Pourquoi nous sommes tous doués en maths

Conférence inaugurale des Journées Nationales de Toulouse, par Stanislas Dehaene

mise en texte par Catherine Combelles

Je voudrais partager avec vous quelques réflexions sur l'origine des mathématiques et les fondements des mathématiques dans notre cerveau, partager des travaux, certains anciens, d'autres récents : je vais essayer de faire un panorama de l'état de la recherche dans le domaine des nombres, et aussi dans le domaine de l'espace, très rapidement, en m'appuyant en particulier sur les travaux des derniers lauréats du prix Nobel de médecine, qui a récompensé, dans une certaine mesure, la compréhension du sens de l'espace dans le cerveau.

Je ne parlerai pas de pédagogie, mes travaux sont un peu loin de la classe, et mes contacts avec le monde enseignant sont occasionnels même s'ils sont toujours fructueux. Je pense que les sciences cognitives sont pertinentes pour l'enseignement, qu'il y a beaucoup de choses à en tirer : on en a beaucoup parlé dans le domaine de la lecture, où les choses sont très avancées. Dans le domaine des mathématiques, la discussion est en cours. Il y a en outre de grands principes transversaux, dont je parlerai très peu dans cette conférence, principes qui portent sur l'attention, sur l'apprentissage, sur le sommeil, et que les enseignants devraient connaître pour enseigner plus efficacement. Nous organisons un colloque sur ce sujet au Collège de France le 13 novembre 2014 : *l'apport des sciences cognitives à l'École*. Il y a déjà eu un colloque sur ce sujet il y a deux ans, et toutes les vidéos des deux colloques sont disponibles sur le site web du Collège de France.

Le monde est-il mathématique ?

Pourquoi sommes nous tous doués en maths ? Le titre est provocateur. Je voudrais que nous réfléchissions sur l'origine des mathématiques et sur leur place dans notre monde. Est-ce que le monde est mathématique ? Tout le monde connaît la position de Galilée, qui est celle de beaucoup de mathématiciens : « Le livre de la nature est écrit en langage mathématique. » : les mathématiques existent à l'extérieur du mathématicien, ses caractères sont les triangles, les cercles, et autres figures géométriques, sans le moyen desquelles il est humainement impossible d'en comprendre un mot.

La position d'Albert Einstein est un peu différente : Einstein reconnaît l'importance de la pensée humaine et de l'histoire des mathématiques. On connaît le mot de Newton : « Si j'ai vu plus loin, c'est en montant sur les épaules de géants ». Einstein s'interroge :

« Comment se fait-il que la mathématique, qui est un produit de la pensée humaine et indépendante de toute expérience, s'adapte d'une si admirable manière aux objets de la réalité ? ». On connaît aussi le mot d'Eugène Wigner qui a parlé de « la déraisonnable efficacité des mathématiques dans les sciences naturelles ». Comment se fait-il que des objets tirés de notre tête s'appliquent si bien au monde extérieur ? Je ne prétends pas apporter une solution, mais je pense qu'une partie de la réponse provient de l'évolution naturelle, de l'adaptation de notre cerveau au monde extérieur. Le monde extérieur comporte des régularités et les sciences se proposent de capter ces régularités. Mais si nous pouvons le faire, c'est parce que notre cerveau comprend déjà des intuitions mathématiques. Mes travaux cherchent à restaurer et à préciser ce terme d'intuition qui peut être flou, mais qui a une réalité tout à fait particulière lorsqu'on étudie le cerveau des jeunes enfants, en particulier.
La thèse est très simple : au cours de sa très longue évolution, notre cerveau a été doté de représentations élémentaires de l'espace, du temps et du nombre que nous partageons avec de nombreuses autres espèces animales, et qui servent de fondements à notre intuition mathématique. Nous venons au monde littéralement avec des protomathématiques. En particulier, nous avons tous le sens du nombre : ainsi, le titre de la version anglaise de mon livre *La bosse des maths* est *The number sense*, le sens du nombre.
Nous avons une capacité spécifique de représenter le cardinal approximatif d'un ensemble d'objets et de combiner ces quantités dans des opérations simples. Nous héritons également de notre évolution un sens de l'espace, une intuition des formes de la géométrie et de la navigation spatiale. Évidemment l'évolution ne nous a pas tout donné, et la construction des mathématiques est une construction culturelle, et il y a quelque chose de tout à fait particulier au cerveau humain que nous ne comprenons pas encore, qui nous permet de formaliser ces intuitions. Les mathématiques, de mon point de vue, sont une formalisation de ces intuitions sous une forme symbolique : nous créons des systèmes de symboles, avec l'aide de la compétence linguistique, évidemment, et aussi de la capacité d'écrire qui nous permettent cette formalisation.
Je vais vous présenter quelques expériences qui étayent ce point de vue et le rendent plus concret.

Le sens du nombre chez l'animal, chez le bébé ?

Les compétences numériques sont anciennes dans l'évolution : on a trouvé chez de très nombreuses espèces animales, du pigeon jusqu'au rat, au lion ou au singe, et à l'homme bien sûr, des compétences pour l'estimation des quantités dans au moins deux contextes : pour la nourriture, pour évaluer la quantité de nourriture disponible à tel endroit et à tel autre, et pour évaluer le nombre de congénères. Certaines expériences sont étonnantes : il s'agit d'animaux non entraînés, dans la savane. On met en place un haut-parleur et on fait émettre par ce haut-parleur des rugissements, émis par des nombres variés d'animaux. Un petit groupe de lionnes est en train de chasser dans la nuit ; elles entendent ces rugissements et savent reconnaître de combien d'animaux ils proviennent. On constate qu'elles continuent de chasser si leur nombre est supérieur au nombre d'animaux qui rugissent, et qu'elles se retirent

du terrain de chasse si leur nombre en est inférieur. Voilà un contexte social où le nombre compte, où il est multimodal, à la fois auditif et visuel, où il est une question de survie, et où il concerne des animaux non entraînés.
Qu'en est-il de l'espèce humaine ? De très nombreuses expériences chez le tout petit enfant montrent qu'il existe des compétences pour la discrimination des nombres très tôt. Véronique Izard, qui a fait sa thèse avec moi et poursuit ses recherches au Laboratoire Psychologie de la Perception à l'université Paris Descartes, a testé des nouveaux nés (en moyenne, ils avaient 49 heures de vie, le plus jeune 7 heures !), pour tenter de mettre en évidence des compétences innées : on leur fait entendre une série de sons, soit au nombre de 12, soit au nombre de 4. On fait varier les sons, les syllabes, de façon à ce que seul le nombre soit la variable pertinente. Ensuite, on leur présente des diapositives qui représentent de façon non symbolique les deux nombres 4 et 12, et on s'aperçoit que les bébés regardent plus longtemps les diapositives qui correspondent au nombre qu'ils ont entendu. C'est une compétence non symbolique, il s'agit de quantités dans le monde extérieur, et c'est une compétence approximative : le bébé reconnaît 4 versus 12, et c'est très progressivement au cours des premières années de vie que cette capacité de discrimination va se préciser. Car ni l'animal ni le bébé ne sont capables de faire des différenciations fines, 17 versus 18 par exemple.
Autre exemple : les bébés sont capables, à quelques mois, de faire des sortes de calcul, de comprendre les opérations les plus élémentaires : on leur montre une vidéo où des objets apparaissent et se cachent derrière un écran. 5 objets apparaissent et disparaissent derrière l'écran, puis à nouveau 5. On supprime alors l'écran, et il n'y a que 5 objets derrière. La forme et la couleur des objets sont modifiées de sorte que seul le nombre soit la variable pertinente. Les bébés réagissent avec surprise. Ils montrent la même surprise devant 10 – 5 = 10, surprise qu'ils ne montrent pas devant 10 – 5 = 5 . Ils ne sont pas capables de faire un calcul exact, mais ils sont capables de refuser 10 – 5 = 10. Ces expériences mettent en évidence une sorte de capacité de protoarithmétique. Ceci à 5 mois de vie.

Et chez l'adulte ?

Ces compétences ne sont pas détachées des compétences à l'âge adulte. Voici une expérience que j'ai faite il y a plus de 25 ans : on présente des nombres, écrits en chiffres arabes usuels ; on demande aux gens s'ils sont plus grands ou plus petits qu'un nombre de référence, par exemple 65 et on mesure les temps de réponse. Il y a ici un message pour des enseignants : on parle souvent de la pensée comme étant rapide, mais en réalité, les temps de réactions sont longs, et en outre, ils ne sont pas du tout constants. Ils sont d'autant plus longs que les nombres, compris entre 31 et 99, sont proches de 65. La courbe est continue, sans discontinuité évidente aux dizaines. On trouve jusqu'à 10% d'erreurs, et le taux d'erreurs augmente lorsqu'on se rapproche de 65. Le traitement des quantités intervient dans la représentation symbolique des nombres. On peut aujourd'hui compléter ces expériences par l'examen de l'activité du cerveau. Depuis près de 20 ans, on étudie grâce à l'IRM la corrélation de la psychologie avec l'activité du cerveau. On a observé que lorsque les personnes effectuent cette tâche de comparaison de nombres, certaines zones du cerveau, situées dans le lobe pariétal de l'hémisphère gauche et de l'hémisphère droit, de façon à peu près symétrique, sont systématiquement activées et d'autant plus activées que l'opération est difficile. Ces régions sont activées lors de toutes sortes de tâches arithmétiques, quelle que soit la représentation des nombres utilisée, mots, chiffres, dessins. Il y a donc bien une région du cerveau qui entre en activité lorsque nous faisons des mathématiques : tout le monde l'a, et elle entre en activité aussi chez les tout petits enfants, particulièrement à droite. Cette région évolue à mesure que nous apprenons, en particulier lorsque nous apprenons les symboles des nombres. Nous avons fait beaucoup d'études de cette région. Elle est entourée d'autres régions qui interviennent dans des activités spatiales, et qui ont à voir avec l'attention et les mouvements des yeux. Juste à l'arrière de cette région, on trouve des aires qui contrôlent les saccades, et on a pu montrer que ces aires s'activent lorsque nous faisons des calculs et l'ensemble des fonctions du lobe pariétal concerne l'action dans l'espace : la direction des actions, la direction des mouvements de la main vers les objets et ce n'est sûrement pas un hasard si le nombre et l'espace sont très étroitement liés entre eux dans notre cerveau. Cette carte du cerveau ressemble beaucoup à celle que l'on peut observer chez le singe macaque. On a donc fait la prédiction que s'il existait une zone activée lors d'activités numériques chez le singe, elle devait se trouver comme chez l'homme entre la zone arrière dévolue aux saccades, au mouvement des yeux et à l'attention et la zone à l'avant dévolue au mouvement de la main, dans le sillon intrapariétal. L'expérience a été faite au M.I.T. par Andreas Nieder et il a trouvé, et c'est une découverte extraordinaire, des neurones individuels qui s'intéressent aux nombres : on a entraîné des singes à retenir un certain nombre. Ils voient un certain nombre d'objets, puis un autre apparaît, et ils doivent dire si c'est le même nombre ou pas, pour des nombres compris entre 1 et 5. Ils parviennent à le faire de façon approximative, et l'expérience a plus tard été prolongée jusqu'au nombre 30. Une fois que l'animal est entraîné, on enregistre ses neurones, et on constate que dans cette zone, un certain nombre de neurones, environ 30% dans la région la plus dense, sont spécialisés dans un nombre donné : chaque neurone « préfère » un certain nombre. Tel neurone a un pic d'activité lorsque le nombre est 4 et pas lorsque il est 3, par exemple. On parle de codage par population de neurones. Les tracés de l'activité de ces neurones dessinent une série de courbes en cloche distinctes lorsqu'on place en abscisse le logarithme des nombres retenus. Ce graphique rend bien compte d'un comportement approximatif : discriminer 4 de 2 sera beaucoup plus facile que 4 de 5, dont les courbes d'activation sont plus proches, et on comprend mieux l'effet de distance vu précédemment. Est-ce que l'homme a les mêmes neurones des nombres que le singe ? On ne le sait pas encore : il est très difficile d'enregistrer des neurones individuels dans le cerveau de l'homme, il faudrait implanter des électrodes dans le cerveau, et bien sûr, on manque de volontaires !

Mais on a des moyens indirects de le faire. On a utilisé diverses méthodes, et je vous en présente une qui montre bien l'état de l'art dans le domaine de l'imagerie cérébrale.

S'il y a bien correspondance entre les états psychologiques et les états neuronaux, cette correspondance doit marcher dans les deux sens. Habituellement, on connaît

une action et on observe l'activité induite, mais ici, au vu de l'activité cérébrale, on tente de deviner le nombre retenu : des humains réalisent le même travail de mémorisation de nombres, et on prend dans le cortex pariétal des images de très haute résolution, et, en étudiant ces images à l'aide d'un algorithme classificateur multivarié (machine à vecteurs de support), on parvient à savoir mieux qu'au hasard quel était le nombre mémorisé. On observe le patron d'activité dans le cerveau, et chaque personne a un patron différent, et ce patron code le nombre mémorisé.
Dans cette recherche, on ne fait pas de performance extraordinaire, mais on fait mieux que le hasard : on ne parvient pas à s'en servir dans des applications pratiques, mais c'est un élément de preuve de l'existence de ce codage.
On a pu montrer ultérieurement que si on décode dans un premier temps la quantité dépeinte sous forme d'un nuage de points, on peut généraliser l'expérience à des nombres codés en chiffres arabes. Le codage cérébral est commun.

Et le sens des nombres chez les Indiens d'Amazonie ?

Il y a donc une représentation du nombre extrêmement précoce dans le cerveau, que nous partageons avec d'autres espèces animales, qui est présente indépendamment de la compétence linguistique. On a eu une chance extraordinaire de pouvoir le tester, en étudiant une population d'Indiens d'Amazonie qui s'appelle les Mundurukus. Ce peuple a un lexique tout à fait restreint de noms de nombres.
Un se dit : Pug ma,
Deux : xep xep,
Trois : ebapug,
Quatre : ebadipdip,
Cinq : pug pogbi, qui veut dire aussi une main, une poignée.
Au-delà, il n'y a plus de noms de nombres. De temps en temps on observe des combinaisons du genre xep xep pogbi, qui veut dire deux mains, et ensuite, on a des mots pour peu et beaucoup.
Ces nombres ne sont pas utilisés pour compter, cette population n'a pas inventé le comptage, ils ne récitent pas un, deux, trois, quatre, cinq. Ils sont utilisés comme des adjectifs décrivant des quantités qu'ils perçoivent. C'est une situation idéale pour étudier ce qui se passe chez l'homme adulte dans une situation où le langage n'est pas disponible. Notre prédiction était que ces gens seraient compétents mais d'une manière approximative.

Voici un des tests effectués pour étudier leur intuition de l'addition et de la comparaison : une animation vidéo montre des points qui tombent en pluie dans une boite de conserve vide opaque, puis d'autres points tombent de même dans la même boîte. On montre alors un nuage de points extérieur à la boîte, et on demande s'il y en a plus dans la boîte de conserve que dans ce nuage extérieur. Les réponses des Mundurukus montrent qu'ils sont très compétents, ils réussissent à 95% tout comme nous si les distances entre les nombres sont suffisamment grandes : ils n'ont jamais eu le moindre enseignement, ils n'ont pas de mots, mais ils travaillent sur de grands nombres et ils savent intuitivement ce qu'est une addition et une comparaison, et ils sont capables de réaliser cette tâche.

Voici par contre une tâche qu'ils réussissent mal : une pluie de points tombe dans une boîte vide, puis une partie de ces points tombe mystérieusement du fond de la boîte et disparaît. Combien en reste-t-il ? La réponse est à choisir entre 0, 1 et 2. La tâche devient très difficile quand le premier nombre est grand. Quand il dépasse 4 ou 5, c'est-à-dire les nombres nommables en langage munduruku, la performance des Indiens s'écroule complètement, alors que celle des sujets français reste bonne. On leur demande soit une réponse exacte verbale, 0, 1 ou 2, soit à l'aide d'images montrant une boîte contenant 0, 1 ou 2 objets. Un Français peut quantifier, peut mettre des mots et en déduire la bonne réponse, les Indiens éprouvent beaucoup plus de difficultés. On voit ici l'importance de ce système approximatif, mais aussi ses limites lorsqu'il s'agit de faire des mathématiques exactes.
Voici une autre expérience. On montre des disques comportant des points, de 1 à 10, et on demande aux Indiens de les placer sur un axe, entre 1 et 10. Ils comprennent ce qu'ils doivent faire, mais ils ne le font pas de la même manière que nous. Ils le font en gros d'une manière logarithmique. Pour des français, il est évident que le milieu doit être 5 : les sujets de contrôle de cette expérience, américains éduqués, font de même, nous avons une conception linéaire du nombre. L'opération +1 permet de passer d'un entier au suivant par une translation toujours identique. Ce n'est pas le cas dans la conception spontanée du nombre des Indiens d'Amazonie. Les nombres de 1 à 5 sont plus espacés que les suivants. C'est une représentation qui fait appel au rapport entre les nombres plutôt qu'à leur différence.
Cela peut paraître exotique, mais les petits enfants français ou américains font exactement la même chose, et ceci jusqu'au CP inclus. On utilise les nombres de 1 à 100, et on constate que beaucoup placent 10 et non 50 au milieu. C'est l'éducation qui modifie ce comportement. Ainsi, le simple fait de compter et de comprendre la nature linéaire des entiers est un produit de l'éducation mathématique.

Que se passe-t-il dans le cerveau ?

Que se passe-t-il dans le cerveau lorsque l'enfant apprend à compter ? Lorsqu'il apprend les noms des nombres comme le mot trois, et lorsqu'il il apprend des symboles écrits comme le chiffre 3 ? Nous commençons seulement à le comprendre. Il y a une vingtaine d'années, j'ai proposé un modèle avec mon collègue Laurent Cohen : l'idée, c'est que nous apprenons à mettre en connexion cette aire du calcul approximatif avec la représentation dans d'autres aires cérébrales de la forme des chiffres ou des mots exprimant les nombres. Ces connexions vont devenir extrêmement fluides et vont permettre de passer très facilement d'un code à l'autre. C'est en particulier dans l'hémisphère gauche que se situent les aires qui nous permettent d'utiliser les mots du langage pour parler des nombres.
Cette mise en connexion va renforcer le système, elle va permettre une représentation des nombres plus précise, parce que le langage favorise la précision, et elle autorise l'utilisation de différents codes pour représenter les nombres, par des symboles ou par des mots, représentations entre lesquelles nous pouvons alterner, ce qui permet d'utiliser les propriétés naturelles de ces codes pour faire des calculs : il est plus facile de faire un calcul avec des chiffres arabes qu'avec les seuls mots, alors que les mots sont mieux adaptés pour retenir les tables de multiplication, par exemple,

comme une comptine.
Donc, le cerveau doit se transformer. A-t-on des données qui vont dans ce sens ? Pendant très longtemps, on n'a pas trouvé la région qui serait spécialisée dans la représentation des chiffres. On l'inférait sur la base de lésions chez des patients, mais c'est seulement en 2013 qu'un collègue en Californie, Joseph Parvisi, a découvert, lors d'enregistrement intracrâniens, que certaines électrodes déviaient uniquement lorsqu'on présentait au patient des chiffres arabes, alors qu'elles ne montraient que peu ou pas de réponse lorsqu'on présentait des lettres, d'autres symboles, des visages, des maisons, etc. Cette région très spécialisée dans la représentation des chiffres arabes est présente dans les deux hémisphères. Ainsi outre la région pariétale qui s'intéresse aux quantités, quand on a appris les chiffres arabes, une région ventrale permet de les reconnaître. Ces deux régions sont en interaction très rapide. En particulier, on a commencé à montrer que chez les enfants qui apprennent, ce système se transforme : on a étudié en fonction de l'âge l'activation des domaines de l'arithmétique. On observe par scanner les variations avec l'âge de l'activation de ces zones lorsque l'enfant fait des calculs simples : les régions ventrales et pariétales s'activent conjointement systématiquement, mais à mesure que le calcul mental est automatisé, on observe en outre une décroissance de l'activité du cortex frontal. Or le cortex frontal intervient dans toutes les tâches avec effort : avec l'âge, le calcul se routinise ; il cesse d'utiliser les régions généralistes du cortex frontal et fait de plus en plus appel aux régions postérieures du cerveau qui sont impliquées dans le calcul. C'est un message important pour l'enseignement. Bien sûr, il faut que l'enfant comprenne, et on ne peut apprendre les chiffres arabes sans comprendre les quantités qu'ils représentent. Mais il est aussi très important que les enfants automatisent le calcul. Si on n'automatise pas le calcul, les régions du cortex frontal resteront sollicitées par le calcul mental et ne pourront pas être utilisées pour autre chose. Le cortex frontal fonctionne comme une sorte de goulot d'étranglement dans le cerveau. Automatiser le calcul est fondamental, parce que c'est cela qui permet de passer à l'étape suivante, à d'autres tâches d'abstraction, en libérant les ressources du cortex frontal.

De l'intuition à l'abstraction en passant par l'automatisation.

Ma vision des mathématiques, étayée par des données qui sont fragmentaires, peut se schématiser ainsi : nous avons des représentations intuitives, nous leur attachons des symboles, nous automatisons les calculs et nous libérons le cortex frontal pour une étape suivante dans laquelle nous attacherons de nouveaux symboles, de plus en plus abstraits. Il y aura ainsi une construction pyramidale des mathématiques, fondée sur des degrés de plus en plus élevés d'abstraction. À chaque étape, il ne s'agit pas seulement de comprendre ou seulement de routiniser, les deux sont également importants.
On commence à avoir des preuves de plus en plus importantes que le « sens des nombres » joue un rôle fondateur dans l'apprentissage des mathématiques. Lorsque j'ai présenté ces idées dans *La bosse des maths*, il y a à peu près 20 ans, beaucoup de mathématiciens, par exemple Alain Connes, m'ont dit : « mais beaucoup de mathématiciens sont nuls en arithmétique ; les nombres, ça n'a rien à voir avec les

mathématiques. » C'est une réponse que l'on me fait souvent. Mais ce discours oublie complétement l'histoire des mathématiques. Or le nombre y a joué un rôle fondamental. Pendant longtemps, des calculs qui nous semblent très faciles sont restés du domaine des mathématiques les plus avancées. L'équation du second degré dans les mathématiques arabes du moyen-âge était LE grand problème des mathématiques. La résolution des équations du troisième et du quatrième degré était une grande énigme, au point que les mathématiciens qui en ont découvert la résolution se la sont fait voler ! Le nombre est bien au cœur de l'histoire des mathématiques. C'est ce que montre aussi la psychologie. Comprendre un symbole numérique ou une opération arithmétique, nécessite de mettre en relation les symboles avec la représentation préexistante du nombre et des opérations. La maturité du sens du nombre détermine la vitesse et la facilité avec laquelle les enfants apprennent les nombres et les calculs, et l'intégrité de ce système est une condition nécessaire à l'apprentissage normal du calcul. En cas de lésion dans cette zone, le système sera fortement perturbé.

En demandant à un sujet de choisir le plus grand de deux nombres représentés par deux nuages de points, on peut mesurer ce qu'on appelle son acuité numérique, c'est-à-dire la variation minimum en pourcentage entre deux nombres qu'il est capable de discriminer. On observe que les bébés sont sensibles à des ratio de l'ordre de 3 pour 1 (d'où l'expérience décrite plus haut avec 4 et 12). Très vite, cette fraction, appelée la fraction de Weber diminue avec l'âge et un adulte est capable de discerner des variations de 15 à 20% suivant les individus : le sens des nombres s'est considérablement raffiné. Les Indiens Mundurukus ont une acuité de l'ordre de 30%, et c'est l'éducation qui la réduit à 15 à 20%. À mesure que se met en place cette diminution, les enfants sont capables de comprendre les noms des nombres. Chez les petits, entre deux et quatre ans, les enfants peuvent très bien réciter les noms des nombres sans savoir ce qu'ils veulent dire, et ce n'est que très lentement que la compréhension de chacun de ces mots va se mettre en place au fur et à mesure que l'acuité numérique se raffine : un enfant de deux ans et demi va comprendre le mot un sans comprendre le mot deux ; il faudra six mois de plus pour qu'il comprenne le mot deux, puis, un peu plus tard le mot trois. La compréhension fine des quantités s'installe de façon lente, et ce n'est pas la récitation des nombres qui l'assure.

Et chez les enfants dyscalculiques ?

On a pu montrer que la variabilité d'un enfant à l'autre dans la précision de cette intuition des nombres prédit les capacités mathématiques un peu plus tard : le simple test « quel est le plus grand de ces deux nombres ? » mesure quelque chose d'important pour les mathématiques.

Une série d'expériences a été menée par Gilmore, Mac Carthy et Elisabeth Spelke à Harvard, montrant que des enfants de maternelle comprennent déjà quelque chose aux additions : on leur dit « Sarah a 21 bonbons, et on lui en donne 30 de plus. Jean en a 34, qui en a le plus ? ». Les enfants de maternelle font mieux qu' en répondant au hasard. Ils n'ont jamais appris les additions à deux chiffres, mais ils ne comprennent pas rien, ils comprennent un petit peu. Si on mesure la précision de ce système approximatif, et on peut le faire par des tests non symboliques, on peut prédire dans une certaine mesure les performances en fin d'année. Mesurer le sens des nombres en maternelle prédit la performance en maths en CP, et le sens des nombres chez l'adolescent est corrélé à sa réussite en calcul et en mathématiques au cours de sa scolarité. Il y a même des recherches causales : on entraîne le sens du nombre pendant quelques heures, et on montre que ça a des conséquences sur la réussite en arithmétique symbolique : on commence donc à penser qu'il y a là une relation de causalité assez étroite. Ainsi, des enfants dyscalculiques n'ont pas la même fraction de Weber que les autres ; à 10 ans, ils ont la même acuité qu'un enfant de quatre ans. Leur perception des quantités numériques est très anormale, et cela explique peut-être pourquoi ils ont des difficultés comportementales dans le domaine de l'arithmétique. Quelles peuvent être les causes de ces détériorations ? Plusieurs recherches pointent vers la région pariétale, surtout à gauche : un accident vasculaire dans cette région à l'âge adulte peut rendre un sujet dyscalculique. On parle alors d'acalculie : un calcul aussi simple que 5 – 2 , ou citer un nombre entre 2 et 4 devient un obstacle majeur. Ces déficiences s'observent aussi chez des enfants, en lien avec des anomalies dans la région pariétale avec quelques causes prépondérantes, comme la prématurité, ou des maladies génétiques, notamment le syndrome de Turner.

La dyscalculie est un syndrome réel, moins connu que la dyslexie, relativement rare, (quelques pour cent des enfants). Que faire dans ce cas ? Les difficultés, comme dans la dyslexie ne sont pas de nature différente de celles que rencontre n'importe quel autre enfant. Souvent, les circuits neuronaux ne sont que partiellement détériorés et l'enseignant peut intervenir en renforçant son message, en le répétant tous les jours, profitant ainsi du fait que le sommeil consolide les apprentissages. Des logiciels peuvent l'aider. Mon laboratoire a développé deux logiciels, « l'attrape-nombre » et « la course aux nombres », qui s'adressent plutôt aux jeunes enfants de 4 à 8 ans, mais qui peuvent être utilisés par des enfants dyscalculiques plus âgés qui auraient besoin d'aide aux niveaux les plus élémentaires. Ces logiciels font manipuler les nombres sous forme de jeu. La Course aux nombres, le plus simple, fait travailler la représentation linéaire du nombre et l'addition vue comme une translation sur un axe. Pour développer ce logiciel, on s'est appuyé sur des recherches antérieures qui ont montré que les jeux de plateaux jouent un rôle très important pour aider les enfants à développer leur sens du nombre : même en l'absence d'ordinateur, il y a moyen d'aider les enfants, en particulier les enfants de familles défavorisées avec des jeux comme le jeu de l'oie, les petits-chevaux, la bonne paye.

L'attrape-nombre s'adresse à des enfants un peu plus âgés : il s'agit de combiner des nombres pour former une dizaine ou un nombre à deux chiffres. Il est plutôt destiné à faire comprendre la numération décimale de position. C'est un jeu de type Tétris qui est assez intensif et rapide, beaucoup plus qu'un travail usuel sur un cahier. Il existe d'autres jeux, et cette activité ludique est en train de se développer. Il existe aujourd'hui des jeux pour entraîner à l'algèbre ou la géométrie, de façon un peu cachée. J'ai récemment rencontré une petite société franco-norvégienne, « WeWantToKnow », qui développe le jeu DragonBox, qui m'a beaucoup impressionné, car ils font faire aux enfants de vraies démonstrations de théorèmes géométriques, mais sous forme cachée à travers un jeu. Je pense que ce domaine va beaucoup se développer.

Et le cerveau des mathématiciens professionnels ?

Pour répondre à l'objection d'Alain Connes, qui affirmait que le calcul arithmétique n'a rien à voir avec les mathématiques, je voudrais vous décrire une expérience que nous avons faite très récemment : nous avons voulu savoir si l'activité des mathématiciens professionnels utilisait ces mêmes zones pariétales et ventrales. Nous avons conçu un test qui fait appel à différents domaines des mathématiques; c'est Marie Amalric, de notre laboratoire qui a réalisé ce test, avec Saab Abou-Jaoudé, qui était mon professeur de mathématiques en Math Sup et en Math Spé, et nous avons conçu plusieurs sortes de stimuli : d'abord un certain nombre d'images, destinées à voir si certaines zones du cerveau sont spécialisées non seulement pour des nombres mais aussi pour des équations. Nous avons donc flashé devant des sujets mathématiciens et non-mathématiciens un certain nombre de diapositives, et nous avons observé par I.R.M. les régions du cerveau qui étaient activées. Puis, dans un deuxième test, nous avons testé la compréhension du sens profond de propositions mathématiques : le sujet écoute une série de propositions et doit juger pour chacune si elle est vraie, si elle est fausse ou si elle est absurde.
Par exemple : « Toute matrice carrée est équivalente à une matrice de permutation. » On donne 4 secondes de réflexion et le sujet doit donner une réponse (ici, c'est faux !). On a quelques résultats préliminaires, on commence seulement à avoir les résultats définitifs de ce travail mais on a observé plusieurs choses intéressantes : d'abord, les nombres et les formules mathématiques activent massivement certaines aires du cerveau, aires qui paraissent beaucoup plus développées chez les mathématiciens, parmi les aires visuelles du cerveau. Chez les mathématiciens, on voit des régions très importantes dévolues à la représentation des chiffres arabes, elles sont présentes aussi chez les non-mathématiciens, mais nettement moins étendues. On trouve aussi des régions qui répondent aux formules mathématiques, activité qui se propage dans les aires dorsales.
Et lorsque le sujet réfléchit à un problème, on voit immédiatement s'activer simultanément le réseau ventral, le réseau du cortex pariétal et des aires du cortex frontal. Et ce sont des réseaux différents de ceux qui sont activés par des problèmes non mathématiques. On avait pour contrôle des questions de même longueur, dites par la même personne, mais qui ne parlaient pas du tout de mathématiques, mais de faits historiques (Exemple : « Est-ce que Léonard de Vinci a pu rencontrer Machiavel ? »). Ce qui nous a intrigués, c'est qu'on ne trouve quasiment pas de différence entre les différents domaines des mathématiques. Du moment qu'on réfléchit à des mathématiques, le même réseau est systématiquement activé.
Le troisième résultat intéressant, et que nous avions prédit, est que ce réseau activé par la réflexion sur des questions mathématiques s'appuie sur les régions qui chez les non-mathématiciens s'intéressent déjà aux nombres et à l'arithmétique : les mathématiques de haut niveau recyclent le même réseau d'aires cérébrales que les nombres et l'arithmétique. Cette activité est bien sûr le résultat d'un apprentissage : pour un non mathématicien, ces phrases ne signifient pas grand'chose et n'ont pas cet effet activateur sur le cerveau. On peut donc étudier quantitativement l'activité

mathématique de haut niveau, on peut observer les circuits en jeu, mesurer la vitesse et la durée de l'activation et on voit qu'ils s'appuient sur des zones anciennes dans l'évolution : c'est cette idée de recyclage neuronal que j'ai développée aussi pour la lecture. Les activités nouvelles développées par l'éducation vont s'appuyer sur des régions plus anciennes dans l'évolution.

Qu'en est-il de la géométrie ?

Je voudrais maintenant parler un peu de la géométrie. J'ai beaucoup parlé du nombre et le livre *La bosse des maths* parle exclusivement du nombre, mais dans les vingt dernières années, les recherches pour comprendre ce qui se passe dans le domaine de la géométrie ont bien avancé, avec une histoire très similaire : des fondements dans l'évolution et un développement culturel ultérieur.

L'évolution du sens de l'espace est certainement beaucoup plus ancienne que l'évolution du sens du nombre. Un animal se déplace, et pour se déplacer, il a nécessairement besoin d'un sens de l'espace. Il faut savoir où l'on est et savoir revenir dans des lieux mémorisés. Les fourmis doivent pouvoir retrouver leur nid. Des expériences magnifiques sur des fourmis du désert, qui se déplacent sur un terrain parfaitement plat, ont montré que ces fourmis ont un sens de l'espace comparable à celui des navigateurs qui sont capables d'intégrer leur chemin : l'intégrale du chemin a l'air d'exister chez la fourmi ! Une fourmi qui cherche de la nourriture a une marche aléatoire. Si elle trouve une miette de nourriture, elle revient à son nid selon un chemin quasiment rectiligne. L'expérience clé a été de prélever la fourmi au moment où elle trouve son élément de nourriture, et de la déplacer à un autre endroit dans le désert : elle refait alors le déplacement rectiligne qui aurait conduit à son nid. Ne le trouvant pas, elle recommence son mouvement brownien pour chercher son nid. Il est incroyable qu'un mini-cerveau comme celui-là soit capable d'intégrer des informations spatiales ! Le lien avec le nombre est assez amusant : des collègues remarquables, parmi lesquels Rüdiger Wehner ont monté une expérience très ingénieuse. L'article est paru en 2006 dans la revue *Science*. Comment savoir si la fourmi compte ses pas ou si elle a une notion continue de l'espace ? Les chercheurs ont mis des échasses aux fourmis en collant des soies de porc à leurs pattes pour les allonger et donc allonger leurs pas, ou ont raccourci leurs pattes pour raccourcir leurs pas : on constate que le vecteur de déplacement, au moins temporairement, est modulé d'autant. Si leurs pas s'allongent, elles vont plus loin, et si leurs pas raccourcissent, elles vont moins loin, ce qui suggère que la variable mémorisée est le nombre de pas. Ensuite, la fourmi se re-calibre, et au bout de quelques jours, ce comportement disparaît. Cela suggère que déjà, le nombre et l'espace sont étroitement mêlés.

Chez les grands mammifères, on commence à comprendre comment ce sens de l'espace est implémenté dans le cerveau. C'est là qu'intervient le prix Nobel de biologie et médecine 2014. Les lauréats ont découvert des cellules qui codent l'espace. La première découverte, celle de John O'Keefe, est celle des « cellules de lieu », qui se trouvent dans l'hippocampe, structure interne du cerveau. Dans l'hippocampe, on trouve des cellules qui préfèrent un lieu. La souris se promène dans une sorte d'arène, et tel neurone particulier décharge dans tel point de l'espace. Ces cellules déchargent quand la souris a les yeux ouverts, mais aussi si elle est dans l'obscurité, tant que la souris sait où elle est, et avec pour seul indice sa propre locomotion. Ces cellules ont été découvertes très tôt, dans les années 70. Chacune décharge dans un endroit précis de l'espace.

Puis, les deuxièmes lauréats du prix Nobel, May-Britt et Edvard Moser, un couple de chercheurs norvégiens, ont découvert, il y a seulement une dizaine d'années, d'autres cellules, dans une autre région, le cortex entorhinal, qui sont à une synapse de distance des cellules de lieu de l'hippocampe. Ce sont les « cellules de grille ». La découverte est extraordinaire : ce sont des neurones qui répondent lorsque l'animal est à un certain endroit, mais plusieurs endroits les activent, et ces lieux qui les activent sont les sommets d'un réseau de triangles équilatéraux qui pavent l'espace. Il y a de bonnes raisons de penser que ces neurones existent chez l'homme : ainsi, nous transportons tous dans notre tête un réseau abstrait de triangles équilatéraux qui pavent l'espace, et lorsque nous nous déplaçons, ces neurones déchargent, gardant trace du lieu où nous sommes dans l'espace. Tout n'est pas encore compris, mais on observe bien un plan dans l'espace : c'est dire que notre cerveau possède de façon innée une notion de plan qu'il est capable d'appliquer au monde extérieur.

Une troisième sorte de cellule intervient dans ce comportement : ce sont les cellules de direction de la tête. Ces cellules déchargent où que soit l'animal. Elles codent la direction de sa tête, telle cellule déchargeant pour telle direction de la tête.

Tous ces neurones sont connectés entre eux d'une manière qui n'est pas encore bien comprise, mais c'est ce qui permet d'intégrer le chemin de l'animal, comme le faisaient les fourmis du désert.

Ainsi, le sens de l'espace est très profond. Il y a vraiment des structures abstraites dans le cerveau qui permettent de comprendre l'espace. Si on a une lésion dans cette région, il en résulte des problèmes spatiaux. Ces zones sont très souvent impliquées dans le début de la maladie d'Alzheimer : un des premiers symptômes de la maladie d'Alzheimer est que la personne est désorientée dans l'espace. Par exemple, elle est perdue à 300 mètres de chez elle. Ce sont sans doute ces réseaux qui sont détériorés les premiers.

Peut-on montrer que ce sens de la géométrie conduit à des intuitions mathématiques ? Revenons à nos Indiens Mundurukus. On a fait beaucoup de tests chez eux, et on a testé en particulier la géométrie. Il suffit de regarder leurs visages, souvent peints de figures géométriques pour savoir qu'ils ont des compétences dans ce domaine : on y voit des parallèles, de la symétrie, etc.

On l'a aussi testé directement. Un test très élémentaire présente sur une diapositive une série d'images représentant deux segments de droites. Tous les couples de segments sont parallèles sauf un, et on demande de trouver l'intrus. Même chose avec une série d'images représentant des disques noirs, dont le centre apparaît en blanc, sauf sur l'un des disques, où le point blanc n'est pas placé au centre. Sur une troisième diapositive, il faut repérer un triangle non rectangle parmi des triangles rectangles, puis sur un autre, une paire de triangles non symétriques par rapport à un axe horizontal bien visible, etc.

Or les Mundurukus ont très peu de mots pour la géométrie : ils n'ont pas de mot pour carré, ou pour triangle par exemple. Et pourtant, sur tous les sujets, qu'il s'agisse de figures, de géométrie euclidienne, de topologie, de propriétés métriques de distance, d'angle, de transformation géométrique, les Indiens font systématiquement mieux qu'au hasard. Chez eux, les questions de chiralité sont très difficiles, mais tous les autres concepts sont soit présents soit faciles à « intuiter ». Et parmi ces problèmes, ce sont les mêmes qui posent des difficultés aux Indiens Mundurukus et aux étudiants de Harvard, ou aux enfants Mundurukus et à des enfants américains que nous avons aussi testés.

On a aussi pu montrer que les Indiens avaient le sens d'une carte. On leur présente un schéma montrant deux cercles et un carré, représentant des boîtes cylindriques et cubiques. Ils doivent l'utiliser pour trouver un objet caché dans une des boîtes, indiquée sur le plan. Ils comprennent la correspondance entre ce graphique et l'espace qui les entoure et peuvent l'utiliser pour trouver l'objet.

On s'est demandé si cette géométrie intuitive est euclidienne. On sait qu'Euclide avait inclus dans sa géométrie le fameux cinquième postulat qui revient à affirmer que la somme des angles d'un triangle fait toujours 180°. Les mathématiciens ont longtemps essayé de le prouver à partir des autres postulats et n'y sont jamais parvenu. Saccheri en 1733, puis Lobatchevsky en 1829, Bolyai, en 1832, et Gauss ont exploré les conséquences de la « géométrie imaginaire » obtenue en niant ce postulat, espérant le prouver par l'absurde, mais ils n'ont pas trouvé de contradiction. Des modèles explicites de ces géométries ont montré plus tard qu'elles étaient cohérentes. Ainsi, un triangle sur une sphère a toujours une somme des angles plus grande que π. Il y a eu un décalage historique très important entre la géométrie euclidienne et la géométrie non-euclidienne. Qu'en est-il chez les Indiens Mundurukus ? On a tenté, comme dans le Ménon de Platon, de les mettre en mesure de répondre à une question mathématique sans faire appel à des connaissances antérieures.

Pour cela, on leur a montré sur un écran d'ordinateur une petite animation accompagnant l'histoire suivante : on est dans une plaine toute plate. Il y a des villages, et entre les villages, des routes toutes droites. Voici deux villages et le chemin qui les relie. De ces deux villages, partent deux routes dont on a tracé le début, qui partent vers un troisième village. Où est ce troisième village sur ce dessin ? et comment sont disposées les routes qui partent de ce village vers les deux premiers villages ? On demande aux personnes de répondre avec les mains, ou avec un goniomètre, qui permet de produire un angle. Ensuite, on recommence la même histoire mais sur une surface sphérique et non dans un plan et on pose les mêmes questions. Sur la sphère, les réponses obtenues sont bien corrélées avec les valeurs données par la géométrie sphérique. Par contre, dans le plan, on perd cette corrélation.

Mais quand j'ai calculé en radian la moyenne des sommes des angles des triangles du plan d'après leurs réponses, j'ai trouvé 3,14 ! On a écrit dans l'article qu'on avait trouvé la manière la plus absurde de trouver les décimales de π !

On a refait cette expérience avec des enfants et avec des adultes éduqués dans le système scolaire américain. Les réponses des Américains sont tout aussi approximatives sur le plan que celles des Indiens, mais elles sont nettement moins

bonnes sur la sphère, comme si leur éducation à la géométrie euclidienne avait biaisé leur intuition.
Ainsi, il semble que toutes les personnes disposent d'intuitions géométriques flexibles, très rapides, adaptables à diverses surfaces, mais à condition d'introduire un modèle mental adéquat. Il y a ici un message pour les professeurs de mathématiques : introduire des modèles mentaux qui font appel à l'intuition des enfants.
D'autre part, l'intuition est plus immédiate dans le plan que sur la sphère chez les sujets américains mais pas chez les Indiens d'Amazonie, ce qui suggère que c'est largement un effet de l'éducation.

Conclusion

En conclusion, nous sommes le résultat d'une évolution chez les primates, chez les mammifères, et chez d'autres espèces plus anciennes, qui nous a donné des intuitions profondes : nous parvenons à calculer et à faire de la géométrie parce que nous héritons de cette évolution des systèmes de compréhension de l'espace et de représentation approximative des quantités que nous recyclons pour des usages nouveaux.
Et nos intuitions s'ancrent dans des représentations concrètes, adaptées au monde qui nous entoure : il est plus facile de travailler lorsqu'on a une représentation concrète, un modèle mental. On revient ici au problème abordé au début de cette conférence : pourquoi la « déraisonnable efficacité des mathématiques » ? Peut-être parce que nos mathématiques ne viennent pas de nulle part, ce n'est pas un jeu culturel arbitraire. C'est un jeu avec des objets qui proviennent de l'évolution parce qu'ils sont pertinents dans le monde extérieur. Nous avons dans notre tête ces objets parce qu'ils sont utiles à la navigation spatiale et à la compréhension du nombre, à l'adaptation au monde extérieur et cette utilité se prolonge dans nos mathématiques actuelles.
Bien sûr, nous ne sommes pas figés avec des mathématiques héritées de notre évolution. C'est peut-être le plus grand mystère de notre cerveau humain : pourquoi sommes-nous la seule espèce capable de produire des systèmes de symboles, des systèmes de langage ? Cet aspect-là n'est pas bien compris. Nous devons encore comprendre ce qu'il y a de particulier dans les circuits du cerveau de l'homme qui permet cette activité culturelle et cette pédagogie aussi : aucun autre animal n'enseigne comme nous le faisons, comme vous le faites, à ses petits.
Le résultat de cet apprentissage, c'est que nous augmentons les compétences de notre cerveau. Nous créons des réseaux de communication entre des aires qui sinon ne se parleraient pas de façon aussi directe, nous mettons en liaison des régions anciennes avec des aires qui permettent de la symbolisation, et de cette éducation, émergent des circuits beaucoup plus efficaces, routinisés, qui répondent avec une très grand vitesse, qui nous permettent par exemple de penser à la forme des chiffres arabes comme à des quantités de façon tout à fait transparente. Nous ne pouvons pas poser les yeux sur la forme d'un chiffre arabe sans le concevoir comme une quantité. C'est cela, le résultat d'une bonne pédagogie : la construction d'un réseau efficace et rapide dans le cerveau de l'enfant.