

# Tournoi Français des Jeunes Mathématiciennes et Mathématiciens

## TFJM<sup>2</sup>

Mathieu Lequesne

### I. Présentation

#### Un jeune concours enrichit la palette des compétitions mathématiques

Le Tournoi français des jeunes mathématiciennes et mathématiciens (TFJM<sup>2</sup>) existe depuis 2011. Il est organisé par le département de mathématiques de l'université Paris-Sud et l'association Animath. Il est l'étape française du tournoi international « International Tournament of Young Mathematicians » (ITYM), créé en 2009, qui fonctionne sur le même principe.

Ce tournoi est destiné aux élèves de lycée. Il se distingue d'autres compétitions comme les Olympiades de mathématiques

1. en proposant des problèmes ouverts dont les énoncés sont connus à l'avance ;
2. en étant organisé par équipes.

Guidés par des encadrantes et encadrants, les équipes composées de 4, 5 ou 6 élèves ont environ deux mois et demi pour réfléchir aux problèmes exposés. Les problèmes proposés sont inhabituels pour la plupart des élèves, car ils n'admettent, à la connaissance du jury, pas de solution complète. Pour les équipes, il s'agit donc de comprendre le problème, de résoudre des cas particuliers, de repérer les difficultés, ... La liste des problèmes proposés recouvre les domaines de l'algèbre, l'analyse, la combinatoire, la géométrie et la théorie des nombres.

#### Les objectifs

Les principaux objectifs du tournoi sont, à court terme :

- donner aux élèves une approche des mathématiques différente, se rapprochant d'un véritable travail de recherche ;
- stimuler l'intérêt pour les mathématiques et leurs applications ;
- développer la pensée scientifique des élèves, leurs talents de communication, et leur capacité à travailler en équipe ;
- permettre l'échange d'expérience entre enseignants et étudiants.

Les objectifs à plus long terme sont :

- améliorer la perception générale des mathématiques par le grand public et notamment les jeunes scolarisés, par une meilleure compréhension de leur impact, de leur utilité et de leur vitalité ;
- augmenter globalement le flux d'étudiants effectuant des études longues dans un domaine scientifique, et en particulier en mathématiques, physique, mécanique,

informatique, sciences de l'ingénieur;

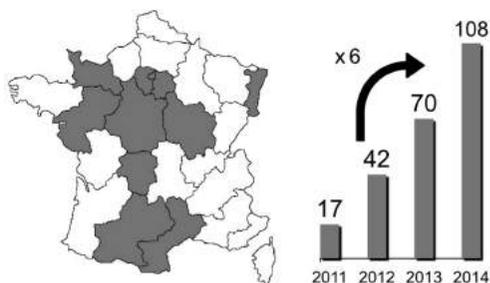
- atténuer les disparités sociales et géographiques ;
- inciter et aider les jeunes filles à surmonter la barrière des préjugés pour se lancer dans des études à forte composante mathématique.

### Un peu d'histoire

C'est David Zmiaikou, jeune mathématicien biélorusse, qui est à l'origine du **TFJM**<sup>2</sup>, ainsi que de sa version internationale, l'ITYM. Pendant ses années en tant que doctorant en mathématiques à l'université Paris-Sud, il a eu l'idée d'organiser un tournoi international à l'image des tournois de mathématiques en Biélorussie. Avec l'aide de Bernardo da Costa, doctorant aussi à la faculté d'Orsay, et avec le soutien de l'association Animath, le premier Tournoi International des Jeunes Mathématiciens a eu lieu en 2009 dans les installations de l'université avec la participation de six équipes provenant de quatre pays différents : Biélorussie, Bulgarie, France et Russie.

En 2011, deux ans après le succès du premier tournoi, ce même groupe plus un troisième doctorant, Igor Kortchemski, décident de créer la version française, en partie pour mieux préparer la ou les équipes françaises envoyées à l'ITYM. C'est ainsi que le **TFJM**<sup>2</sup> est né, accueillant pour sa première édition quatre équipes.

Les deux tournois se sont bien développés depuis, et ce sont désormais d'anciens participants qui se chargent de l'organisation du **TFJM**<sup>2</sup>.



Représentation géographique en 2014  
et développement du nombre de participants.

Pour le tournoi 2015, l'objectif est de doubler le nombre d'équipes.

## II. Le déroulement du tournoi

La cinquième édition du **TFJM**<sup>2</sup> se déroulera fin mars pour les tournois régionaux organisés sur un week-end à Palaiseau, Paris, Rennes, Saint-étienne, Strasbourg et Toulouse, puis sera suivie d'une finale du 14 au 17 mai 2015 à l'École polytechnique et l'ENSTA ParisTech. Elle est organisée par le département de mathématiques de l'université Paris-Sud et l'association Animath via leur appel à projet Cap'Maths. Cette régionalisation est une nouveauté de cette année suite à la croissance importante des demandes d'inscription : les années précédentes, le **TFJM**<sup>2</sup> n'était

constitué que d'une rencontre nationale à l'École polytechnique et l'ENSTA ParisTech.

**Constitution des équipes :** Une équipe est composée de 4 à 6 lycéens (plutôt en classe de première et terminale, mais les secondes sont acceptés). Elle est accompagnée d'un ou deux encadrants (professeur de lycée, de classe prépa, doctorant, ...) qui guident l'équipe dans son travail.

**Les problèmes :** Les problèmes du tournoi sont sélectionnés par le comité d'organisation du **TFJM**<sup>2</sup>. La liste des problèmes est publiée sur le site web <http://www.tfjm.org/> mi-janvier. Ce sont des problèmes difficiles, dont une partie est encore sans solution connue. Les participants doivent les résoudre par eux-mêmes, en réfléchissant avec leurs coéquipiers et sous la supervision de leur(s) encadrant(s). Ils ont environ deux mois pour rédiger des propositions de solutions écrites qui doivent être soumises au jury quelque jours avant les rencontres régionales.

**Les encadrants :** Les encadrants veillent au bon déroulement du travail de leur équipe. Pendant la préparation, leur rôle est de :

- s'assurer du travail régulier de l'équipe et de la bonne collaboration au sein du groupe, gérer la coordination ;
- répondre aux questions des élèves ;
- fournir aux élèves des connaissances mathématiques spécifiques lorsque ceux-ci en font la demande ;
- corriger d'éventuelles erreurs majeures et éviter que l'équipe s'enfonce dans une impasse ;
- relire les documents rédigés par les élèves et donner des conseils de forme.

**La semaine précédent la rencontre :** Un tournoi régional se déroule sur un week-end et comporte deux tours. À chaque tour, les équipes sont réparties en poules de trois ou quatre équipes. Chaque équipe de la poule doit présenter sa solution à un problème, mais également lire et critiquer les solutions présentées par les autres équipes de la poule (sur leur problème respectif) lors d'un débat oral. Les équipes auront préalablement soumis leurs solutions écrites au jury. Le mercredi précédant la rencontre, un tirage au sort détermine la constitution des poules ainsi que le problème que chaque équipe devra présenter au jury. À la suite du tirage au sort, les équipes reçoivent les solutions qui seront présentées par les autres équipes de leur poule lors du premier tour. Elles doivent lire ces solutions, les comprendre, y repérer les éventuelles erreurs ou améliorations possibles afin de préparer le débat.

**Le week-end de rencontre :** Les équipes sont accueillies le samedi matin par une cérémonie d'ouverture. Après le déjeuner a lieu le premier tour. Puis les équipes ont accès aux solutions des problèmes qu'elles devront présenter au second tour. Elles disposent alors de la soirée (et éventuellement la nuit) pour analyser ces solutions et préparer les débats du lendemain. Le dimanche matin a lieu le second tour. Le tournoi se termine par une cérémonie de clôture où les résultats sont annoncés.

**Déroulement d'un tour :** Dans chaque poule, un problème est présenté par chacune des équipes. Un représentant de l'équipe dispose de 10 minutes pour présenter ses

résultats au jury. S'ensuit alors un débat impliquant un membre de chacune des autres équipes (chacun avec un rôle défini). Après ce débat entre les participants, le jury continue la discussion posant des questions aux représentants de toutes les équipes. à la fin des débats sur le premier problème (et une courte pause pour que le jury délibère), une deuxième équipe vient présenter son problème en 10 minutes, et les rôles changent.

**Exemple de déroulement d'un tour :** Dans une poule constituée de trois équipes (A, B et C), celles-ci présentent respectivement les problèmes 1, 2 et 3. Un membre de l'équipe A commence par présenter en 10 minutes ses résultats sur le problème 1 : c'est le défenseur. Puis un membre de l'équipe 2 vient critiquer cette solution et poser des questions au défenseur : c'est l'opposant. Enfin, un membre de l'équipe 3 vient poser des questions à ses deux camarades et faire une synthèse de cette discussion : c'est le rapporteur. Après les questions du jury et la délibération, c'est l'équipe B qui envoie son défenseur présenter le problème 2. L'équipe C envoie un opposant et l'équipe A un rapporteur. Et ainsi de suite.

**Rôles des participants :** Chaque phase du tour se déroule sous forme d'un débat, avec, en grandes lignes, thèse, antithèse et synthèse. Plus précisément chaque équipe joue successivement les rôles suivants.

*Le défenseur* présente les idées et résultats principaux obtenus par son équipe.

*L'opposant* fournit une analyse critique du contenu et de la présentation *orale* du défenseur, y indiquant les erreurs ou imprécisions, *aussi bien que les points forts*. Il dispose pour cela d'une première partie de questions et ensuite présente son analyse.

*Le rapporteur* évalue le débat entre le défenseur et l'opposant, en indiquant les aspects positifs et négatifs de la prestation de chacun. Une tâche importante du rapporteur est de déceler un manquement de l'opposant : soit qu'il ait fait une erreur, soit qu'il n'ait pas relevé une erreur du défenseur.

*L'observateur* est un rôle qui existe uniquement lorsqu'il y a quatre équipes dans la poule. Il n'a pas vocation à intervenir dans le débat, mais peut s'exprimer à la fin s'il a une remarque utile à faire, par exemple lorsqu'un élément important n'a pas été évoqué.

**Solutions :** La solution écrite d'un problème présenté est l'objet d'une note, indépendante de la prestation orale. De plus, pendant sa présentation, le défenseur ne peut présenter que

- des parties de la solution écrite, par exemple des énoncés, des figures, diagrammes, etc. ;
- des esquisses de solution et démonstration, ainsi que des idées utilisées dans leurs écrits.

**Notes de synthèse :** Avant chaque tour, l'opposant, le rapporteur et l'observateur rendent au jury une note écrite (une page) sur la solution du défenseur indiquant les erreurs qu'ils ont pu trouver. Les auteurs doivent aussi fournir une évaluation critique du travail, attirant l'attention du jury sur les *points positifs et négatifs*. Ils peuvent

enfin indiquer une appréciation globale de la solution. Ces rapports seront notés par le jury.

**Jury :** Dans chaque poule, le jury est constitué d'au moins quatre membres. Il est composé d'étudiants, de professeurs et de chercheurs en mathématiques. Il peut éventuellement inclure des encadrants (un encadrant ne pouvant pas être membre d'un jury dans la poule où concourt son équipe).

**La finale :** Les deux meilleures équipes de chaque tournoi régional sont invitées à participer à la finale qui a lieu en mai. Le principe est exactement le même que les tournois régionaux sauf que le tournoi dure plus longtemps. En particulier les équipes ont une journée entière pour lire et analyser les solutions des autres équipes pour le second tour.



### III. L'expérience TFJM<sup>2</sup>°

#### Une rencontre avec la recherche

Le **TFJM<sup>2</sup>**, à la différence des Olympiades de mathématiques, offre aux élèves une expérience qui n'a rien à envier à ce qu'un vrai chercheur en mathématique fait au quotidien. Ainsi, pour la première fois, les lycéens français peuvent avoir un avant-goût de ce qu'est la recherche en mathématique, leur permettant de faire un choix bien informé de leur future carrière dans le monde des mathématiques, soient-elles pures ou appliquées. Le tournoi permet aussi les échanges entre élèves et chercheurs de haut niveau, lesquels participent de façon bénévole en tant que jurys. En outre, depuis l'année dernière les élèves assistent à des exposés donnés par des chercheurs dans les cérémonies d'ouverture et de clôture.

#### Les problèmes

Proposés par des chercheurs en mathématiques, ces problèmes ont la particularité de n'admettre que des solutions partielles à l'heure actuelle. Qu'il s'agisse de solutions de cas particuliers d'un problème général, soit d'une reformulation de la même question pour la rendre plus simple, la connaissance des chercheurs sur la solution de ces problèmes n'est certainement pas complète. Dès lors, une fois que les élèves ont

atteint une connaissance du problème équivalente à celle des chercheurs, ils sont en train de faire de la recherche mathématique par eux-mêmes.

Voici un exemple tiré de l'édition 2014 du tournoi :

### Un jeu de jetons

Soit  $n \geq 2$  un entier. On considère un jeu à deux joueurs qui se joue avec  $n$  jetons identiques. Une configuration est la répartition de ces  $n$  jetons en un certain nombre de piles. Par exemple, pour  $n = 4$ , les configurations possibles sont les suivantes :

$$[4] ; [3 ; 1] ; [2 ; 2] ; [2 ; 1 ; 1] ; [1 ; 1 ; 1 ; 1].$$

En partant d'une configuration de départ, les joueurs jouent à tour de rôle et peuvent :

- soit diviser une pile en  $m$  piles de même taille ( $m \geq 2$  entier) ;
- soit fusionner deux piles de tailles différentes.

Le joueur n'ayant plus de coup possible a perdu.

1. Si on imagine que les joueurs ne cherchent pas nécessairement à gagner, pour quels  $n \geq 2$  existe-il des parties qui durent indéfiniment ?

Posons les définitions suivantes :

- Une configuration  $c$  est dite de *longueur*  $l$  si, partant de celle-ci, un des deux joueurs est sûr de pouvoir gagner en  $l$  coups (on compte les coups des deux joueurs) et si pour tout  $k < l$ , son adversaire peut l'empêcher de gagner en  $k$  coups. On note alors  $\ell(c) = l$ . Exemples dans le cas  $n = 4$  :
  - En partant de la configuration  $[3 ; 1]$ , le joueur qui commence (on l'appellera  $J_1$ ) est sûr de pouvoir gagner en 1 coup. En effet, s'il joue  $[3 ; 1] \rightarrow [1 ; 1 ; 1 ; 1]$ , l'autre joueur (qu'on appellera  $J_2$ ) n'a plus de coup possible, et  $J_1$  a donc gagné. Conclusion,  $\ell([3 ; 1]) = 1$ .
  - En partant de  $[2 ; 2]$ ,  $J_1$  n'a qu'un seul coup possible :  $[2 ; 2] \rightarrow [2 ; 1 ; 1]$ .  $J_2$  peut ensuite jouer  $[2 ; 1 ; 1] \rightarrow [1 ; 1 ; 1 ; 1]$  et  $J_1$  a alors perdu. Conclusion,  $\ell([2 ; 2]) = 2$ .
- Une configuration  $c$  est dite de *longueur finie* s'il existe un  $l \in \mathbb{N}$  tel qu'elle soit de longueur  $l$ . Sinon, on pose  $\ell(c) = \infty$ .
- La *longueur du jeu* est définie comme étant la plus grande longueur parmi ses configurations de longueur finie.

2. Trouver toutes les configurations de longueur 1.

3. Caractériser les  $n > 2$  pour lesquels le jeu à  $n$  jetons est de longueur supérieure ou égale à 2, puis à 4.

4. Soit  $n > 2$ . Etudier la longueur du jeu à  $n$  jetons (on pourra commencer par étudier les petites valeurs de  $n$ ).

5. Pour quels  $n > 2$  les configurations du jeu à  $n$  jetons sont-elles toutes de longueur finie ?

Le reste des problèmes, ainsi que les solutions présentées par les étudiants, se trouvent sur le site du tournoi.

À titre d'exemple, voici ce qu'écrit l'équipe Jean Du Sud (lycée Jean Durand, Castelnaudary) au sujet de leur solution au problème :

Pour répondre aux questions du problème posé, nous avons tout d'abord effectué des parties avec différents nombres de jetons afin de pouvoir en tirer des conjectures bénéfiques à la résolution du problème. Ainsi, nous avons dû traiter les configurations de longueurs 0, 1 et 2 pour pouvoir étudier les configurations de longueur supérieure à 2 ; ensuite, nous avons décidé de trouver la longueur d'un jeu à  $n$  jetons avec des petites valeurs de  $n$  à l'aide d'un algorithme. Par conséquent, nous avons pu lister par la même occasion toutes les configurations de longueur infinie mais aussi la valeur des configurations de longueur finie. Par la suite, nous avons généralisé les cas particuliers en deux catégories. D'un côté nous avons étudié les longueurs des jeux à  $n$  jetons pour  $n$  impair, puis pour  $n$  pair d'un autre côté. Pour finir, nous avons pu réaliser un algorithme permettant de calculer la longueur de tous les jeux à  $n$  jetons, trouver les configurations de chaque longueur et les configurations de longueur infinie.

Pour conclure, j'estime que le plus beau résultat trouvé dans la résolution du problème est le théorème permettant de répondre à la question 4 (pour  $n > 2$ , étudiez la longueur du jeu à  $n$  jetons). Plus particulièrement pour les cas avec  $n$  pair strictement supérieur à 10, car la recherche de ce théorème a, selon moi, nécessité une réflexion poussée afin d'obtenir des résultats exploitables.

#### **Théorème :**

La longueur du jeu à 2 jetons est 1. Notons  $L[2] = 1$ . On a alors établi que

$$L[3] = 1 ; L[4] = 2 ; L[5] = 3 ; L[6] = 6 ; \\ L[7] = 8 ; L[8] = 9 ; L[9] = 14 ; L[10] = 15$$

Pour tout  $n$  impair strictement supérieur à 10 alors

- Si  $n - 2$  n'est pas premier, alors la longueur du jeu à  $n$  jetons est 1
  - Si  $n - 2$  est premier et  $n - 4$  n'est pas premier, alors la longueur du jeu à  $n$  jetons est 3.
  - Si  $n - 2$  et  $n - 4$  sont premiers alors la longueur du jeu à  $n$  jetons est 7
- Pour tout  $n$  pair strictement supérieur à 10 alors :

- Si dans le jeu à  $n$  jetons,  $n - 2$  n'est pas la somme de deux nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $p + 2$  et  $q + 2$  sont premiers, alors ce jeu est de longueur 3.
- Si dans le jeu à  $n$  jetons,  $n - 2$  est la somme de deux nombres premiers  $p$  et  $q$  tels que  $p + 2$  et  $q + 2$  sont premiers, alors ce jeu est de longueur 5.

En effet, ce théorème est le résultat de la majeure partie des recherches. De plus cette propriété permet de savoir la longueur d'un jeu à  $n$  jetons, qui est selon moi, la question essentielle du problème.

### Quelques témoignages

Voici des propos recueillis lors des dernières éditions du **TFJM<sup>2</sup>** :

Pascale Rey du Boissieu (encadrante de l'équipe du lycée Clémenceau de Nantes, 2014)

« En 2014, un club de maths a été mis en place au lycée : une quinzaine d'élèves (Seconde, Première S, Terminale S) ont participé à ce club. Les problèmes ont été travaillés par des groupes d'élèves plus ou moins nombreux mais nous avons pu voir des élèves de seconde et de terminale se réunir tous les midis pour travailler sur des problèmes et c'était un vrai plaisir. [...]

Cette année comme l'année dernière j'ai pu organiser en fin d'année dans la classe un mini-tournoi fictif, afin de présenter aux autres élèves d'une part le travail réalisé par leurs camarades et d'autre part la partie " débat mathématiques oral " que l'on n'a guère le temps de pratiquer généralement en classe. J'espère de cette façon motiver d'autres élèves et leur donner envie de faire des mathématiques autrement voire même peut-être de s'engager l'année prochaine dans le club de maths voire le **TFJM<sup>2</sup>**. »

Pierre Popineau (participant de équipe Tours-Descartes, 2013)

« J'ai eu le plaisir de rencontrer d'autres lycéens qui partageaient le même intérêt que moi pour les mathématiques. Mais aussi, j'ai pu rencontrer plusieurs mathématiciens de profession, avec qui j'ai pu discuter et en apprendre un peu plus sur ce métier. Également, j'ai pu découvrir un autre domaine des mathématiques, qui s'apparente à la recherche et qui est assez éloigné de ce qu'on fait en cours. J'ai ainsi acquis beaucoup de connaissances. »

### IV. Plus d'information

Tous les détails sur le tournoi, les sujets, le règlement ainsi que la procédure d'inscription sont disponibles sur le site internet <http://www.tfjm.org>