Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 514–1 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans

On considère un triangle ABC ; on désigne par A′, B′ et C′ les milieux respectifs des côtés [BC], [CA] et [AB].
Soient M le milieu de [A′C], N le milieu de [B′A] et P le milieu de [C′B].
Soient J le point d'intersection de [B′P] et [C′M], K le point d'intersection de [C′M] et [A′N] et L le point d'intersection de [A′N] et [B′P].
Calculer l'aire s du triangle JKL en fonction de l'aire S du triangle ABC.

Exercice 514–2 *pour nos élèves*

A – *d'après le concours mathématique du Québec de 1987*
Effectuer le produit suivant :

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{2015^2}\right).$$

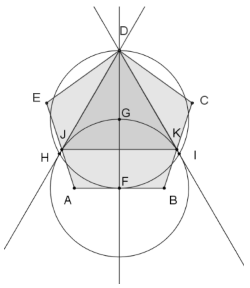
B – *tiré du concours canadien de mathématiques de 2011*
Dans un carré magique, les nombres de chaque rangée, de chaque colonne et de chaque diagonale ont la même somme.
Le tableau ci-dessous est un carré magique tel que les nombres a, b et c soient strictement positifs.

log a	log b	log x
p	log y	log c
log z	q	r

Exprimer le produit xyz en fonction de abc.

Exercice 514–3 *tiré du « livre de ce qui est nécessaire à l'artisan en constructions géométriques »*

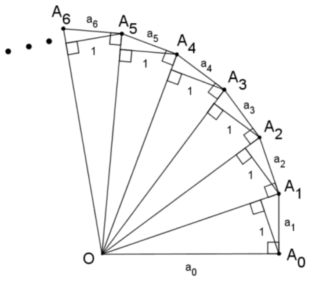
La construction décrite ci-après propose l'inscription d'un triangle équilatéral dans un pentagone régulier.
ABCDE est un pentagone régulier, F est le milieu de [AB].
G est le centre du cercle de diamètre [FD].
Le cercle de centre F passant par G recoupe ce premier cercle en H et I.
Les droites (DH) et (DI) recoupent le pentagone en J et K.
Le triangle DJK répond à la demande.
Cette construction est-elle exacte ?



Exercice 514–4 Crux Mathematicorum *Mathematical Mayhem 114*

Dans le simili escargot de Pythagore ci-contre, les hauteurs relatives aux hypoténuses mesurent une unité.
Les a_i désignent les mesures des segments.
Montrer que

$$a_0^2 + a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2 = a_0^2 a_1^2 a_2^2 \cdots a_n^2 .$$



Solutions

Exercice 512–1 Jean-Christophe Laugier – Rochefort

Paul a reçu pour ses étrennes le 1er janvier 2014 une belle montre avec dateur. Mais il a été très désappointé quand, le 1er mars, la montre n'a pas affiché « 1 » comme attendu mais « 29 ». Pour le dateur tous les mois ont 31 jours !
On supposera dans la suite que Paul n'effectue aucune correction sur le dateur.

1) Quand, pour la première fois après le 1er mars 2014, la montre affichera-t-elle une date correcte ?
2) Notons d(n) la date affichée par la montre le 1er janvier de l'an 2014 + n ; donc d(0) = 1.
   Quelle est la période T de la suite (d(n)) ?
3) Quelles sont les années pendant la période [2014 ; 2014 + T] au cours desquelles la montre affichera une date correcte ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Jean-Yves Hély (Rennes).

- Voici la solution de Pierre Renfer.

1) Le premier mars, la montre retarde de trois jours si l'année n'est pas bissextile et de deux jours si elle est bissextile.
Par ailleurs elle retarde d'un jour les premiers des mois de mai, juillet, octobre et décembre.
Elle retarde donc de 7 jours après une année non bissextile et de 6 jours après une année bissextile.

   Le premier janvier 2018, la montre retarde de 27 jours (l'année 2016 étant bissextile).
Le premier mars 2018, elle retarde de 30 jours.
Le premier mai 2018, elle affiche enfin la date correcte.

2) Sont bissextiles les années dont le millésime M vérifie :
(M est multiple de 4 sans être multiple de 100) ou (M est multiple de 400).
La suite d(n) a donc une période de 400 × 31 = 12 400.

3) Pour trouver les années au cours des lesquelles la montre affiche la date correcte le premier janvier, on peut utiliser le petit programme suivant en Maple :

```
> restart;u:=0;
> for n from 1 to 12400 do if ((irem(n,4)=2 and not(irem(n,100)=86)) or irem(n,400)=386) then u:=u+6 else u:=u+7;fi;if irem(u,31)=0 then print(n+2014);fi; od;
```

Remarque.
Voici les dates (année, mois) pour le XXI^{e} siècle fournies par Marie-Nicole Gras et Jean-Yves Hély
2018 : 05, 06 ; 2027 : 07, 08, 09 ; 2032 : 03, 04 ; 2036 : 12 ; 2037 : 01,02 ; 2041 : 05, 06 ; 2050 : 07 , 08, 09 ; 2059 : 10, 11 ; 2064 : 05, 06 ; 2073 : 07, 08, 09 ; 2082 : 10, 11 ; 2087 : 03, 04 ; 2091 : 12 ; 2096 : 07, 08, 09.

Exercice 512–2 Roger Ferrieu – Paris

Que devient la somme

$$S_n = 2 + \frac{a+b}{ab} + \cdots + \frac{a^n + b^n}{a^n b^n}$$

lorsque n augmente indéfiniment ?

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Raymond Heitz (Névez), Odile Simon (La Prénessaye), Raphaël Sinteff (Nancy), Bernard Collignon (Coursan), Jean-Yves Hély (Rennes).

Remarque.
Les valeurs possibles des nombres a et b n'étant pas précisées, les solveurs se sont lancés dans une étude exhaustive fort longue. Nous n'en donnons ici que le début.

▪ Voici la solution de Bernard Collignon.
On remarque tout d'abord que cette somme est définie si et seulement si $ab \neq 0$, c'est-à-dire si et seulement si $a \neq 0$ et $b \neq 0$.
Pour $ab \neq 0$, on peut écrire :

$$S_n = 1 + \frac{1}{a} + \cdots + \frac{1}{a^n} + 1 + \frac{1}{b} + \cdots + \frac{1}{b^n}.$$

Une des principales difficultés consiste à passer en revue tous les cas possibles ; on peut remarquer cependant que a et b jouent des rôles symétriques et supposer par la suite que l'on a par exemple $|a| \leq |b|$.

Cas : $|b| \geq |a| > 1$
On a :

$$S_n = \frac{1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{a}} + \frac{1-\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{b}} = \frac{a}{a-1}\left(1-\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1}\right) + \frac{b}{b-1}\left(1-\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1}\right)$$

Comme $|b| > 1$ et $|a| > 1$,

$$\lim\left(\frac{1}{a}\right)^{n+1} = \lim\left(\frac{1}{b}\right)^{n+1} = 0$$

d'où :

$$\lim S_n = \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}.$$

▪ Voici le tableau récapitulatif de la solution proposée par Raphaël Sinteff (*qui est disponible sur le site de l'association*).

	$a < -1$	$a = -1$	$a \in]-1;0[$	$a \in]0;1[$	$a = 1$	$a > 1$
$b < -1$	ℓ			$+\infty$	$+\infty$	ℓ
$b = -1$				$+\infty$	$+\infty$	
$b \in]-1;0[$						
$b \in]0;1[$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$b = 1$	$+\infty$	$+\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$b > 1$	ℓ			$+\infty$	$+\infty$	ℓ

où

$$\ell = \frac{a}{a-1} + \frac{b}{b-1}.$$

Nota. Cet exercice est issu du manuel de Roger Ferrieu, Algèbre et Trigonométrie, classe de mathématiques, conforme aux nouveaux programmes …(1)

(1) de 1935 !

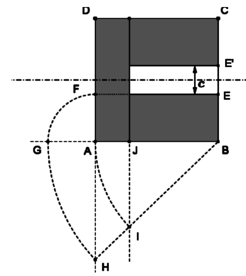
Exercice 512–3 Émile Fourrey – Paris pour nos élèves

A – On dispose la suite des nombres impairs en lignes comme suit :

l_1	1
l_2	3 ; 5
l_3	7 ; 9 ; 11
l_4	13 ; 15 ; 17 ; 19

....

Prouver que sur chaque ligne, la somme des nombres est égale au cube du rang de cette ligne.



B – Diviser le carré ABCD de côté a en trois parties équivalentes (de même aire), de sorte qu'il y ait encore un chemin d'une largeur donnée c conduisant aux trois parties.

La construction est indiquée sur la figure ci-contre.
Prouver son exactitude.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jacques Chayé (Poitiers), Jean-Yves Hély (Rennes), Hélène Brion (Clamart), Odile Simon (La Prénessaye), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon).

A – Voici la solution de Richard Beczkowski.
La somme des n premiers nombres impairs est

$$\sum_{n=1}^{n}(2p-1)=2\sum_{n=1}^{n}p-n=n(n+1)-n=n^2$$

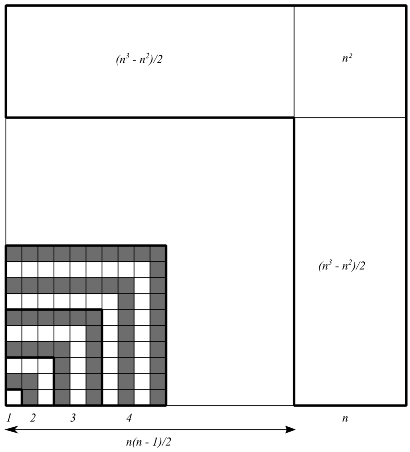
La ligne de rang p contient p nombres impairs consécutifs.

Nombre d'éléments du tableau dans les n lignes : $\sum_{n=1}^{n}p=\frac{n(n+1)}{2}$ et leur somme $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

Nombre d'éléments dans les $n-1$ premières lignes : $\sum_{n=1}^{n-1}p=\frac{n(n-1)}{2}$ et leur somme $\frac{n^2(n-1)^2}{4}$.

La somme des éléments de la dernière ligne est donc : $\frac{n^2(n+1)^2}{4}-\frac{n^2(n-1)^2}{4}=n^3$.

- Voici la preuve sans mot de Hélène Brion.



B – Voici la solution de Marie-Nicole Gras.
Nous allons détailler les différentes étapes de la construction indiquée sur la figure de l'énoncé, en calculant chaque fois les longueurs correspondantes.

(i) Le bord inférieur du chemin (prolongé) coupe AD en F, et donc AF = $\dfrac{a-c}{2}$.

(ii) Le cercle de centre A et de rayon AF coupe le prolongement de BA en G ; donc AG = $\dfrac{a-c}{2}$.

(iii) Le cercle de centre B et de rayon BG = $a + \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{3a-c}{2}$ coupe le prolongement de DA en H ; on a donc BH = $\dfrac{3a-c}{2}$.

(iv) Le cercle de centre B et de rayon BA = a coupe le segment BH en I ; on a donc BI = a.

(v) La droite perpendiculaire à AB menée de I, coupe le segment AB en J. Les triangles BJI et BAH sont semblables, et donc $\dfrac{BJ}{BA} = \dfrac{BI}{BH}$, $\dfrac{BJ}{a} = \dfrac{2a}{3a-c}$,

$BJ = \dfrac{2a^2}{3a-c}$, et donc $AJ = a - \dfrac{2a^2}{3a-c} = \dfrac{a(a-c)}{3a-c}$.

(vi) Avec cette valeur de AJ, on réalise le partage demandé du carré ; en effet,

– l'aire du rectangle de côtés AD et AJ est égale à $\dfrac{a^2(a-c)}{3a-c}$;

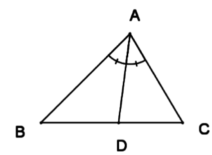
– l'aire du rectangle de côtés BJ et BE est égale à $\dfrac{2a^2}{3a-c} \times \dfrac{a-c}{2} = \dfrac{a^2(a-c)}{3a-c}$;

– la somme des aires égales des trois rectangles et de celle du chemin est égale à

$$3\times\frac{a^2(a-c)}{3a-c}+c\times\frac{2a^2}{3a-c}=\frac{3a^3-3a^2c+2a^2c}{3a-c}=a^2.$$

Nota. Ces exercices sont issus des deux livres « Récréations arithmétiques » et « Curiosités géométriques », d'Émile Fourrey édités chez Vuibert(2).

Exercice 512—4 Valentin Paubarol – Ampéris



ABC est un triangle quelconque.

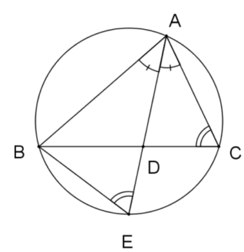
La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en D.
Montrer que $AB \cdot AC = AD^2 + DB \cdot DC$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Jacques Chayé (Poitiers), Raphaël Sinteff (Nancy), Bernard Collignon (Coursan), Jean-Yves Hély (Rennes), Daniel Carron (Bruxelles), Michel Blévot (La Réunion), Mihai-Ioan Stoenescu (Bischwiller), Christian Planchon (Aumont-Aubrac).

▪ Voici la solution de Jean-Yves Hély.

Soit (c) le cercle circonscrit au triangle ABC.

La bissectrice de l'angle $\widehat{A}$ coupe le cercle (c) en E.
Les triangles ADC et ABE sont semblables.
D'où



$$AB \times AC = AD \times AE \quad (1)$$

(1) peut s'écrire $AB \times AC = AD \times (AD + DE)$

$$AB \times AC = AD^2 + AD \times DE \quad (2)$$

Les triangles ADC et BDE sont semblables.
D'où $DB \times DC = AD \times DE$.

(2) s'écrit

$$AB \times AC = AD^2 + DB \times DC.$$

(2) Le livre « Curiosités géométriques » est disponible sur Gallica.