Probabilités : un problème historique en classe(*)

Martine Bühler(**)

Introduction

Comment deux joueurs qui interrompent le jeu doivent-ils se répartir la mise ? Tel est le problème historique étudié ici sous le nom de « problème des partis ». « Parti » signifie ici « partage » (« partir » signifie aussi « diviser », « partager », « répartir »). Le groupe M. : A.T.H. de l'IREM Paris-Diderot a longtemps travaillé sur ce problème[1], que j'ai utilisé dans mes diverses classes. Depuis la réforme des programmes, les élèves arrivant en TS connaissent beaucoup de probabilités et en particulier la loi binomiale.

Le contexte historique

Généralement, on date la naissance des probabilités en 1654 avec l'échange de lettres entre Pascal et Fermat sur ce problème. De fait, des problèmes liés au hasard ont été étudiés avant le XVIIème siècle et le problème des partis l'a été par des mathématiciens de la Renaissance. On le trouve même résolu correctement dans des traités d'arithmétique commerciale du XIVème siècle[2].

Luca Pacioli[3] est né vers 1445 à Borgo San Sepolcro (Toscane) et mort en 1517 à Rome. Il est professeur public de mathématiques à Pérouse à partir de 1475. Sa *Summa de arithmetica* (1494) est une somme des connaissances mathématiques de l'époque. En 1509, il écrit le *De divina Proportione*. On y trouve dans le chapitre sur la « règle de compagnie » notre problème sous la forme suivante[4] :
Une brigade joue à la paume: il faut 60 pour gagner, chaque coup vaut 10. L'enjeu est de 10 ducats. Un incident survient qui force les soldats à interrompre la partie commencée, alors que le premier camp a gagné 50 et le second 20. On demande quelle est la part qui revient à chaque camp.
…
La troisième façon est la plus brève. On fait la somme de ce qu'ils ont tous les deux, c'est-à-dire 50 et 20, qui font 70. Et ces 70 gagnent 10. Et de la, combien revient à

(*) Un atelier des Journées Nationales de Toulouse, octobre 2014.
(**) Lycée Flora Tristan, 93, Noisy le Grand et groupe M. : A.T.H .(Mathématiques :Approche par des Textes Historiques) de l'IREM Paris 7-Denis Diderot.
(1) Voir la brochure M. : A.T.H. nº 61 de l'IREM Paris-Diderot et Mnémosine nº 6
(2) Voir l'article de Norbert Meusnier dans le livre Histoires de probabilités et de statistiques de la commission inter-IREM d'Epistémologie et d'histoire des mathématiques p. 3-23.
(3) Voir annexe 1
(4) Les traductions proviennent d'extraits d'articles d'Ernest Coumet (http://jehps.net/juin2007.html), parfois complétés par le groupe M. :A.T.H. à partir des originaux.

celui qui a 50 et à celui qui a 20 ?
Luca Pacioli fait un calcul de proportionnalité par rapport aux points acquis, ce qui explique la place du problème dans le livre, la « règle de compagnie » étant notre règle de trois.
Nicolo Fontana, dit **Tartaglia**(5), est né vers 1500 à Brescia et mort en 1557 à Venise. Grièvement blessé au sac de Brescia par les Français (1512), il reste bègue, d'où son surnom. Il enseigne les mathématiques à Vérone, Plaisance et Venise. L'ouvrage dont est tiré le problème est *General trattato di numere e misure*, 1556. Tartaglia, célèbre pour sa résolution des équations du troisième degré, dit ceci du problème : *La résolution d'une telle question est davantage d'ordre judiciaire que rationnel et, de quelque manière qu'on veuille la résoudre, on y trouvera sujet à litiges.*
Tartaglia critique la solution de Pacioli :
Sa règle ne me paraît ni bonne, ni belle, parce que s'il arrive qu'un parti ait 10 [points], et l'autre rien, et qu'on procède selon sa règle, le premier devrait tirer le tout [toute la mise] et le second rien, ce serait tout à fait déraisonnable que, pour 10 [points], il doive tirer le tout.

Jérôme Cardan est né à Pavie en 1501 et mort à Rome en 1576. Il étudie à Pavie, puis à Padoue, obtient son diplôme de médecin. Il a une grande renommée (chaire à Pavie, puis Bologne, pension à vie du pape Pie V). Il écrit plus de 200 ouvrages (médecine, religions, musique, mathématiques). Il enseigne les mathématiques à Milan (1534-1543). Ses ouvrages les plus connus en mathématiques sont *Practica arithmetica* (1539) et *Ars Magna* (1545). C'est dans *Practica arithmetica* qu'on trouve le problème des partis, dans un chapitre intitulé peu charitablement *De erroribus fratris Lucae*. Il examine beaucoup de situations différentes et comprend qu'il faut considérer, non pas les points acquis, mais les points manquants : *Quant à la théorie des jeux, il faut savoir que dans les jeux il ne faut considérer que le terminus ad quem* (c'est-à-dire, le terme auquel il faut arriver). Il fait d'ailleurs des considérations sur le hasard et ce qui peut se produire.

La solution de Blaise Pascal (Extrait d'une lettre à Fermat du 29 juillet 1654) se trouve dans l'annexe 4 ainsi qu'une nouvelle lettre à Fermat (du 24 août 1654) où Pascal explique la méthode de Fermat, ainsi que la validation de cette méthode et réfute l'objection de Roberval(6).

Le travail en classe

Consignes

- Un temps de recherche individuelle silencieuse (environ un quart d'heure)
- Mise en commun des méthodes de résolution du problème dans chaque groupe.
- Chaque groupe rédige sur feuille (une par groupe) la (ou les) solutions(s) trouvé(e)(s) pour la première situation avant de traiter les autres.

(5) Voir annexe 2
(6) In *Œuvres de Fermat*, publiées par Tannery et Henry, Tome 2, Gauthier-Villars, Paris, 1894, p. 289-295 et p. 300-307. Disponible sur gallica.bnf.fr.

Première situation : Ariane et Bernard jouent à un jeu qui consiste en plusieurs parties de « pile ou face ». Chaque partie rapporte 1 point à celui qui la gagne. Le premier qui a 3 points est le vainqueur du jeu et il gagne 64 euros (cette somme s'appelle la « mise »).
Mais Ariane et Bernard sont obligés de s'arrêter avant d'avoir pu terminer le jeu. Quand ils s'arrêtent, Ariane a gagné deux parties (elle a donc 2 points) et Bernard une partie (il a donc 1 point). Avant de se séparer, ils veulent se partager la mise puisque personne ne l'a complètement gagnée.
Mais alors, que donner à Ariane et Bernard pour que le partage soit équitable ?
Quel partage proposez-vous et pourquoi ?

Deuxième situation : La règle du jeu est la même. Le vainqueur est celui qui obtient le premier 3 points. Quel partage proposez-vous si, au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point ?

Troisième situation : le premier qui obtient 8 points est le vainqueur du jeu. Au moment de l'arrêt du jeu, Ariane a 1 point et Bernard a 0 point. Quel partage proposez-vous ?

Ce travail a été donné en tout début d'année dans une classe de TS, lors d'une séance de deux heures. Les élèves travaillaient par groupes de 4, les consignes ont été données à la fois oralement et par écrit et j'ai relevé une feuille par groupe à la fin de la séance. Mon rôle est de circuler dans les groupes, et de présenter le cas échéant des situations invalidant leur méthode de partage. Tous les groupes ont bien réagi cette année, dans une atmosphère agréable de travail ; ils ont immédiatement compris que nous cherchions une méthode générale, qui pourrait s'appliquer à toutes les situations du même type, et ont donc cherché une autre méthode dès qu'ils étaient convaincus par une objection. Cependant certains groupes ont essayé des méthodes différentes selon les situations Six des sept groupes, dont deux dès le début, ont identifié le problème comme un calcul de probabilités. Le septième groupe a foisonné d'idées, que je n'ai pas su bien gérer.
La synthèse de cette activité a été faite au cours suivant. Vous trouverez sur le site de l'IREM Paris Denis Diderot le diaporama employé pour cette séance en classe et ci-dessous des extraits de copies commentés en les reliant aux textes historiques.

Les productions des élèves : extraits de copies

Extrait 1 :
Étant donné qu'il y a eu 3 victoires au total, il y a donc eu 3 parties. Ariane, elle, a gagné 2/3 des parties et Bernard 1/3 des parties, alors Ariane remporte 2/3 de gain, et Bernard 1/3 de gain. Soit G_A *le gain d'Ariane et* G_B *le gain de Bernard :*

$G_A = \frac{2}{3} \times 64 = 42{,}67$. $G_B = 21{,}33$.

Donc Ariane va obtenir 42,67€ et Bernard va obtenir 21,33€.

Extrait 2 :
On a deux partages possibles, soit Ariane gagne deux fois plus que Bernard car elle a deux fois plus de points.

$\frac{64}{3} \times 2 = 42{,}6$€ *pour Ariane*

$64 - 42{,}6 = 21{,}4$€ *pour Bernard*

Tout comme Luca Paccioli, ces deux copies opèrent un partage proportionnel aux points acquis et j'ai alors parlé de Luca Pacioli. Dans la copie suivante, les élèves vont expliquer très clairement comment la deuxième situation leur a permis de rejeter cette solution. La deuxième situation est effectivement là pour réfuter la proportionnalité aux points acquis ; c'est la raison pour laquelle j'ai demandé de rédiger la solution pour la première situation avant de passer à la deuxième, car je voulais garder trace du travail et des réactions des groupes qui ont cherché un autre partage, sans se décourager. Voici ce qu'ils écrivent :

<u>Extrait 3 :</u>
Avant de s'arrêter, Ariane et Bernard ont joué 3 parties. Nous avons donc décidé de partager la somme en 3. Chaque point gagné vaut 1/3 de la somme.
Ariane ayant gagné 2 parties, elle se retire avec 2/3 de la somme, soit
$64 \times 2/3 = 42{,}66$ €. *Et Bernard part avec* $64 \times 1/3 = 21{,}33$ €.
Or la deuxième situation nous permet d'affirmer que le raisonnement de la première situation est faux.
Puisque Ariane gagne une partie et Bernard n'en gagne aucune, en suivant ce raisonnement, Ariane obtiendrait toute la mise sans avoir joué entièrement le jeu, et Bernard perdrait la totalité de la somme alors qu'il a encore des chances de gagner.

Le groupe suivant a trouvé deux solutions : les élèves ont réellement travaillé individuellement avant la mise en commun des idées dans chaque groupe et certains groupes se sont trouvés face à deux solutions entre lesquelles il a fallu choisir, la deuxième situation fournissant alors un critère de choix.

<u>Extrait 4 :</u>
2) *Étant donné qu'Ariane a gagné 2 parties et Bernard une seule, la mise est divisée en 2/3-1/3.*
…
C'est donc cette solution choisie, puisque si l'on prend l'autre solution (la 2 dans la situation 1), le partage serait de 100%-0%, ce qui n'est pas équitable étant donné que la partie n'est pas terminée, et que tous les points ne sont pas remportés.

Les copies suivantes ont trouvé d'autres solutions tenant compte du problème soulevé par la deuxième situation.

<u>Extrait 5 :</u>
On divise par 2 la mise : 64/2 = 32€.
On divise cette somme par le nombre requis de points pour gagner ; ici, il faut 3 points.
32/3 = 10,66€.
On calcule le nombre de points d'écart entre les deux joueurs, ici, il y a un point d'écart.

Comme Ariane a 1 point de plus que Bernard, elle a 1/3 de point nécessaire pour gagner en plus, elle emporte donc 1/3 des 32 euros qu'à Bernard.
32 – 10,6 = 21,4 € *pour Bernard.*
32 + 10,6 = 42,6 € *pour Ariane.*

Cette répartition tient compte de l'écart de points entre Ariane et Bernard, et échappe ainsi à la critique de Tartaglia. De même la copie suivante qui propose une répartition, puis une objection conduisant à y renoncer.

Extrait 6 :
Deuxième situation : Ariane a 1/3 des points, Bernard a 0/3 des points. Il reste donc 2/3 des points, que l'on répartit alors chez les deux joueurs. Ainsi, on retombe sur les mêmes sommes que dans la première situation. De plus, Ariane aura ainsi 1/3 de plus de la somme que Bernard, ce qui correspond bien à la répartition des points.
Ariane : 42,7 €.
Bernard : 21,3€.
Mais cette méthode ne fonctionne pas, dans le cas où Ariane a 3 points sur 4, et Bernard 2 points sur 4.

Les élèves ne se découragent pas, et trouvent très vite une autre procédure.

Extrait 6 : (suite)
Ariane a 1/3 de points de plus que lui, donc elle aura 1/3 de la somme de plus que lui.
Soit S (la mise) = 64€.
x le gain de Bernard.

$$x64 + \left(x64 + \frac{1}{3}64 \right) = 64$$

$$2x64 + \frac{1}{3}(64) = 64$$

$$128x + \frac{1}{3}(64) = 64$$

$$128x = 64 - \frac{1}{3}(64)$$

$$128x = \frac{128}{3}$$

$$x = \frac{1}{3}$$

J'ai alors demandé au groupe ce que donnerait sa répartition dans le cas suivant : on joue en 5 parties gagnantes, Ariane a 3 points et Bernard 2 points au moment de l'arrêt. Leur calcul donne une autre répartition que celle du cas étudié. Or, les élèves se rendent compte qu'en fait, les deux situations sont équivalentes, car, dans les deux cas, il manque deux points à Ariane et trois à Bernard pour remporter le jeu.
Remarquons qu'une répartition de la mise basée sur l'écart est la solution de Tartaglia, mais que cette répartition était contestée par Pacioli. (voir les textes en annexe).

Le même exemple permet au groupe suivant d'avancer. Ce groupe tient compte du « nombre maximum de parties qui resteraient à jouer », une méthode qu'on retrouve chez Forestani (voir annexe 3).

Extrait 7 :
Sachant qu'au maximum, le score final serait de 3-2, Ariane ayant gagné un point sur cette partie, elle remporte 1/5 de la mise. De plus, le reste de la mise est divisé équitablement entre les deux joueurs, soit 2/5 chacun, Ariane remporte donc 3/5 de la mise et Bernard remporte 2/5 de la mise.
Mettons-nous dans la situation où la partie est en 5 points et le score est de 3-2 pour Ariane. Si l'on prenait la méthode précédente, Ariane se retrouverait avec 5/9 et Bernard 4/9. Or, il manque toujours 2 points à Ariane et 3 à Bernard pour arriver à la victoire comme dans le cas précédent (partie à 3 points). Ils ont donc autant de chance de gagner le jeu s'ils le finissaient. Mais la répartition d'argent n'est pas la même que dans le cas précédent, alors que les chances sont les mêmes.

Ainsi, ce qui compte, c'est le nombre de points qui manquent pour gagner le jeu et non pas le nombre de points acquis. D'où l'idée des deux groupes suivants.

Extrait 8 :
On établit le nombre de parties qu'il reste à jouer pour qu'il y ait un gagnant.
- *Ariane est à 2 points de la victoire, donc à 2 parties de la victoire dans l'optique où elle gagnerait chaque partie.*
- *Bernard, lui, est à 3 points de la victoire, donc à 3 parties de la victoire dans l'optique où il gagnerait chaque partie.*

Étant donné qu'il reste 2 points à obtenir à Ariane pour qu'elle gagne et il en manque 3 à Bernard pour qu'il gagne, alors Ariane va prendre la majorité des points.
Ainsi, Ariane va prendre 3/5 de la mise et Bernard 2/5.

Extrait 9 :
De ce fait, à partir des points restants, 3 pour Bernard et 2 pour Ariane, on constate qu'il a 5 points en tout. Ariane se retrouve avec 3/5 de la somme et Bernard 2/5.

Extrait 10 : *On fait une méthode qui prend en compte le nombre de points qu'il faut pour gagner la partie. Ainsi Ariane a 1 point qu'il reste pour gagner et Bernard 2. En tout, il reste 3 points pour qu'ils arrivent à 3-3.*

Les deux groupes font une répartition inversement proportionnelle aux points qui manquent à chacun des joueurs pour gagner. C'est une idée astucieuse et rationnelle(7), voici un contre-exemple. :

Première situation : On joue en 4 parties, Ariane a 3 points et Bernard 2. Ainsi, il manque 1 point à Ariane et 2 à Bernard ; Ariane emporte donc 2/3 de la mise, et Bernard 1/3.

Deuxième situation : On joue en 6 parties, Ariane a 5 points et Bernard 1 point. Ainsi il manque 1 point à Ariane et 5 points à Bernard : Ariane emporte donc 5/6 de la mise

(7) On trouve cette idée chez un auteur italien cité par Norbert Meusnier (voir note 2).

et Bernard 1/6.

Donc, la première situation donne deux fois plus à Bernard que la deuxième ; mais, dans la première situation, Bernard doit gagner deux parties de suite pour emporter la mise, alors qu'il doit en gagner cinq de suite dans la deuxième. Tous les élèves sont d'accord pour penser qu'il est plus de deux fois plus difficile de remporter cinq parties de suite plutôt que deux parties de suite.

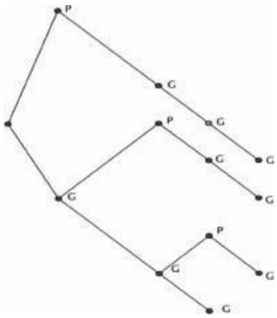
À ce stade, ils calculent d'ailleurs des probabilités : $\left(\frac{1}{2}\right)^2$ et $\left(\frac{1}{2}\right)^5$. Et les voilà sur la voie.

La copie suivante pose clairement dès le départ le problème.

<u>Extrait 11 :</u>
Nous connaissons les résultats (donc les points 2 et 1 appartenant respectivement à Ariane et à Bernard). Ces résultats sont immuables et ne peuvent pas être modifiés. Ainsi, nous devrions plutôt nous intéresser aux résultats possibles, qui auraient pu se produire si ils avaient continué la partie.

Six groupes arriveront, plus ou moins vite, à des solutions probabilistes. Le groupe suivant, y arrive assez tardivement et fait un arbre de probabilités, malheureusement non pondéré.

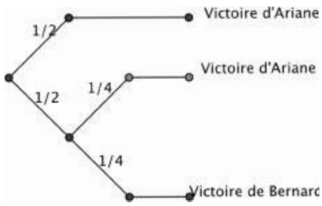
<u>Extrait 12 :</u>
Il y a 4 issues possibles pour que B gagne, sur 10 issues au total, donc :
B prend 4/10 de la somme,
A prend 6/10 de la somme.



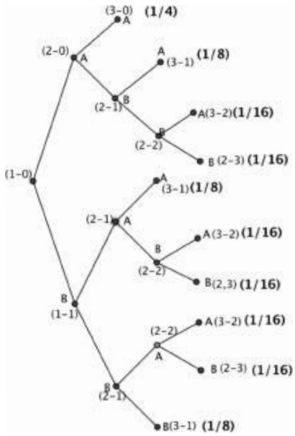
Les 10 issues possibles viennent de l'arbre, si on continue le jeu jusqu'à ce qu'un des joueurs ait gagné. Le groupe n'a eu le temps que de reproduire l'arbre des issues favorables à Bernard (P signifiant Bernard perd la partie, et G, Bernard gagne la partie).

La classe a été sollicitée sur cette solution , et la critique est apparue immédiatement : les issues ne sont pas équiprobables. Il faudrait pondérer l'arbre. Ce qu'ont fait certains élèves.

<u>Extrait 13 :</u>
Ariane a alors ½ + ¼ = ¾, 75% de chances de gagner, tandis que Bernard 25%. On leur assigne donc un montant en fonction de leur pourcentage de chance de gagner, soit :
Pour Ariane : ¾ × 64 = 48€.
Pour Bernard : ¼ × 64 = 16 €



L'arbre n'a pas été pondéré selon les règles habituelles et nous avons corrigé cela au tableau. La deuxième situation donne alors :



Le calcul de probabilités donne alors la probabilité qu'Ariane gagne le jeu (événement noté A) et que Bernard gagne le jeu (événement noté B) :

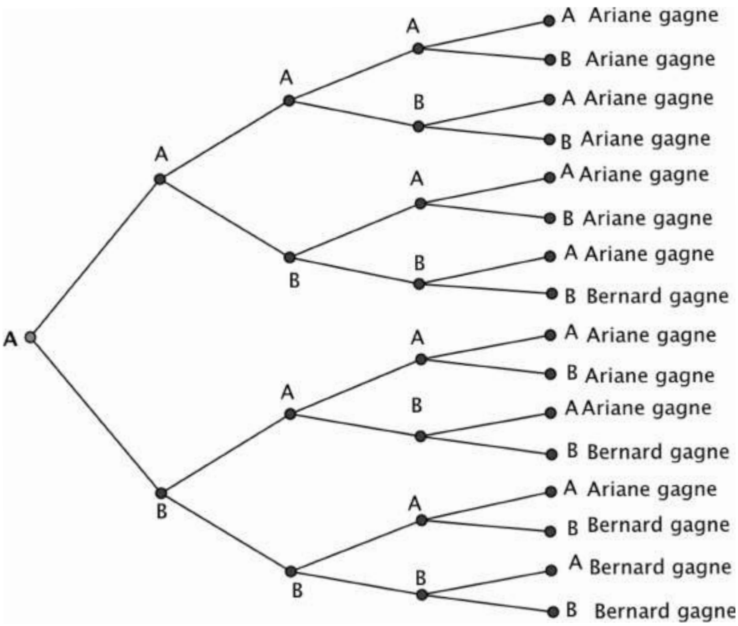
$$p(A)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{11}{16}$$

et

$$p(B)==\frac{5}{16}.$$

On peut également ne pas pondérer les branches en assurant que les issues sont équiprobables. Pour cela, un groupe a considéré que, dans la deuxième situation, le jeu se terminait en au plus quatre parties et qu'on faisait l'arbre complet des quatre parties possibles. La première partie de l'arbre est jouée et gagnée par Ariane. On s'occupe des quatre parties suivantes.

<u>Extrait 14 :</u>



Nombre d'issues favorables à Ariane : 11
Nombre d'issues favorables à à Bernard : 5
Issues totales : 16

La classe est alors sollicitée : qu'en penser ? Peut-on faire comme si les quatre parties étaient effectivement jouées, alors que le jeu s'arrête lorsqu'un des joueurs a gagné ? Il y a débat et certains élèves contestent la méthode. Un élève d'un des deux groupes ayant considéré un arbre « complet » répond alors avec une clarté étonnante : *De toute façon, cela ne change rien, car Ariane a gagné et Bernard ne peut pas la rattraper en quatre parties*.

Je distribue alors la deuxième lettre de Pascal à Fermat (Annexe 4) : toute la classe a reconnu l'argument de l'élève concerné !

Enfin, un dernier groupe a établi un arbre « complet » pondéré.
L'arbre n'a pas été totalement pondéré mais permet de reconnaître une situation : un schéma de Bernoulli, où l'on s'intéresse au nombre de parties gagnées par Ariane. Nous avons alors rédigé une solution sous cette forme, la variable aléatoire X égale au nombre de parties gagnées par Ariane suivant la loi binomiale de paramètres n = 4 et p = 1/2 . On appelle alors E l'événement « Ariane gagne le jeu » et on a :

$$\begin{aligned} p(E) &= p(X \geq 2) = p(X = 2) + p(X = 3) + p(X = 4) \\ &= \binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \binom{4}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right) + \binom{4}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{11}{16}. \end{aligned}$$

Ce groupe a ainsi pu généraliser la troisième situation. J'ai alors demandé à la classe d’en faire autant, après avoir analysé la situation comme ci-dessus.

Voici enfin la copie du groupe concerné :

<u>Extrait 15 :</u>
Troisième situation : il peut se jouer au maximum 15 parties, or une a déjà été jouée. Il reste donc au maximum 14 parties à jouer. Soit X *la variable aléatoire correspondant au nombre de succès*. X *suit la loi* B(14 , 1/2).

$$p(X \geq 7) = 1 - p(X < 7) = 1 - p(X \leq 6) \approx 0{,}6.$$

J'ai passé à la classe la fin du diaporama, qui parlait de Mersenne, de son rôle au XVIIème siècle.

Synthèse

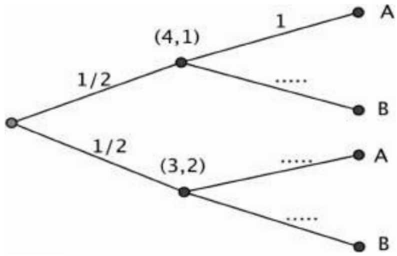
Cet exercice a été donné en classe : un seul groupe l’a totalement terminé, mais nous l’avons corrigé à la séance suivante.

Pascal et le problème des partis

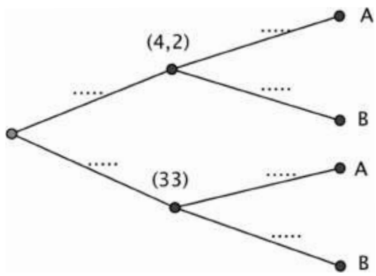
1. Lire (silencieusement et individuellement) la lettre de Pascal du 24 août (Voir annexe 4) et terminer le raisonnement de Pascal pour faire le partage.
2. a. Rédiger sur feuille la fin du raisonnement de Pascal.
   b. Sur quoi porte ce raisonnement?

On peut appliquer la méthode de calcul de proche en proche de Pascal au calcul de probabilités.

3. Dans cette question, il faut 4 points pour gagner. On note p(3 ; 1) la probabilité qu'Ariane gagne le jeu si, au moment de l'arrêt, Ariane a 3 points et Bernard a 1 point.
   a. Que désigne p(3 ; 2) ? Combien vaut p(4 ; 1) ?
   b. Compléter l'arbre ci-dessous, où (3 ; 2) signifie qu'Ariane a 3 points et Bernard 2, et où A est l'évènement : « Ariane gagne le jeu » (c'est-à-dire « Ariane a gagné 4 parties »):



   c. À l'aide de l'arbre, exprimer p(3 ; 1) à l'aide de p(3 ; 2).
   d. De la même façon, calculer p(3 ; 2) en complétant et en utilisant l'arbre suivant :



   e. En déduire p(3 ; 1).
4. Dans cette question, il faut 5 points pour gagner le jeu, a et b sont deux entiers naturels inférieurs ou égaux à 5, non tous deux égaux à 5. On désigne par p(a ; b) la probabilité qu'Ariane gagne le jeu si Ariane a a points et Bernard a b points.
   a. Que valent p(5 ; b) et p(a ; 5) ?
   b. Dans le cas où $a < 5$ et $b < 5$, exprimer p(a ; b) à l'aide de p($a + 1$; b) et p(a ; $b + 1$).
   c. Calculer p(4 ; 2).

Un algorithme récursif. En fait, la démarche de Pascal est algorithmique, et mène, si on la formalise de manière plus actuelle, à un algorithme récursif. Il se trouve que la plupart des algorithmes rencontrés en probabilités sont des algorithmes de simulation. Ce qui n'est pas le cas ici. Je signale que ce type d'algorithme peut être programmé sur Algobox, avec les « Fonctions avancées ».

Les élèves ont compris la démarche de Pascal et ont rédigé la suite du raisonnement, parfois en gardant son langage.

Algorithme récursif :

Entrée : a et b nombres entiers naturels entre 0 et 5, non tous deux égaux à 5.

Fonction récursive :
Si $a = 5$, alors p(a ; b) = 1
Si $b = 5$, alors p(a ; b) = 0
Dans tous les autres cas

$$\mathrm{p}(a\,;b) = \frac{1}{2}\mathrm{p}(a+1\,;b) + \frac{1}{2}\mathrm{p}(a\,;b+1).$$

Sortie : p(a ; b)

On peut bien sûr exécuter cet algorithme pour un nombre arbitraire de parties à gagner. On peut améliorer l'algorithme en ajoutant les conditions :

$$\text{Si } a = b\text{, alors } \mathrm{p}(a\,;b) = \frac{1}{2}$$

et

$$\text{Si } a > b\text{, alors } \mathrm{p}(a\,;b) = 1 - \mathrm{p}(b\,;a).$$

Conclusion

L’objectif principal de ce travail était de revoir en situation la loi binomiale et le programme de probabilités de Première S. Le bilan de cette séquence est très positif, du fait de l'investissement des élèves, de leur attitude très positive aussi bien lors de la première séance que lors de la synthèse ou de la lecture des textes de Pascal. Ils se sont montrés attentifs, passionnés et enthousiastes.

Vous trouverez en annexes sur le site les textes distribués à l'atelier des Journées Nationales de Toulouse. Les inter-titres sont ajoutés par le groupe M. : A.T.H. Les traductions des textes italiens ont été faites par le groupe, à partir des extraits traduits par Coumet dans ses articles, et des textes originaux.

Une remarque. Dans l'énoncé proposé aux élèves, on joue à Pile ou Face (jeu de hasard) et le modèle équiprobable est clair. On peut alors définir ce qu’est un partage *équitable*, mais chez le auteurs du XVIème il est question de jeu de paume, voire d’échecs et donc de jeux d'adresse ou de réflexion. Ces auteurs, lorsqu’ils prennent en compte les parties restant à jouer, traitent ces jeux comme des jeux de hasard, considérant implicitement que les joueurs sont « de même force ». Mais, pour traiter ces situations, il faudrait introduire la probabilité p de gain d'un des joueurs ; celle-ci peut être connue, ou sinon estimée par le résultat des premiers coups et ceux-ci interviennent alors dans le partage.