Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

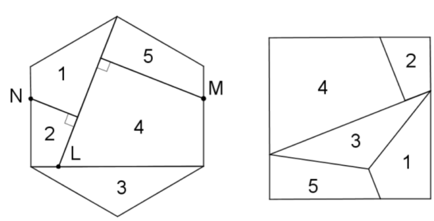
Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 513–1 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans *(d'après le rallye mathématique de la Sarthe)*

On partage un hexagone régulier en cinq morceaux, et en les juxtaposant, on réalise un carré de la manière suivante :



Expliquer comment sont obtenus les points L, M et N.

Exercice 513–2 Bill Sands – Calgary *(tiré de Crux Mathematicorum 37-1)*

On suppose que b est un nombre réel positif tel qu'il existe exactement deux entiers strictement compris entre b et $2b$, de même qu'exactement deux entiers strictement compris entre $2b$ et b^2. Trouver toutes les valeurs possibles de b.

Exercice 513–3 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans

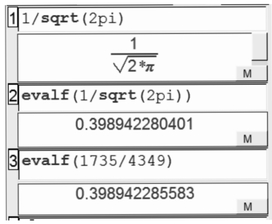
Soit k un entier, $k \geq 1$. On considère les polynômes définis par $P_1(X) = X - 1$ et pour tout $k \geq 2$

$$P_k(X) = (X-1)^k (X+1)^{k-1} \left(X^{2^1}+1\right)^{k-2} \times \ldots \times \left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j} \times \ldots \times \left(X^{2^{k-2}}+1\right)$$
$$= (X-1)^k \times \prod_{j=0}^{k-2} \left(X^{2^j}+1\right)^{k-1-j}.$$

Déterminer le degré du polynôme P_k, et montrer que, sous forme développée, tous ses coefficients sont égaux à +1 ou −1.

Exercice 513—4 Michel Lafond – Dijon Approximation rationnelle *(transmis par Vincent Thill)*

Une calculatrice ou un logiciel (ici Xcas) permet de constater que $\frac{1735}{4349}$ est une bonne approximation de $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.



Comment la fraction $\frac{1735}{4349}$ s'obtient-elle ?

Solutions

Exercice 511–1. Daniel Reisz–Auxerre *Un exercice des Olympiades Internationales de 2012.*

Soit $n \geq 3$ un entier et soit $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_2 a_3 a_4 \cdots a_n = 1$.
Montrer que

$$(1+a_2)^2 (1+a_3)^2 (1+a_4)^2 \cdots (1+a_n)^2 > n^n.$$

Nota. Que celles et ceux qui sont restés perplexes devant l'énoncé de ce problème veuillent bien nous excuser pour la coquille sur les exposants qu'il contenait ; coquille qui a échappé aux pourtant multiples relectures avant parution, mais pas aux solveurs qui suivent.

Solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé).

• Voici la solution de Pierre Renfer.

Pour tout entier k tel que $2 \leq k \leq n$, la comparaison entre moyenne arithmétique et géométrique des k nombres $a_k, \frac{1}{k-1}, \frac{1}{k-1}, \cdots, \frac{1}{k-1}$, donne :

$$\frac{1+a_k}{k} \geq \sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}} \quad \text{ou} \quad 1+a_k \geq k\sqrt[k]{\frac{a_k}{(k-1)^{k-1}}}$$

$\left(\text{l'égalité n'ayant lieu que si } a_k = \frac{1}{k-1}\right)$.

Donc : $(1+a_k)^k \geq \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} a_k$.

Le produit télescopique donne :

$$\prod_{k=2}^{n} (1+a_k)^k \geq n^n$$

$\left(\text{car } \prod_{k=2}^{n} \frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} = n^n \text{ et } \prod_{k=2}^{n} a_k = 1\right)$.

L'inégalité est stricte sinon a_k serait égal à $\frac{1}{k-1}$, pour tout k, ce qui n'est pas compatible avec la valeur 1 du produit des a_k.

Remarque.

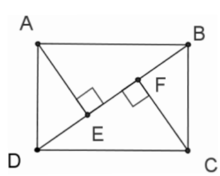
Les autres solutions utilisent le fait que pour tout nombre entier $k \geq 2$, la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par $f_k(x) = \frac{(1+x)^k}{x}$ admet un minimum en $\frac{1}{k-1}$.

Exercice 511–2 *pour nos élèves*

A. Le périmètre d'un secteur de cercle est 12 (le périmètre inclut les deux rayons et l'arc). Déterminer le rayon du cercle qui maximise l'aire de ce secteur.

B. Montrer que tout nombre palindrome de 4 chiffres est un multiple de 11.

C. ABCD est un rectangle avec AD = 1 ;
(AE) et (CF) sont perpendiculaires à (BD)
et DE = EF = FB.
Calculer AB.



Solutions : Jean Gounon (Chardonnay), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Daniel Vacăru (Pitesti, Roumanie), Raymond Heitz (Névez), Michel Sarrouy (Mende).

A. Voici la solution de Jean Gounon.

Soient r le rayon du cercle de centre O, A et B les extrémités de l'arc et $\alpha \in \,]0, 2\pi[$ une mesure en radian de l'angle $\widehat{AOB}$.

On a $12 = 2r + r\alpha$ donc $\alpha = \dfrac{12 - 2r}{r}$. Alors l'aire du secteur est

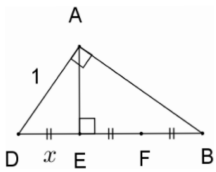
$$A = r^2 \frac{\alpha}{2} = r^2 \frac{12 - 2r}{2r} = 6r - r^2.$$

Ce trinôme présente un maximum pour $r = 3$.
L'aire du secteur est donc maximisée pour $r = 3$; elle est alors égale à 9 et l'angle au centre correspondant a pour mesure $\alpha = 2$ rad.

B. Voici la solution de Michel Sarrouy.

Soit $N = \overline{abba}$ un nombre palindrome à quatre chiffres en base dix.
Comme $N = 1001a + 110b = 11 \times (91a + 10b)$, non seulement N est un multiple de 11 mais, en plus, on sait lequel.
Remarque : le critère de divisibilité par 11 donne immédiatement le résultat cherché.

C. Voici une solution « à la libanaise », utilisant les relations métriques dans le triangle rectangle (programme libanais de 3^{e}).



La relation $AD^2 = DE \times DB$ donne $3x^2 = 1$.
La relation $AB^2 = BE \times BD$ donne $AB^2 = 6x^2$.

Alors $AB^2 = 2$ et $AB = \sqrt{2}$.

Nota. On a supposé que la figure était réalisable. Raymond Heitz et Jean-Paul Thabaret font remarquer qu'il s'agit d'un rectangle de format A et que l'on peut vérifier, sur une feuille de papier A4, l'égalité des distances DE, EF et FB.

Exercice 511–3 *pioché de-ci, de-là*

Quatre nombres entiers naturels a, b, c et d sont tels que

$$(a+b+c)d = 420$$
$$(a+c+d)b = 403$$
$$(a+b+d)c = 363$$
$$(b+c+d)a = 228$$

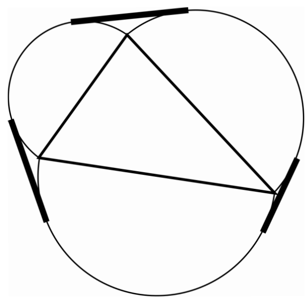
Trouver ces quatre nombres.

Solutions : Maurice Bauval (Versailles), Michel Blévot (Saint Denis de la Réunion), Jean Gounon (Chardonnay), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Guy Brusco (La Garde), Romain Charton (?), Pierre Lapôtre (Calais), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Daniel Vacăru (Pitesti, Roumanie), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé), Vincent Thill (Migennes).

• Voici la solution de Raymond Heitz.
Pioché dans le BV!!! (exercice de-ci, de-là 502-4 …)

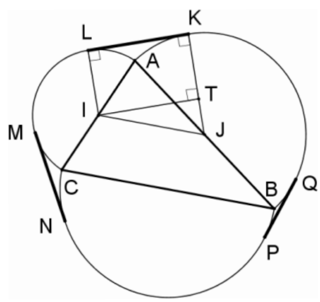
Nota. J'en suis encore rouge de honte …

Exercice 511–4 Michel Lafond – Dijon



Un triangle ABC a pour périmètre 6 m. On construit les trois demi-cercles de diamètres [A,B], [B,C], [C,A] à l'extérieur de ABC, puis les trois segments tangents communs à ces demi-cercles pris deux à deux. Démontrer que le produit des longueurs de ces trois segments est inférieur ou égal à 1 m³.

Solutions : Maurice Bauval (Versailles), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais), Jean-Paul Thabaret (Grenoble), Daniel Vacăru (Pitesti, Roumanie), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Jean-Claude Emeillat (Guipavas), Patrick Tardivel (Toulouse), Jean-Yves Le Cadre (Saint Avé).



• Voici la solution de Jean-Claude Emeillat.
I et J sont les milieux des côtés [AC] et [AB] du triangle ABC.

On pose a = BC, b = AC, c = AB, $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ et S = aire(ABC).

On a $\mathrm{IL} = \dfrac{b}{2}$, $\mathrm{JK} = \dfrac{c}{2}$ et $\mathrm{IJ} = \dfrac{a}{2}$;
de plus (IL) ⊥ (JK) et (JK) ⊥ (LK).
IJKL est donc un trapèze rectangle.
L'application du théorème de Pythagore au triangle rectangle donne

$$\mathrm{IT}^2 = \mathrm{IJ}^2 - \mathrm{TJ}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{c}{2}-\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{a+c-b}{2}\right)\left(\frac{a+b-c}{2}\right) = (p-b)(p-c)..$$

Donc LK² = $(p-b)(p-c)$.
Le même raisonnement donne MN² = $(p-a)(p-b)$ et PQ² = $(p-a)(p-c)$.

Ainsi $\mathrm{LK}^2 \times \mathrm{MN}^2 \times \mathrm{PQ}^2 = (p-a)^2(p-b)^2(p-c)^2$, ;

d'où $\mathrm{LK} \times \mathrm{MN} \times \mathrm{PQ} = (p-a)(p-b)(p-c) = \dfrac{\mathrm{S}^2}{p}$

Et comme $p = 3$, on obtient donc finalement $\mathrm{LK} \times \mathrm{MN} \times \mathrm{PQ} = \dfrac{\mathrm{S}^2}{3}$.

Or nous savons que pour un triangle de périmètre donné, l'aire est maximale dans le cas où le triangle est équilatéral.

Donc ici l'aire est maximale pour $a = b = c = 2$, ce qui donne $\mathrm{S} = \sqrt{3}$.

D'où

$$\mathrm{LK}\times \mathrm{MN}\times \mathrm{PQ} \leq \frac{\left(\sqrt{3}\right)^2}{3} = 1.$$

• Voici la solution de Pierre Lapôtre.

Avec les mêmes notations, $\mathrm{LK} = \mathrm{IT} \leq \mathrm{IJ}$, c'est-à-dire $\mathrm{LK} \leq \frac{a}{2}$; et on obtient de même $\mathrm{PQ} \leq \frac{b}{2}$ et $\mathrm{MN} \leq \frac{c}{2}$.

D'où $\mathrm{LK}\times \mathrm{MN}\times \mathrm{PQ} \leq \frac{abc}{8}$.

L'inégalité des moyennes arithmétique et géométrique appliquée à $\frac{a}{2}$, $\frac{b}{2}$ et $\frac{c}{2}$ donne $\sqrt[3]{\frac{abc}{8}} \leq \frac{a+b+c}{6}$, soit encore $\frac{\sqrt[3]{abc}}{2} \leq 1$ puisque $a + b + c = 6$. Alors $abc \leq 8$ et $\mathrm{LK} \times \mathrm{MN} \times \mathrm{PQ} \leq 1$.