

# Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à  
Max HOCHART  
13, rue des Garennes  
63 800 Cournon d'Auvergne

ou  
hochartmax@yahoo.fr  
\* \* \* \* \*

## Énoncés des nouveaux problèmes

### Problème 514–1 (Michel Lafond)

Un hexagone ayant un centre de symétrie est inscrit dans un cercle. On mesure en centimètres les distances d'un point  $M$  du plan à cinq sommets de l'hexagone. Ces distances, arrondies à l'entier le plus proche sont, par valeurs croissantes :  
21, 53, 69, 97 et 118.

Calculer à 1 cm près la distance de  $M$  au sixième sommet.

### Problème 514–1

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  dérivable. On suppose que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = f(x - 1)$  et que  $f$  est bornée. Montrer que  $f$  est nulle. Étudier cet énoncé en prenant ensuite une fonction dérivable  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $I$  n'est pas l'intervalle  $\mathbb{R}$  tout entier.

### Problème 514–3 (Jean-Pierre Friedelmeyer)

Un cercle  $(O)$  osculateur en un point  $A$  d'une parabole  $(\mathcal{P})$  d'axe  $(d)$  recoupe celle-ci en un unique point  $B$ . Démontrer que les angles que font  $(OA)$  et  $(OB)$  avec l'axe  $(d)$  vérifient

$$(d, OB) \equiv -3(d, OA) \pmod{\pi}.$$

Un cercle  $(O)$  coupe une parabole  $(\mathcal{P})$  d'axe  $(d)$  en quatre points  $A, B, C, D$ . Démontrer que

$$(\vec{d}, \overrightarrow{OA}) + (\vec{d}, \overrightarrow{OB}) + (\vec{d}, \overrightarrow{OC}) + (\vec{d}, \overrightarrow{OD}) \equiv 0 \pmod{\pi},$$

la droite  $(d)$  étant orientée arbitrairement.

## Solutions des problèmes antérieurs

### Commentaire de Jean-Philippe Cortier sur le problème 503-3

J'ai reçu une jolie solution à ce problème. Il s'agissait de montrer que, pour un entier  $n \in \mathbb{N}^*$ , un nombre premier  $p \geq 3$ , et un sous groupe fini  $G$  de  $GL_n(\mathbb{Z})$ , l'application

$$\begin{cases} G \rightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ A \mapsto A \bmod p \end{cases}$$

est injective. L'argument naturel de **Jean-Philippe Cortier** (Troyes) est le suivant.

Soit  $A \in G$ . D'après Lagrange, si  $m$  est le cardinal de  $G$ , alors  $A^m = I_n$ . La matrice  $A$  est donc diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et ses valeurs propres sont des racines de l'unité, donc de module 1. Supposons de plus que  $A \equiv I_n \bmod p$ . Ainsi,  $B = \frac{1}{p}(A - I_n)$  est une matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ , diagonalisable sur  $\mathbb{C}$  et son spectre est

$$\left\{ \frac{\lambda - 1}{p} \mid \lambda \in \mathrm{sp}(A) \right\}.$$

En particulier, une valeurs propre de  $B$  vérifie

$$|\mu| \leq \frac{2}{p} < 1,$$

puisque  $p \geq 3$ . Donc la suite  $(B^k)_{k \in \mathbb{N}}$  converge vers la matrice nulle. Étant formée de matrices à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , cette suite est stationnaire. Finalement,  $B$  est nilpotente et diagonalisable, donc nulle. Ainsi,

$$A = I_n + pB = I_n;$$

ce qu'il fallait démontrer.

### Problème 504-1 (Moubinool Omarjee, Lycée Henri IV, Paris)

On note  $\lfloor \cdot \rfloor$  la fonction partie entière et, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_n$  est le  $n$ -ième nombre premier. Étudier la nature de la série

$$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}}{p_n}.$$

### Réponses de Moubinool Omarjee (Paris) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Les deux réponses utilisent des résultats sur la répartition des nombres premiers et une transformation d'Abel.

La solution que propose **Moubinool Omarjee** suppose connu un résultat très fin de théorie analytique des nombres, dû à **Jean-Louis Nicolas**<sup>(1)</sup>

$$p_{n+1} - p_n \leq p_n^{5/8}.$$

**Pierre Renfer** utilise lui un développement asymptotique de  $p_n$  :

$$p_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} n \ln(n) + \mathcal{O}(n \ln(\ln(n))).$$

Ainsi,

(1) Jean-Louis Nicolas, Répartition des nombres premiers, Séminaire Delange-Pisot-Poitou, Théorie des nombres, tome 9, numéro 2 (1967-1968).

$$\frac{1}{p_n} - \frac{1}{n \ln(n)} = \frac{n \ln(n) - p_n}{n \ln(n) p} \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}\left(\frac{\ln(\ln(n))}{n \ln^2(n)}\right)$$

Par conséquent,

$$\left| \frac{1}{p_n} - \frac{1}{n \ln(n)} \right| \underset{n \rightarrow +\infty}{=} o\left(\frac{1}{n \ln^{3/2}(n)}\right).$$

En utilisant les séries de Bertrand, on voit que les séries  $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}}{p_n} w$  et

$\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}}{n \ln(n)}$  sont de même nature.

On va maintenant montrer que cette seconde série converge, en effectuant une transformation d'Abel. Pour  $n \in \mathbb{N}$ , on pose

$$S_N = \sum_{n=2}^N \frac{(-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor}}{n \ln(n)} \quad (N \geq 2)$$

et

$$\sigma_N = \sum_{n=1}^N (-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor} \quad (N \geq 1)$$

Ainsi,

$$S_N = \sum_{n=2}^N (\sigma_n - \sigma_{n-1}) \frac{1}{n \ln(n)}.$$

On coupe les sommes en deux et l'on fait un décalage d'indices :

$$S_N = \sum_{n=2}^N \frac{\sigma_n}{n \ln(n)} - \sum_{n=1}^{N-1} \frac{\sigma_n}{(n+1) \ln(n+1)}.$$

On isole un terme dans chaque somme et l'on regroupe la partie commune :

$$S_N = \frac{\sigma_N}{N \ln(N)} + \sum_{n=2}^N \sigma_n \left( \frac{1}{n \ln(n)} - \frac{1}{(n+1) \ln(n+1)} \right) - \frac{\sigma_1}{2 \ln(2)}.$$

Donc

$$S_N = \frac{\sigma_N}{N \ln(N)} + \sum_{n=2}^N \frac{\sigma_n \left( (n+1) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln(n) \right)}{n(n+1) \ln(n) \ln(n+1)} - \frac{\sigma_1}{2 \ln(2)}.$$

Admettons provisoirement que  $\sigma_n \underset{n \rightarrow +\infty}{=} \mathcal{O}(\ln(n))$ . Alors le terme général dans la

somme ci-dessus est un  $\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Donc  $(S_N)$  converge, ce qui permet de conclure.

Il reste à prouver la domination  $\sigma_n = \mathcal{O}(\ln(n))$ . Pour cela, on introduit les notations suivantes. Pour deux réels  $x > 1$  et  $\varphi > 0$ , posons

$$\sigma(\varphi, x) = \frac{1}{4} + \sum_{n=1}^{\left\lfloor \frac{x}{\varphi} \right\rfloor} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0 < n\varphi \leq x} (-1)^{\lfloor n\varphi \rfloor}.$$

Le théorème de Beatty stipule que pour deux réels  $\alpha, \beta > 1$  les ensembles  $\{\lfloor n\alpha \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  et  $\{\lfloor n\beta \rfloor \mid n \in \mathbb{N}^*\}$  forment une partition de  $\mathbb{N}^*$  si et seulement si  $\alpha$  et  $\beta$  sont irrationnels et vérifient  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$ . On choisit par la suite  $\alpha = \sqrt{2}$  et

$$\beta = \frac{1}{1 - \frac{1}{\alpha}} = 2 + \sqrt{2}.$$

Pour  $x \geq 1$ , les entiers  $\lfloor n\alpha \rfloor$  et  $\lfloor n\beta \rfloor$  qui appartiennent à  $]0, x]$  forment une partition de tout l'ensemble  $[[1, m]]$  où l'entier  $m$  vaut  $\lfloor x \rfloor$  ou  $\lfloor x \rfloor - 1$ . Ainsi, pour  $N \in \mathbb{N}, N \geq 1$  et  $x \geq 1$ ,

$$\sigma(\alpha, x) + \sigma(\beta, x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^m (-1)^k = \pm \frac{1}{2},$$

selon la parité de  $m$ . Donc

$$\left| \sigma(\sqrt{2}, x) \right| \leq \left| \sigma(2 + \sqrt{2}, x) \right| + \frac{1}{2}. \quad (1)$$

Par ailleurs, l'encadrement  $0 < n(2 + \sqrt{2}) \leq x$  équivaut à  $0 < n\sqrt{2} \leq (\sqrt{2} - 1)x$ .  
Donc

$$\sigma(2 + \sqrt{2}, x) = \frac{1}{4} + \sum_{0 < n(2 + \sqrt{2}) \leq x} (-1)^{\lfloor n(2 + \sqrt{2}) \rfloor} = \frac{1}{4} + \sum_{0 < n\sqrt{2} \leq (\sqrt{2} - 1)x} (-1)^{\lfloor n\sqrt{2} \rfloor},$$

c'est-à-dire que

$$\sigma(2 + \sqrt{2}, x) = \sigma(\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)x). \quad (2)$$

Les relations (1) et (2) donnent

$$\left| \sigma(\sqrt{2}, x) \right| \leq \left| \sigma(\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)x) \right| + \frac{1}{2}.$$

Par itération, on obtient pour tout entier  $k \in \mathbb{N}$ ,

$$\left| \sigma(\sqrt{2}, x) \right| \leq \left| \sigma(\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)^k x) \right| + \frac{k}{2}.$$

On choisit

$$k = 1 + \left\lfloor \frac{\ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)}{\ln(\sqrt{2} + 1)} \right\rfloor,$$

pour lequel

$$(\sqrt{2} - 1)^k x < \sqrt{2}$$

et

$$\left| \sigma\left(\sqrt{2}, (\sqrt{2} - 1)^k x\right) \right| = \frac{1}{4}.$$

En revenant à la somme initiale  $\sigma_n$ ,

$$\sigma_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{\lfloor k\sqrt{2} \rfloor} = \sigma(\sqrt{2}, n\sqrt{2}) - \frac{1}{4},$$

donc

$$|\sigma_n| \leq \frac{1}{4} + \left| \sigma(\sqrt{2}, n\sqrt{2}) \right| \leq \frac{1}{2} + \frac{k}{2} = \mathcal{O}(\ln(n)),$$

comme souhaité.

**Problème 504-2 (Ghali Lalami (Marrakech))**

Trouver tous les  $n \in \mathbb{N}$  tels que  $3^n - 2$  soit un carré parfait.

**Réponses de Maurice Bauval (Versailles) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)**

Les entiers  $n = 1$  et  $n = 3$  sont des solutions évidentes :

$$3^1 - 2 = 1^2 \text{ et } 3^3 - 2 = 5^2;$$

On va montrer que ce sont les seules. Soit  $n$  une solution. Tout d'abord,  $n$  est nécessairement impair, car si  $n$  était pair, disons  $n = 2p$ , alors il existerait  $a \in \mathbb{N}$  tel que

$$3^{2p} - 2 = a^2,$$

soit encore

$$(3^p + a)(3^p - a) = 2.$$

Comme  $3^p + a$  est strictement positif, la seule possibilité serait

$$3^p + a = 2 \text{ et } 3^p - a = 1,$$

donc

$$2 \times 3^p = 3,$$

ce qui est impossible.

On cherche désormais les éventuelles solutions impaires autres que 1 et 3 sous la forme  $n = 3 + 2p$  avec  $p > 1$ . On pose  $b = 3^p$ . Il existe donc  $a \in \mathbb{N}$  tel que

$$3^n - 2 = a^2,$$

ce que l'on écrit

$$27b^2 - a^2 = 2.$$

C'est une équation de type Pell-Fermat. Il s'agit de trouver parmi les solutions  $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  celles donc l'abscisse  $b$  est une puissance de 3 (autre que 1).

Les premières solutions dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$  sont

$$(b, a) = (1, 5) ; (51, 265) ; (2651, 13775).$$

Si  $\Omega$  est une partie de  $\mathbb{R}$ , on note  $\mathcal{H}(\Omega)$  l'ensemble des points  $M(x, y)$  de l'hyperbole d'équation  $27x^2 - y^2 = 2$  à coordonnées dans  $\Omega \times \Omega$ . Ainsi,  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$  est toute l'hyperbole tandis que  $\mathcal{H}(\mathbb{Z})$  est l'ensemble des points à coordonnées entières relatives, etc. On va montrer que les points de  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$  sont exactement les points

$$M_0(1, 5) \text{ et } M_n = A^n M_0 \quad (n \in \mathbb{N})$$

où  $A$  est la matrice inversible

$$A = \begin{pmatrix} 26 & 5 \\ 135 & 26 \end{pmatrix}.$$

Soit  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  et  $(x', y') \in \mathbb{R}^2$  tels que

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 26x + 5y \\ 135x + 26y \end{pmatrix}.$$

On vérifie facilement que

$$27x'^2 - y'^2 = 27(26x + 5y)^2 - (135x + 26y)^2 = 27x^2 - y^2.$$

Ainsi,

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{R}) \quad (3)$$

De plus, comme la matrice  $A$  est à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ , si  $(x, y)$  est dans  $\mathbb{Z}^2$  alors  $(x', y')$  est dans  $\mathbb{Z}^2$ . Et comme  $\det(A) = 1$ , la matrice  $A^{-1}$  est aussi à coefficients dans  $\mathbb{Z}$ . Donc

$$(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \quad \text{si et seulement si} \quad (x', y') \in \mathcal{H}(\mathbb{Z}) \quad (4)$$

Les coefficients de  $A$  étant même dans  $\mathbb{N}$ , si  $(x, y) \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$ , alors  $(x', y')$  est dans  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ . Puisque  $M_0$  est dans  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ , tous les points  $M_n = A^n M_0$  sont dans  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

Par ailleurs, l'application  $f : X \mapsto AX$  définit une bijection sur  $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ , et envoie le point  $M_n$  sur le point  $M_{n+1}$ . Comme elle est continue, elle préserve la connexité. Elle envoie l'arc d'hyperbole  $\widehat{M_n M_{n+1}}$  sur un arc d'hyperbole contenant  $\widehat{M_{n+1} M_{n+2}}$ . Or on munit  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$  d'une relation d'ordre total de la façon suivante :  $M_1(x_1, y_1) \leq M_2(x_2, y_2)$  si et seulement si  $x_1 \leq x_2$  (auquel cas  $y_1 \leq y_2$ ). Pour cette

relation d'ordre,  $f$  est strictement croissante sur  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$ . Donc  $f$  envoie exactement l'arc d'hyperbole  $\widehat{M_n M_{n+1}}$  sur  $\widehat{M_{n+1} M_{n+2}}$ .

Soit  $M \in \mathcal{H}(\mathbb{N})$ . Puisque la suite des abscisses des points  $M_n$  tend vers  $+\infty$  quand  $n$  tend vers  $+\infty$ , il existe un entier  $n$  tel que  $M \in \widehat{M_{n+1} M_{n+2}}$ . D'après ce qui précède,

$$A^{-n} M \in \widehat{M_0 M_1} \cap \mathcal{H}(\mathbb{N}) = \{M_0, M_1\}.$$

Donc le point  $M$  est soit le point  $M_n$  soit le point  $M_1$ , ce qui prouve, comme annoncé, que les points de  $\mathcal{H}(\mathbb{N})$  sont exactement les points

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} b_0 \\ a_0 \end{pmatrix} \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

Or

$$A^2 = \text{tr}(A)A - \det(A)I_2 = 52A - I_2,$$

donc

$$\begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = A^2 \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = (52A - I_2) \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix} = 52 \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ a_{n+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_n \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Finalement, toutes les solutions  $(b, a) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  de l'équation

$$27b^2 - a^2 = 2$$

sont données par

$$\begin{pmatrix} b_0 = 1 \\ a_0 = 5 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} b_1 = 51 \\ a_1 = 265 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ a_{n+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 52b_{n+1} - b_n \\ 52a_{n+1} - a_n \end{pmatrix}.$$

Cherchons maintenant les puissances de 3 (autre que 1) parmi les  $b_n$ . On remarque que

$$b_{n+2} = 52b_{n+1} - b_n \equiv b_n - b_{n-1} \pmod{51}$$

et que  $51 = 3 \times 17$ . Voici les premières valeurs de la suite  $(b_n \pmod{51})_{n \in \mathbb{N}}$  :

| $n$             | 0 | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 | 6 | 7 |
|-----------------|---|---|----|----|---|---|---|---|
| $b_n \pmod{51}$ | 1 | 0 | 50 | 50 | 0 | 1 | 1 | 0 |

La suite  $(b_n \pmod{51})_{n \in \mathbb{N}}$  est donc périodique de période 6. Il en est de même des suites  $(b_n \pmod{3})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(b_n \pmod{17})_{n \in \mathbb{N}}$ . Or voici ces deux suites :

| $n$             | 0 | 1 | 2  | 3  | 4 | 5 |
|-----------------|---|---|----|----|---|---|
| $b_n \pmod{3}$  | 1 | 0 | 2  | 2  | 0 | 1 |
| $b_n \pmod{17}$ | 1 | 0 | 16 | 16 | 0 | 1 |

les motifs se répétant ensuite. On en déduit que l'entier  $b_n$  est divisible par 3 si et seulement si il est divisible par 17. Donc  $b_n$  n'est jamais une puissance de 3. Il s'ensuit qu'il n'existe aucune autre solution au problème initial.