Enseignement et apprentissage de l'algèbre au collège : quel apport des TICE ?

Conférence de Michèle Artigue au colloque inter-IREM de Montpellier (19 au 21 juin 2014) mise en texte par Catherine Combelles.

L'entrée dans l'Algèbre a été et est toujours quelque chose d'un peu traumatisant pour les élèves. Certains ont alors l'impression d'être rejetés par les mathématiques, de cesser de les comprendre. Il n'est donc pas étonnant que la didactique se soit intéressée très tôt à cette question de l'apprentissage de l'algèbre, en essayant de comprendre les difficultés des élèves et de trouver les moyens d'y remédier. Ce n'est pas un hasard non plus si l'on a essayé d'utiliser les outils informatiques, dès qu'ils ont été disponibles, pour aider à cet apprentissage, et ceci depuis des décennies.
Je vais tenter de balayer cet usage des technologies pour l'apprentissage de l'algèbre. J'ai du faire des choix, faute de temps : ces choix ont été guidés par mon expérience, par ma vision du champ de l'algèbre et des travaux didactiques les plus intéressants dans ce domaine. C'est donc une vision partielle et personnelle.

Préliminaires :

Commençons par quelques préliminaires concernant l'algèbre et la didactique de l'algèbre.

1. Qu'est-ce que l'algèbre ?

La réponse n'est pas unique :

Si l'on se réfère au développement historique de ce champ, on va voir l'algèbre comme la science des équations, mais on peut la voir aussi comme la science des structures, et c'est ce que l'on rencontre en priorité quand on entre à l'université. Cela semble très loin de l'enseignement au collège, mais on verra que l'on peut faire vivre cette science des structures de façon modeste très tôt dans la scolarité sous forme de recherche de régularités et de généralisations. On peut voir aussi l'algèbre comme un langage de modélisation, indissociable de la mathématisation du monde et cet aspect est de plus en plus présent dans les curricula de nombreux pays. Dans ses textes récents concernant ce domaine, Yves Chevallard aborde l'algèbre sous l'angle du calcul algébrique, et pour lui, l'algèbre est la science des programmes de calcul, avec la question de l'équivalence de deux programmes de calcul : avec les mêmes entrées, donneront-ils les mêmes résultats ?

Ces différentes visions vont bien sûr avoir des impacts sur l'enseignement et sur les curricula : selon la vision que l'on adopte, on ne va pas penser l'entrée dans l'algèbre de la même façon, les objets étudiés en priorité et les progressions seront différents. Dans une étude ICMI lancée dans les années 2000, intitulée le *futur de l'enseignement et de l'apprentissage de l'algèbre*, Rosamund Sutherland a essayé de comprendre les différences entre curricula sur les méthodes d'entrée dans l'algèbre. Elle a observé une grande variété d'approches et a identifié trois entrées principales :

- La première nous est familière ; c'est l'entrée par les équations et par la démarche analytique, avec la mise en équations de problèmes divers. La lettre a alors prioritairement un statut d'inconnue et les objets traités en priorité sont les équations et les inéquations.
- Dans le monde anglo-saxon, depuis très longtemps, l'entrée privilégiée se fait par ce qu'on appelle les « patterns » : c'est la recherche de moules, de régularités, de modèles dans des situations prises dans différents contextes : situations numériques avec de jeunes enfants, régularités géométriques, recherche de structures dans des objets numériques variés. L'entrée dans l'algèbre est alors liée à la recherche de régularités et à leur expression progressive avec des systèmes de codes de plus en plus sophistiqués pour arriver à ceux du langage algébrique conventionnel. Cette entrée est très présente dans le champ qu'on appelle l'« early algebra », l'algèbre précoce, que développent des chercheurs dans divers pays : Davidoff en Russie, et plus récemment David Carraher aux États-Unis, Anna Lúcia Schliemann au Brésil, ainsi que des chercheurs japonais, avec des variations dans les approches. Ces travaux montrent que cette entrée rend la pensée algébrique accessible dès le niveau CE2-CM1, et permet de préparer très tôt le terrain de l'algèbre. La lettre est alors un nombre généralisé et les objets privilégiés sont les formules, qui expriment les régularités.
- Troisième entrée, celle de la modélisation. On va vouloir exprimer des covariations entre des grandeurs, la lettre a alors le statut de variable, et l'objet prioritaire est la fonction, même sous des formes d'abord très rudimentaires.

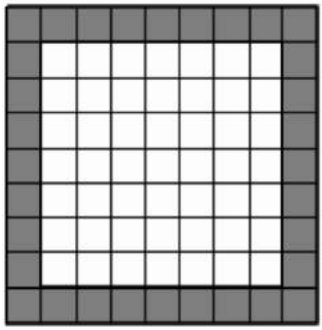
En France et dans les pays latins de manière générale, la tradition est l'entrée par les équations. Mais on trouve dans les programmes de collège, par exemple ceux de 2008(1), des amorces pour ne pas se limiter à cette approche. On retrouve dans les documents d'accompagnement des situations emblématiques de type *patterns*, présentes dans de nombreux pays comme la situation du carré bordé.

Le carré bordé : on trouvera une analyse détaillée de ce problème dans l'article *Pratiques enseignantes et transmissions de situations d'enseignement en algèbre* de Lalina Coulange et Brigitte Grugeon dans le numéro 78 de la revue Petit x, dont voici un extrait :

Il s'agit d'une situation d'apprentissage élaborée dans le cadre d'une recherche et d'une expérimentation autour de l'enseignement de l'algèbre (Combier et al., 1997) : le carré bordé.

(1) On trouvera ce document sur le site Eduscol à l'adresse :
http://media.education.gouv.fr/file/Programmes/17/3/du_numerique_au_litteral_109173.pdf

Le problème mathématique sur lequel se base cette situation consiste à établir une formule qui permet de calculer le nombre de carreaux grisés de la bordure, quel que soit le nombre de carreaux du côté du carré blanc :



De même, la notion de fonction est désormais explicitement présente dans les programmes de collège, et le discours sur la modélisation est de plus en plus prégnant. La ligne directrice des programmes reste cependant imprégnée par notre tradition culturelle, la progression selon les autres visions de l'algèbre ne constitue que quelques excroissances dans les programmes ; dans les manuels, les progressions selon ces axes ne sont guère pensées quand elles ne sont pas totalement absentes, alors que la progression dans le monde des équations est, elle, soigneusement réfléchie.

On repère cependant d'indéniables évolutions, sous l'effet des travaux de didactique de l'algèbre et des influences internationales, car les mondes éducatifs s'interpénètrent de plus en plus.

Ainsi, l'utilisation des TICE pour enseigner l'algèbre ne se fait pas dans le vide, elle se fait à l'intérieur d'une institution, dans un système éducatif particulier marqué par une culture dont il faut avoir conscience.

2. La recherche didactique en algèbre

Un des premiers résultats importants de la recherche didactique en algèbre a été de montrer des discontinuités entre la pensée algébrique et la pensée arithmétique et de faire comprendre que si la familiarité avec les nombres est nécessaire, l'algèbre demande de changer de pratique. Un certain nombre de ces discontinuités ont été décrites : par exemple, sur le statut et l'usage des lettres. Dès les premières classes, on utilise des lettres pour coder, pour noter des objets, pour noter des unités de mesure. Mais les lettres que l'on utilise sont souvent ce qu'on appelle des lettres étiquettes, elles ne représentent pas des nombres engagés dans des calculs. Elles représentent des objets plutôt que des quantités. Michel Serfati, chercheur en épistémologie, qui a étudié la constitution de l'écriture symbolique mathématique, y fait souvent référence dans l'histoire des mathématiques en parlant d'une vision « cossique » de la lettre (de « chose »).

Autre différence : le statut et l'usage du signe d'égalité. Dans les premières années d'apprentissage, le signe « = » a surtout le sens d'appel à un calcul, d'annonce d'un résultat. Il n'est pas vraiment symétrique. Si l'on n'y prend pas garde, il devient uniquement pour les élèves le signe d'un calcul à effectuer, alors qu'en algèbre, il va prendre le sens d'une équivalence entre deux expressions.

Un troisième obstacle est la structure des expressions, organisées en blocs, avec l'importance des parenthèses : on connaît bien les difficultés des élèves avec le parenthésage.

Enfin, l'algèbre demande une vision différente de la terminaison des calculs. Le résultat d'un calcul arithmétique s'exprime sans signe opératoire, alors qu'un résultat en algèbre comporte souvent encore des signes opératoires. C'est ce que les anglo-saxons appellent « l'absence de fermeture du calcul ».

Une autre différence concerne le rapport entre syntaxe et sémantique. En arithmétique, le sens des calculs est guidé par la situation ; on avance pas à pas du connu vers l'inconnu, et chaque étape intermédiaire a un sens dans le contexte du problème. Quand on travaille en algèbre, on s'affranchit de ce sens pas à pas, et on effectue des transformations qui sont pilotées par la syntaxe, par la forme des expressions, et par le type de propriété que l'on veut prouver. Ces transformations font passer d'une expression à une expression équivalente, mais transforment en même temps le sens : ainsi, pour montrer que la somme de trois entiers consécutifs est multiple de 3, je vais transformer par exemple $n + (n + 1) + (n + 2)$ (et non x + y + z, comme l'écrivent beaucoup d'élèves dans un premier temps) en l'expression $3\ (n + 1)$ qui est équivalente à la première mais ne porte pas la même information.

S'ajoute à cela l'intervention de nouveaux nombres : les nombres relatifs font partie de l'algèbre ; ils ne représentent plus directement des quantités, et lorsqu'on veut donner du sens aux opérations et à leurs propriétés, on doit avoir recours à d'autres moyens de pensée qu'en arithmétique.

Enfin la démarche arithmétique et la démarche analytique sont différentes. Je n'insiste pas sur ce point.

La recherche a bien montré que les stratégies didactiques utilisées pour cette entrée dans l'algèbre ne sont pas neutres. Certaines stratégies vont renforcer ces difficultés et rendre la tâche des élèves plus difficile, alors que d'autres vont les atténuer. La stratégie la plus coûteuse est une entrée brutale, par le monde des équations et la démarche analytique, parce qu'on accumule alors toutes les discontinuités en une seule étape.

L'usage des technologies doit être interrogé : est-ce qu'il atténue ces difficultés, est-ce qu'il les accroît, ou est-il impuissant face à elles ?

Les TICE et l'apprentissage de l'algèbre

Explorer cette question, c'est explorer un vaste monde car de nombreuses technologies ont été employées pour l'apprentissage de l'algèbre. Et le paysage évolue sans cesse, à la fois par les technologies utilisées et par les usages qui en sont faits.

Dans un premier tour d'horizon, je citerai d'abord ce dont je ne dirai que quelques mots :

- **Les systèmes de calcul symbolique (en anglais CAS, pour Computer Algebra System)** : Je ne vais pas parler des CAS. J'ai pourtant commencé à travailler dans le champ de l'algèbre avec cet outil dans les années 90 et j'ai eu notamment l'occasion d'observer et d'étudier l'usage que faisait du logiciel DERIVE Michel Rousselet, dans ses classes de troisième et de quatrième. Cette technologie n'est pas, me semble-t-il une technologie à encourager en priorité au niveau du collège. Elle a des exigences instrumentales complexes, et on connaît aujourd'hui l'importance de ce facteur. Elle est mieux adaptée au lycée que pour les débuts de l'algèbre au collège. Je ne vais donc pas insister sur les CAS, même s'ils ont des potentialités indéniables par exemple dans le travail sur les expressions et l'équivalence entre expressions.
- **La programmation** : Je ne vais pas non plus parler de programmation, parce qu'il y a encore assez peu de travaux sur ce thème. Mais je pense que dans quelques années, le sujet sera devenu incontournable. La programmation a été très présente dans les débuts de l'informatique scolaire. Puis elle s'est évanouie au profit d'une informatique outil, mais chez nous comme quasiment dans tous les pays, on assiste à un mouvement de résurgence et d'intérêt pour la programmation, associée à la volonté que les élèves ne soient pas de simples consommateurs, mais puissent être aussi des concepteurs et des designers. On redécouvre l'importance de la programmation dans la conceptualisation de la pensée algorithmique et les travaux sur la programmation et sur sa mise au service de l'algèbre vont certainement prendre de l'ampleur dans les prochaines années.
- **Les jeux** : Je ne parlerai pas de jeux ; le fameux jeu DragonBox est censé vous enseigner secrètement les manipulations algébriques et la résolution d'équation. Mon petit-fils, à huit ans, est effectivement parvenu au bout d'une heure au dixième panneau ; il ne comprenait pas du tout ce qu'il faisait, mais il avait bien avancé dans le jeu…

  Il y a deux types de jeux : ceux où l'on est joueur et ceux où l'on est concepteur. Ce qui paraît le plus intéressant dans les travaux actuels sont les jeux où l'on est concepteur. Des expériences sont menées actuellement à Londres où l'on fait travailler aux élèves des concepts mathématiques à partir de la conception de jeux. Au Danemark, une équipe de chercheurs fait de

même simuler des jeux à l'aide de GeoGebra par des élèves de niveau collège pour mettre en scène tantôt de la géométrie, tantôt de l'algèbre. En France, dans le cadre du projet Comenius EdUmatics, à l'IREM de Paris, un apprentissage sur les fonctions a été mené à partir de la simulation d'un jeu de poursuite, à l'aide du logiciel GeoGebra. (Voir un article paru dans le numéro 95 de Repère IREM (mars/avril 2014) :« Vil Coyote rattrapera-t-il Bip-Bip ? - Un exemple d'introduction de fonctions à partir d'une situation concrète ».
http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/95_article_631.pdf

Passons à d'autres outils que je développerai davantage :

Le tableur

Dès les premiers travaux sur l'utilisation des TICE dans l'apprentissage de l'algèbre, au début des années 80, les tableurs ont joué un rôle important. En France, par exemple, la thèse de Bernard Capponi (1990) a été un travail pionnier dans ce domaine. Rosamund Sutherland au Royaume-Uni, et au Mexique Teresa Rojano ont également marqué la recherche sur ce thème. Plus récemment, il faut citer la thèse de Mariam Haspekian en 2005 : elle a renouvelé la réflexion sur les apports et sur les limites du tableur dans l'enseignement de l'algèbre : le tableur permet d'assouplir la transition entre l'arithmétique et l'algèbre, car il permet de faire vivre un monde intermédiaire entre arithmétique et algèbre, il permet de faire avancer les élèves en douceur du monde familier numérique au monde algébrique. L'utilisation du langage symbolique relève de l'algèbre, alors que la démarche de pensée relève toujours de l'arithmétique.

Prenons l'exemple classique du partage de chocolats : *Trois groupes d'enfants se partagent 100 chocolats. Le deuxième groupe reçoit quatre fois le nombre de chocolats du premier. Le troisième groupe reçoit 10 chocolats de plus que le deuxième groupe. Combien de chocolats chacun des trois groupes reçoit-il ?*

C'est ce qu'on appelle un problème déconnecté : on ne peut pas passer directement des données à la solution. Ce serait un problème arithmétique classique si on donnait le nombre de chocolats du premier groupe, et si on demandait le nombre total de chocolats, par exemple.

Si on le modélise par l'algèbre, on peut écrire un système, mais au collège, on privilégiera l'écriture d'une seule équation, on appellera x le nombre de chocolats du premier groupe, et l'on écrira en fonction de x le nombre de chocolats des deux autres groupes, puis le total.

Les élèves peuvent bien sûr résoudre ce problème par l'arithmétique : ils vont procéder par essai-erreur : la solution étant (10, 40, 50), ils peuvent y arriver assez facilement : on peut d'ailleurs penser que les variables didactiques n'ont pas été ici très bien choisies pour pousser à l'utilisation de l'algèbre !

Que faire avec le tableur ? La logique du tableur est de créer une cellule pour chaque groupe. La cellule du groupe 2 reçoit quatre fois le contenu de la cellule du groupe 1, et la cellule du groupe 3 s'obtient en ajoutant 10 au contenu de la cellule du groupe 2 : l'écriture des formules ressemble beaucoup à l'écriture algébrique sous forme de système.

Dans un premier usage du tableur, on va créer une cellule pour le total, et on peut calculer ce total en faisant des essais pour des valeurs croissantes de la première cellule, jusqu'à arriver à un total de 100.

Mais la logique du tableur dans ce type de situation sera plutôt de faire une exploration systématique en recopiant les formules vers le bas, avec un calcul automatique des colonnes, plutôt que des essais un par un.

On est bien entre l'arithmétique et l'algèbre, avec une notation des formules de type algébrique et une résolution par essai-erreur ou systématique, de type numérique.

Mais le bât blesse un peu car ces proximités ne sont pas si évidentes. Nous y reconnaissons nos objets algébriques, mais ce sera beaucoup plus délicat pour l'élève qui découvre le monde de l'algèbre : quelle relation entre les variables tableur et les variables mathématiques ? Entre formule tableur et formule mathématique ? Entre les pratiques du tableur et les pratiques de l'algèbre avec papier et crayon ? Maryam Hasklepian a montré que les choses sont bien plus complexes qu'on ne le supposait.

La variable tableur est beaucoup plus qu'une variable mathématique : une variable cellule est appelée à prendre des valeurs numériques comme une variable mathématique, mais en même temps, elle a une localisation spatiale : les élèves la voient comme une boîte dans laquelle on met des nombres. Quand on la recopie, elle change de nom, tout en faisant référence au même objet mathématique. De même, quand on recopie des formules, la syntaxe de la formule change à chaque ligne. Pour des élèves qui n'ont pas encore saisi ce que sont les objets de l'algèbre, comment sentir l'unification présente derrière ces variations syntaxiques ? Est-ce qu'on n'ajoute pas une grande complexité qu'il va falloir gérer ?

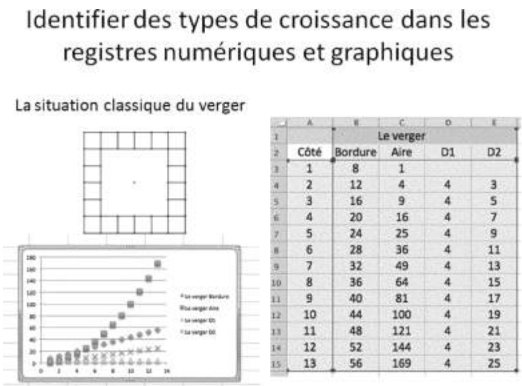
Et quand on ne veut pas qu'une valeur soit modifiée d'une ligne à l'autre, on va utiliser des symboles $ pour fixer partiellement ou totalement une variable : c'est proche de la distinction entre variable et paramètre dans le domaine mathématique, mais une variable tableur avec dollar n'est pas non plus tout à fait un paramètre au sens mathématique.

Les ressources proposées aux enseignants sous-estiment complètement toutes ces complexités. Ce sont souvent des objets isolés que l'enseignant est supposé utiliser quand elles lui seront utiles, mais où la progression conjointe des connaissances des objets algébriques et des objets tableur n'est pas suffisamment réfléchie. C'est pourquoi la gestion combinée de l'instrumental et du mathématique devient difficile. On constate ainsi que le tableur est moins utilisé ces dernières années au début de l'apprentissage de l'algèbre.

Il est de nos jours davantage utilisé un peu plus tard, quand une certaine familiarité s'est installée avec le langage algébrique, et ce sont alors d'autres potentialités du tableur qui sont utilisées.

Il permet de comparer deux programmes de calcul : repérer s'ils produisent le même résultat, ou repérer des rapports entre les résultats qu'ils produisent, avant de les prouver par un calcul algébrique. Le tableur permet dans cette utilisation de mettre en évidence le côté expérimental des mathématiques dans la recherche de régularités, pour trouver des conjectures que l'on aura ensuite à démontrer algébriquement.

Une autre utilisation, basique dans les pays anglo-saxons, est d'identifier des types de croissance, en connectant les registres numériques et graphiques. Par exemple, dans le problème du verger repris dans un item PISA devenu classique : dans un verger carré, on plante deux sortes d'arbres, les uns bordant le verger, les autres dans le carré central, et on s'intéresse à la croissance des deux nombres de chaque sorte d'arbre, lorsque la taille du verger augmente(2). On s'intéresse aux différences premières, constantes pour une croissance linéaire et linéaires pour une croissance quadratique, et aux différences secondes, nulles dans le premier cas, et constantes non nulles dans le second. On peut étudier de la sorte d'autres sortes de croissance, et tout un champ de problèmes de ce type exploite bien les potentialités du tableur.



	Le verger			
Côté	Bordure	Aire	D1	D2
1	8	1		
2	12	4	4	3
3	16	9	4	5
4	20	16	4	7
5	24	25	4	9
6	28	36	4	11
7	32	49	4	13
8	36	64	4	15
9	40	81	4	17
10	44	100	4	19
11	48	121	4	21
12	52	144	4	23
13	56	169	4	25

Le tableur permet aussi de repérer et d'exprimer des régularités même en l'absence de formules, et en particulier dans le cas de modélisations récursives, auxquelles il est très bien adapté, et qui donnent lieu à des travaux très intéressants.

Dans le domaine de l'algèbre, ce sont là les usages du tableur qui sont privilégiés aujourd'hui.

Les tutoriels : le cas d'Aplusix

Le logiciel Aplusix (http://aplusix.com/), développé par Jean-François Nicaud, est beaucoup plus qu'un tutoriel, mais pour moi, c'est un prototype de tutoriel très intelligent, qui ne se contente pas d'offrir des batteries d'exercices et de les corriger avec quelques commentaires. Il est basé sur cette idée fondamentale en algèbre qu'est l'équivalence entre expressions. Il est pensé pour travailler sur la structure par blocs des expressions, question primordiale lors de l'entrée dans l'algèbre. Il a été très longuement développé et offre des degrés divers d'aide et de contrôle ; il est complété par une base d'exercices très riche, plus de mille, tout en disposant d'un

(2) Voir ce problème en annexe, à la fin de l'article

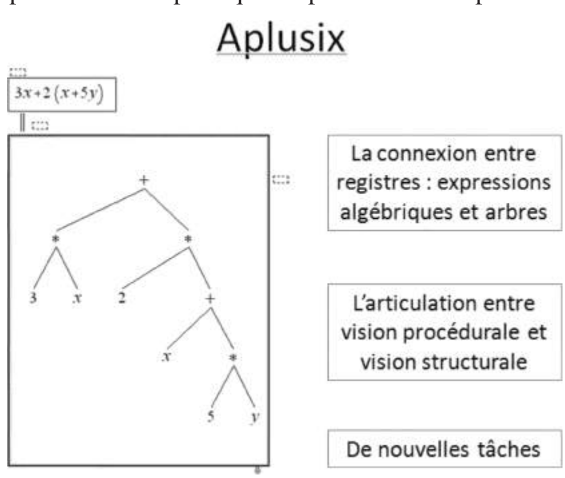
système éditeur qui permet de modifier les exercices ou d'en créer de nouveaux.

La palette d'écriture des expressions permet une écriture spatiale en deux dimensions. On peut dupliquer une expression ou en créer une nouvelle, et un fléchage vous signale si l'expression créée est équivalente ou non à la précédente.

Le logiciel autorise différents modes de fonctionnement :

- on peut travailler en mode entraînement, et l'équivalence entre expressions est alors contrôlée soit systématiquement soit sur demande ;
- on peut fonctionner en mode « test », et aucune indication n'est donnée jusqu'à la fin de l'exercice ;
- on peut fonctionner en mode « autocorrection » en revoyant l'historique d'un travail que l'on peut corriger et compléter. C'est ce qui est proposé dans le « compagnonnage », où l'on peut travailler, selon les options, avec un compagnon, qui peut être quelqu'un qui vous aide, ou quelqu'un que vous aidez.

Dans la manipulation des expressions ou des équations, on peut sélectionner et manipuler un bloc, mais à condition que le bloc choisi ait un sens dans la structure algébrique de l'expression. Dans le cadre du projet européen REMATH auquel ont coopéré six pays, Jean-François Nicaud a implémenté une extension de Aplusix qui n'est hélas pas dans le logiciel en ligne, où l'on peut travailler sur la structure en arbre associée à une expression, avec des passages automatiques possibles de l'expression vers l'arbre ou inversement. Cela permet d'attirer l'attention vers la structure des expressions et pas seulement sur les procédures de calcul. Dans cette expérimentation, de nouvelles tâches apparaissent : déployer un arbre issu d'une expression, compléter un arbre pour qu'il représente une expression donnée.



Il nous a été très facile d'expérimenter ce type de travail en Italie, par exemple, alors que ça a été relativement difficile en France, même si les documents d'accompagnement mentionnent les représentations en arbre. Et finalement, ça a amené Jean-François Nicaud à renoncer à introduire cette représentation dans la version en ligne. C'est bien dommage, parce que la manipulation des arbres permet un travail très intéressant sur la structure algébrique et sa mise en place avait été un réel défi sur le plan informatique.

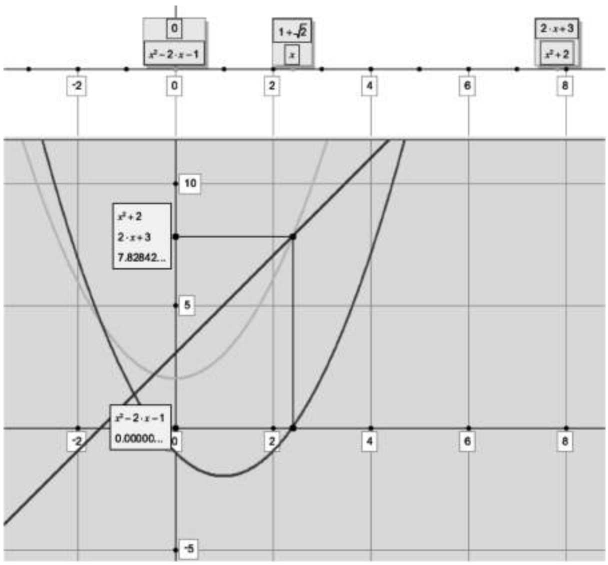
Les connexions dynamiques entre représentations :

Une utilisation primordiale de la technologie, en algèbre comme dans d'autres domaines est la connexion dynamique entre des registres numériques sous forme de tableaux, des registres graphiques et le registre symbolique algébrique.
Un logiciel très employé est GeoGebra, et on y utilise souvent des curseurs qui permettent de ne pas être simplement entre tableur et graphique.

Voici un exemple d'activité, avec un curseur a et un curseur b : on crée la droite d'équation $y = ax + b$, et on fournit aux élèves une autre droite dont l'équation dépend aussi de a et b mais d'une autre manière qu'ils doivent découvrir, en faisant varier a et b, et en observant les positions des deux droites. Dans le cas présenté, la droite inconnue a pour équation : $y = -ax - b/2$; c'est tout simple !

On peut faire simplement observer les variations de a et de b sur la représentation graphique de la droite, mais on peut aussi donner à l'exercice cet aspect de défi, en laissant l'exploration à la charge des élèves.

Un autre exemple est le logiciel Alnuset (http://www.alnuset.com/fr/alnuset), développé en Italie, toujours dans le cadre du projet européen ReMath qui s'est efforcé de développer les logiciels les plus innovants pour faire le point sur les potentialités sémiotiques actuelles de la technologie[3].



(3) Celles qui permettent de diagnostiquer les types d'erreurs.

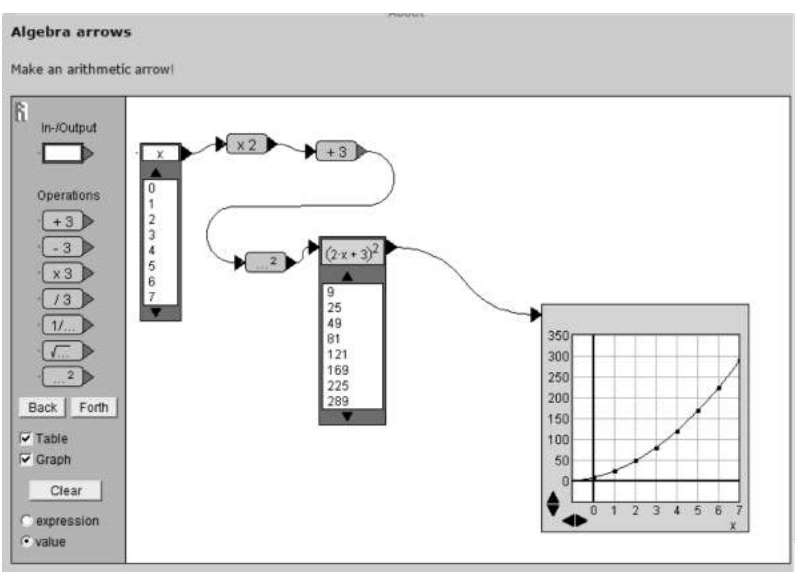
Ce qui est très original dans ce logiciel, c'est son utilisation de la droite numérique que les auteurs ont transformée en droite algébrique. On entre des expressions algébriques, puis, on déplace x sur la droite numérique, et les expressions qui dépendent de x se déplacent en même temps, ainsi que les étiquettes associées. Ainsi, résoudre une équation $A(x) = B(x)$, c'est déplacer x en cherchant la position pour laquelle les étiquettes portant les expressions $A(x)$ et $B(x)$ vont coïncider, et résoudre $A(x) = 0$, c'est chercher la position de x qui va placer $A(x)$ en 0. On peut ouvrir en même temps une connexion avec une représentation graphique et d'autre part un module algébrique qui permet d'approcher l'algèbre conçue d'un point de vue axiomatique par un système de règles.

C'est un logiciel relativement complexe avec trois types de potentialités, et très innovant, à la fois par cette droite algébrique et par cette présentation axiomatique de l'algèbre. Il est expérimenté en Italie, mais je ne l'ai pas vu utilisé en France, en dehors de nos travaux pour ce projet européen.

Les applets sur internet :

Ce que l'on trouve de plus en plus, en fait de technologie, sont des choses développées sur internet, pas forcément des logiciels mais plutôt des petites briques, sous forme d'applets. Il me semble important de signaler à ce sujet le travail fait par l'institut Freudenthal aux Pays-Bas : ils ont développé toute une série d'applets pour le travail sur l'algèbre.
On les trouve à l'adresse http://www.fi.uu.nl/wisweb/en/

Entre autres, on peut créer des expressions sous forme de machine à partir d'une suite d'opérations : par exemple, je crée une machine qui multiplie par 2, puis ajoute 3, puis élève au carré, puis j'indique la sortie. Je peux alors entrer un nombre : 2 me donne 49, mais aussi, je peux faire défiler une table, faire apparaître un graphe, travailler numériquement ou faire afficher les expressions.



On peut demander à l'élève de fabriquer une machine qui produise telle fonction, ou qui inverse une fonction donnée, ou qui permette de connecter deux machines.

L'environnement de ces nouveaux outils est typique de ce qui se fait aujourd'hui. Le site comprend un grand nombre d'activités très variées : l'enseignant peut choisir en libre accès l'activité qu'il souhaite programmer et que ses élèves feront en classe ou à la maison, il peut suivre le travail des élèves et l'évaluer. Toutes ces possibilités sont de plus en plus exploitées aujourd'hui : travail en présentiel ou à distance avec des ressources multiples. Ces briques vont prendre place dans un système d'instruments pour l'enseignant qu'il va orchestrer à sa façon, instruments parfois individuels et parfois collectifs, et construits eux-mêmes dans un projet extrêmement collaboratif, qui mobilise une équipe nombreuse dans l'institut Freudenthal associée à des enseignants.
Cet exemple illustre bien les nouvelles pratiques actuelles des TICE.

Diagnostic et régulation :

Pour illustrer ce point, je prendrai pour exemple le travail piloté depuis longtemps par Brigitte Grugeon, travail commencé lors de sa thèse en 1995 : elle a d'abord élaboré un outil papier-crayon de diagnostic des compétences en algèbre appuyé sur des travaux de recherche en didactique. Son originalité était de ne pas placer les élèves sur une échelle linéaire, mais de donner un profil multidimensionnel de l'élève. Il s'efforçait de mettre en évidence des cohérences dans le fonctionnement des élèves, et d'en déduire des leviers pour les faire progresser. C'était un outil très innovant, et il l'est toujours aujourd'hui : on en comprend de plus en plus l'intérêt, comparé aux gros modèles de psychométrie qui alignent les élèves sur une même échelle linéaire.

Des informaticiens s'en sont saisis, et ce diagnostic a donc été informatisé. Cela a posé quelques problèmes, car certaines questions étaient relativement ouvertes, et leur analyse demandait en particulier d'analyser les expressions algébriques produites par les élèves. Cela a donné lieu à un travail de thèse en informatique.

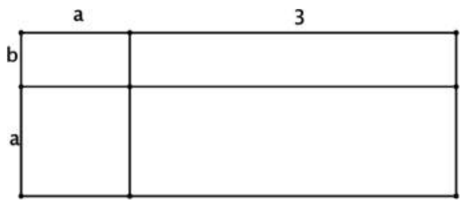
Ensuite, les professeurs ont demandé un outil de diagnostic non plus individuel mais collectif, de façon à réguler l'apprentissage dans une classe, en formant des groupes aux besoins homogènes.

Puis, dans une nouvelle étape, l'objectif a été de créer un enseignement différencié appuyé sur ce diagnostic collectif, tout en maintenant l'unité de la classe sur des enjeux partagés. Ce fut l'objet de la thèse de Julia Pilet en 2012.

Le projet a aujourd'hui pris de l'ampleur : il s'est installé une collaboration avec Sesamath et le nouveau projet (ANR Néopraeval) mobilise aujourd'hui des collaborations de plus en plus larges, puisque la DEPP a intégré le projet, ainsi que des psychomotriciens et des spécialistes de l'évaluation qui ont apprécié son intérêt.

Le test diagnostique tel qu'il fonctionne aujourd'hui comprend dix exercices, avec différents types de tâches (calcul algébrique, production d'expressions, traduction, reconnaissance, résolution de problèmes dans différents contextes), et différentes formes (QCM, exercices à questions ouvertes). L'idée est de tester les cohérences de comportement dans de multiples items : chaque exercice contribue au profil global de l'élève.

L'exercice 3 demande par exemple d'écrire l'aire d'un rectangle défini par le croquis ci-dessous :



On demande à l'élève non seulement de proposer une expression, mais aussi d'expliquer sa démarche, et le logiciel doit être capable de faire une analyse automatique de la réponse, ce qui n'est pas facile.

Un codage des réponses est réalisé, en distinguant parmi les réponses correctes « *celle* » qui est attendue, $(a + b)(a + 3)$, et celles qui, tout en étant correctes, ne correspondent pas à l'attente institutionnelle (somme des aires de plusieurs rectangles, par exemple). Différents niveaux d'erreur sont identifiés (oubli des parenthèses, confusion entre aire et périmètre, omission des signes +, etc.), et ces types d'erreur courantes ont été repérées au cours de milliers de passations. On repère des connexions entre différents types de représentations et on obtient ainsi une sorte de paysage des élèves.

Dans un autre exercice, on demande si certaines égalités ($a^2a^3 = a^5$, puis $a^2 = 2a$, puis $2a^2 = (2a)^2$) sont vérifiées pour toute valeur de a. On demande ici aussi de justifier la réponse, mais pour simplifier l'analyse de l'explication donnée par l'élève, on lui demande de choisir dans une liste de justifications : pour justifier $a^2a^3 = a^5$, par exemple, 8 propositions sont faites, dont beaucoup sont recevables, mais elles sont rédigées de façons différentes, représentatives des réponses observées lors des expérimentations, et indiquant un degré de familiarité plus ou moins grand avec la notation algébrique.

Un autre exemple, emblématique de ce travail, parce qu'il permet de repérer beaucoup de choses, est l'énoncé suivant :

Un prestidigitateur est sûr de lui en réalisant le tour suivant. Il dit à un spectateur : « tu prends un nombre, tu ajoutes 8, tu multiplies par 3, tu soustrais 4, tu ajoutes 2, tu soustrais ton nombre. Tu trouves 7 ! »

Indique si cette affirmation est vraie ou fausse, et justifie ta réponse.

La justification est ici une réponse ouverte, et le codage automatique des réponses a mobilisé les chercheurs pendant plus de cinq ans !

L'analyse automatisée des réponses des élèves donne ensuite lieu à une page « répartition des élèves » destinées au professeur, qui propose une répartition de la classe en plusieurs groupes homogènes. Il donne aussi un bilan personnel des élèves, et permet de réaliser des parcours différenciés adaptés à la classe autour d'enjeux fondamentaux, par exemple sur l'équivalence des expressions. Julia Pilet parle d'« enjeux oubliés » de l'enseignement, qui ne sont pas suffisamment travaillés. L'idée toujours présente est de pouvoir réaliser, après des parcours différenciés, une synthèse commune où tous les élèves se retrouvent.

Le test est maintenant en ligne, et de septembre 2012 à juin 2013, plus de 2700 élèves ont effectué un test, et 129 séances différenciées ont été créées. Des informaticiens font du data-mining(4) sur ces données pour repérer des informations, on peut ainsi comparer l'analyse didactique avec les analyses automatisées, avec toujours ce va-et-vient entre l'automatisation informatique et le travail didactique.

Conclusion

Les TICE proposent aujourd'hui une grande diversité et une grande richesse pour soutenir l'enseignement et l'apprentissage de l'algèbre, tant en ce qui concerne les types de ressources que leurs usages. Celles-ci évoluent vers des conceptions plus collaboratives et des ressources dont la conception peut se prolonger lors de leur usage car elles sont flexibles et adaptables.
Elles se pensent en tant que système de ressources, et leur usage combine TICE et non-TICE.

La semaine dernière, je participais au Danemark à une rencontre organisée par la ministre de l'éducation, et mes collègues danois se plaignaient des effets de la généralisation au lycée de l'usage des outils de calcul formel : ils en voient aujourd'hui les effets néfastes, avec une utilisation très presse-bouton des calculatrices symboliques : les articulations entre papier–crayon et TICE ne sont pas suffisamment pensées et les évaluations telles qu'elles sont conçues n'obligent pas à les penser.

Car aujourd'hui comme hier, les potentialités des TICE nécessitent une compréhension approfondie des enjeux de l'apprentissage de l'algèbre pour être actualisées dans la réalité des classes ; il convient de faire des choix et d'examiner la façon dont telle ou telle technologie peut servir ou non ces enjeux, avec quelles tâches ou quelles orchestrations, et il faut les mettre au service de progressions cohérentes.

(4) Selon Wikipédia, le data mining est l' exploration, la fouille, le forage, la prospection de données ; l'extraction de connaissances à partir de données. L'objet du data mining est de faire émerger un savoir ou une connaissance à partir de grandes quantités de données, par des méthodes automatiques ou semi-automatiques.

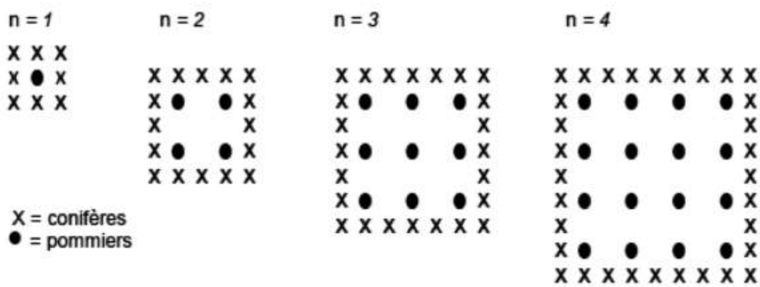
Annexe

Le problème du verger dans PISA :

POMMIERS

Un fermier plante des pommiers en carré. Afin de protéger ces arbres contre le vent, il plante des conifères tout autour du verger.

Vous pouvez voir ci-dessous un schéma présentant cette situation, avec la disposition des pommiers et des conifères pour un nombre (n) de rangées de pommiers :



Question 1 : POMMIERS M136Q01- 01 02 11 12 21 99

Complétez le tableau:

n	Nombre de pommiers	Nombre de conifères
1	1	8
2	4	
3		
4		
5		

Question 2 : POMMIERS M136Q02- 00 11 12 13 14 15 99

Il existe deux expressions que vous pouvez utiliser pour calculer le nombre de pommiers et le nombre de conifères dans cette situation :

Nombre de pommiers = n^2

Nombre de conifères = $8n$

où n est le nombre de rangées de pommiers.

Il existe une valeur de n pour laquelle le nombre de pommiers est égal au nombre de conifères. Trouvez cette valeur de n et expliquez votre méthode pour la calculer.

Question 3 : POMMIERS M136Q03- - 01 02 11 21 99

Supposez que le fermier veuille faire un verger beaucoup plus grand, avec de nombreuses rangées d'arbres. Lorsque le fermier agrandit le verger, qu'est-ce qui va augmenter le plus vite : le nombre de pommiers ou le nombre de conifères ? Expliquez comment vous avez trouvé votre réponse.