé : *Étant donné un triangle* ABC *rectangle en* C, *on trace les trois demi-cercles de diamètres* [AB], [AC] *et* [BC], *leur choix étant fait comme indiqué sur la figure. On détermine ainsi deux lunules de pointes* A *et* C *pour l'une,* B *et* C *pour l'autre.*
Il s'agit de démontrer que la somme des aires de ces deux lunules est égale à l'aire du triangle ABC.

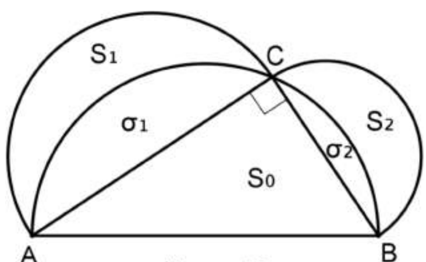

figure 10

Démonstration : Avec pour les aires les notations indiquées sur la figure, on a :

$$S_1 + \sigma_1 = \frac{\pi}{8} AC^2 \qquad (1)$$

$$S_2 + \sigma_2 = \frac{\pi}{8} BC^2 \qquad (2)$$

$$S_0 + \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\pi}{8} AB^2 \qquad (3)$$

En faisant (1) + (2) – (3), il vient :

$$S_1 + S_2 - S_0 = \frac{\pi}{8}\left(AC^2 + BC^2 - AB^2\right) = 0 \quad .$$

Arbelos d’Archimède

Un peu d’histoire : Ce problème constitue la quatrième proposition (sur quinze) du *Livre des lemmes*, opuscule d’une dizaine de pages que nous connaissons seulement par une version arabe du IXe siècle. On ne sait s’il s’agit d’un recueil par Archimède de problèmes anciens ou de résultats épars tardivement attribués à Archimède. Le mot αρβηλος signifie « tranchoir de cordonnier », terme justifié par la forme de la figure.

Énoncé : *On donne trois points alignés* A, B, C*, tels que* B *soit entre* A *et* C*. D’un côté de la droite* Δ *qui les porte, on trace les demi-cercles de diamètres respectifs* [AB], [BC], [AC]*. Soit* D *le point d’intersection de la perpendiculaire en* B *à* Δ *avec le demi-cercle de diamètre* [AC]*. Établir que l’aire de la région délimitée par les trois demi-cercles est égale à celle du cercle de diamètre* [BD].

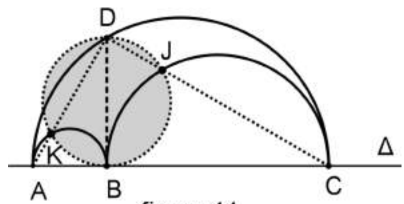

figure 11

Démonstration : Soit S l’aire de la région délimitée par les trois demi-cercles. On a évidemment :

$$S = \frac{1}{2} \times \frac{\pi}{4}\left(AC^2 - AB^2 - BC^2\right).$$

Comme le triangle ADC est rectangle en D, on a $AC^2 = AD^2 + DC^2$.
On en tire

$$S = \frac{\pi}{8}\left(AD^2 - AB^2 + DC^2 - BC^2\right).$$

On applique encore deux fois le théorème de Pythagore, à ABD et CBD, et on obtient

$$S = \frac{\pi}{4} BD^2 .$$

Remarque : Une bonne application du programme (« *Caractériser les points d’un cercle de diamètre donné par la propriété de l’angle droit* ») est de faire établir que, si le cercle de diamètre [BD] coupe le demi-cercle de diamètre [AB] en K et le demi-cercle de diamètre [BC] en J, KBJD est un rectangle, K est sur la droite (AD) et J sur (CD).

Théorème de Gua

Ce théorème, qui fut publié par Jean Paul de Gua en 1783 mais qui semble avoir été connu d’auteurs antérieurs, constitue une jolie extension du théorème de Pythagore à l’espace. La démonstration dépasse le programme du collège, mais elle est simple et je la donne pour le plaisir.

Énoncé : *On donne un tétraèdre* OABC *tel que les droites* (OA), (OB), (OC) *soient deux à deux orthogonales. Alors le carré de l'aire de la face* ABC *est égal à la somme des carrés des aires des trois autres faces.*

Démonstration

Désignons par H la projection orthogonale de O sur la droite (AB). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est orthogonal au vecteur $\overrightarrow{CO}$, et, par définition de H, au vecteur $\overrightarrow{OH}$ donc à leur somme $\overrightarrow{CH}$: [CH] est donc hauteur du triangle ABC.

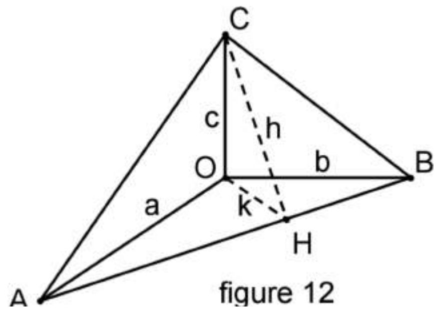

figure 12

L'aire S du triangle est, avec les notations de la figure 12, $S = \frac{1}{2} h \, AB$.

On a $S^2 = \frac{1}{4} h^2 \, AB^2 = \frac{1}{4}\left(c^2 + k^2\right) AB^2$.

Mais $\frac{1}{4} k^2 \, AB^2$ est le carré de l'aire OAB ; en outre

$$\frac{1}{4} c^2 \, AB^2 = \frac{1}{4} c^2 \left(a^2 + b^2\right) = \left(\frac{1}{2} ca\right)^2 + \left(\frac{1}{2} cb\right)^2.$$

On a bien finalement :

$$\left(\text{Aire ABC}\right)^2 = \left(\text{Aire OAB}\right)^2 + \left(\text{Aire OBC}\right)^2 + \left(\text{Aire OCA}\right)^2.$$

Conclusion

Citons pour finir la vénérable *Histoire des mathématiques* de Charles Bossut (1810) :

« Le nom de Pythagore est immortel dans les annales de la géométrie, par la découverte qu'il fit de l'égalité du carré de l'hypoténuse, dans le triangle rectangle, avec la somme des carrés des deux autres côtés. Certains auteurs racontent que, transporté de joie et de reconnaissance envers les dieux de l'avoir si bien inspiré, il leur sacrifia cent boeufs ; mais on a de la peine à concilier cette hécatombe avec la fortune bornée du philosophe, et plus encore avec ses opinions religieuses sur la transmigration des âmes. Quoi qu'il en soit, jamais enthousiasme ne fut mieux fondé[11]. »

z(11) http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62433r/f44.image