# Représenter plus pour démontrer plus

Michel Lafond, Dijon

Avant Descartes, l'algèbre et la géométrie étaient des branches complètement séparées des mathématiques sans connexion entre elles. Aujourd'hui tout est connecté.

Pourtant dans l'esprit de Pythagore, les carrés des côtés sont des carrés géométriques construits sur ces côtés avant d'être des produits numériques.

De même, quand on vous dit ANGLE, vous pensez mesure d'angle ou angle géométrique ?

Descartes a eu une idée géniale lorsqu'il imagina représenter les points du plan par des couples de nombres réels. Cette révolution a permis de représenter les droites, les cercles, … par des équations, ce qui a ouvert les portes d'un monde nouveau.

Il est normal qu'en « re-présentant » un concept, c'est-à-dire en le présentant autrement, on apporte quelque chose de nouveau. Pensons au professeur de lettres du *Cercle des poètes disparus* qui monte sur les bureaux de sa classe pour *voir autrement*.

Nous examinerons six exemples, portant sur des sujets divers : mathématiques récréatives, formules sommatoires, trigonométrie, inégalités, théorie des nombres, statistique, qu'on va transposer dans le domaine géométrique pour *voir* les choses différemment.

Changer de point de vue a beaucoup d'avantages : on peut ainsi voir quelque chose qui était bien « caché » avant, on peut même faire apparaître une idée de démonstration, la représentation peut être un moyen mnémotechnique de retenir une formule, etc.

Dans cet article, on ne cherche pas systématiquement à démontrer, comme dans le sport bien connu des « preuves visuelles ». Quoique, dans certains cas, le problème, une fois transposé, a une solution si évidente qu'on peut le considérer comme résolu.

Tous les exemples traités ici peuvent faire l'objet de travaux dans les classes.

## A) Mathématiques récréatives

*On dispose de 3 récipients de capacités 5 l, 7 l, et 12 l (ou plus) pour le troisième.*
*Le grand récipient contient initialement 12 l et les deux autres sont vides.*
*Il s'agit par transvasements d'obtenir deux fois 6 l.*

[N.B. On pourrait remplacer 5 et 7 par deux entiers impairs premiers entre eux et prendre une troisième capacité suffisamment grande.]

Ce problème est traité par le mathématicien polonais Hugo Steinhaus (1887 – 1972) dans son livre *Kalejdoskop matematyczny* (1939), traduit en français sous le titre *Mathématiques en instantanés*(1). Il le résout d'une façon pour le moins surprenante, car il le ramène … à un problème de billard ! En fait, le mystère se dissipe lorsqu'on

(1) Éd. Flammarion 1964.

considère son billard – en forme de parallélogramme – comme une partie d'un graphique triangulaire.

Rappelons le principe de ce graphique. Soit un triangle équilatéral, et un point M intérieur à ce triangle. On trace par M les parallèles aux côtés du triangle (fig. 1), qui le coupent respectivement aux points A, B, C. Quel que soit le point M, la somme des longueurs MA + MB + MC est égale au côté du triangle ; en voici une « preuve visuelle » (fig. 2).

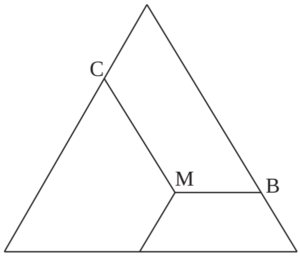


Figure 1

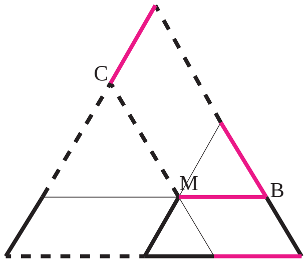


Figure 2

Dans la figure 2, on a trois types de segments en trait épais : 4 sont en noir continu, 4 en noir tireté et 4 en vert. Les segments du même type ont la même longueur, et on voit que chaque côté du triangle équivaut à la somme d'un segment de chacun des trois types.

Il en résulte que tout triplet $(x, y, z)$ de réels positifs tel que $x + y + z = k$ (constante) pourra être représenté, en suivant le principe ci-dessus, par un point intérieur à un triangle équilatéral de côté $k$.

Ce type de graphique est utilisé en statistique, par exemple lorsqu'on étudie la répartition d'une population selon trois catégories (fig. 3).

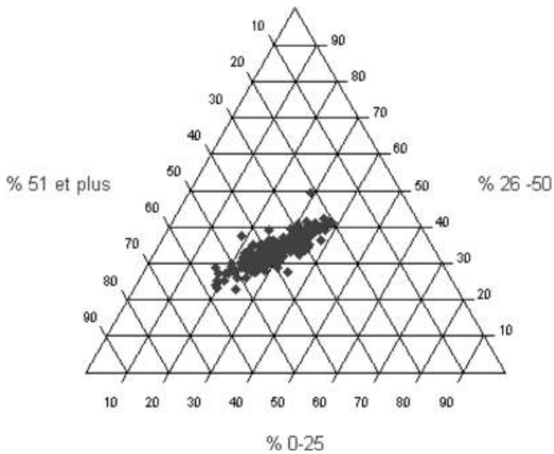



Figure 3. Répartition de la population d'Indre-et-Loire en 1999 (regroupée en « quartiers ») selon 3 tranches d'âge : 0 à 25 ans, 26 à 50 ans, plus de 50 ans (http://support.articque.com/samples/doc/triangle.htm)

Dans le cas qui nous occupe ici, on a trois récipients dont les contenus peuvent être symbolisés par $x$ $(0 \leq x \leq 12)$, $y$ $(0 \leq y \leq 7)$ et $z$ $(0 \leq z \leq 5)$, et on a $x + y + z \leq 12$ (volume total de liquide).

Ordonnons et graduons les trois côtés du triangle dans le sens antihoraire (fig. 4). La projection sur chaque côté se fait parallèlement au côté « précédent », comme indiqué sur la figure 5, et :
$x$ est la coordonnée sur le côté gauche (contenu du grand récipient),
$y$ est la coordonnée sur le côté inférieur (contenu du récipient moyen),
$z$ est la coordonnée sur le côté droit (contenu du petit récipient).

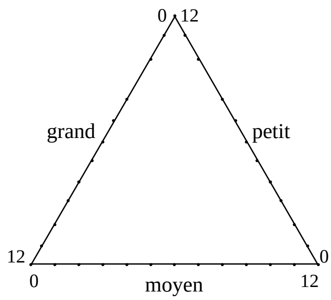


Figure 4

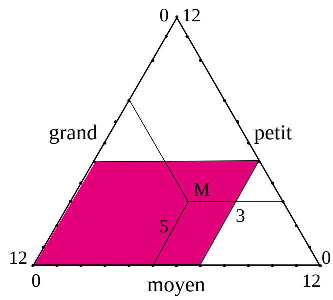


Figure 5

Ainsi, sur la figure 5, on a représenté le point M correspondant à 4 litres dans le grand récipient, 5 litres dans le moyen et 3 litres dans le petit. Sur cette figure, le parallélogramme vert représente l'ensemble des points possibles ($y \leq 7$ et $z \leq 5$).

Lorsqu'on transvase du liquide d'un récipient dans un autre, on se déplace sur une parallèle à un côté, et on ne peut s'arrêter que sur un bord du parallélogramme (récipient plein ou récipient vide).

Le dessin donné par Steinhaus est celui de la figure 6 ; il représente le parallélogramme et les trois graduations.

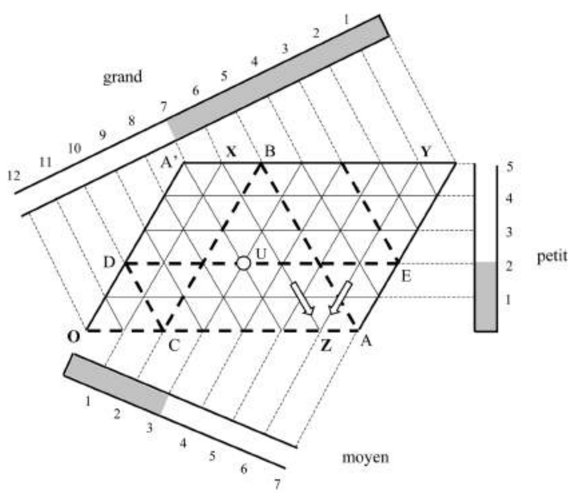


Figure 6

Au départ on est au point O (12, 0, 0) du graphique, et on veut arriver au point Z (6, 6, 0).

Commençons par remarquer que vider le grand récipient dans les deux autres (sommet du parallélogramme opposé à O) est une impasse, car que faire ensuite ? La première opération ne peut donc consister qu'à remplir le récipient moyen ou le petit à partir du grand ; on se retrouve alors en A (5, 7, 0) ou en A′ (7, 0, 5).

Lorsqu'on est en A (par exemple) comment continuer ? Comme on ne veut pas revenir en arrière, on ne peut que transvaser le récipient moyen dans le petit ; on arrive alors en B (5, 2, 5), où le petit récipient est rempli. Vider le récipient moyen dans le grand nous conduirait en A′ (où l'on aurait pu aller dès le premier mouvement) et vider le petit récipient dans le moyen nous ramènerait en A ; on ne peut donc que vider le petit récipient dans le grand, ce qui nous conduit en C (10, 2, 0). Une fois là, on ne peut que revenir en O (exclu), en B ou en A (marche arrière), ou aller en D (10, 0, 2), c'est-à-dire vider le petit récipient dans le moyen ; c'est bien sûr l'option qu'on choisira.

De façon générale, à chaque pas il n'y a qu'une seule façon d'agir de façon « utile », qui est de considérer la ligne du réseau pénétrant à l'intérieur de la zone autorisée, c'est-à-dire celle qui correspond à la réflexion sur un miroir … ou sur un billard.

Reste à savoir si on pourra parvenir en Z… On constate que la trajectoire passe par tous les points du réseau triangulaire, ce qui signifie qu'on passera par toutes les configurations possibles. On atteindra donc nécessairement le point Z qui correspond à la configuration recherchée (6 litres dans le grand récipient et 6 litres dans le moyen).

On parvient au même résultat à partir du point A′, mais par un autre itinéraire.

Suivons graphiquement le déroulement des transvasements :

Avec le lancer initial selon OA (fig. 7) :

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grand | 12 | 5 | 5 | 10 | 10 | 3 | 3 | 8 | 8 | 1 | 1 | 6 |
| moyen | 0 | 7 | 2 | 2 | 0 | 7 | 4 | 4 | 0 | 7 | 6 | 6 |
| petit | 0 | 0 | 5 | 0 | 2 | 2 | 5 | 0 | 4 | 4 | 5 | 0 |
| point | O | A | B | C | D | E | | | | | Y | Z |

Avec le lancer initial selon OA′ il faut un transvasement de plus (fig. 8) :

| | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| grand | 12 | 7 | 7 | 2 | 2 | 9 | 9 | 4 | 4 | 11 | 11 | 6 | 6 |
| moyen | 0 | 0 | 5 | 5 | 7 | 0 | 3 | 3 | 7 | 0 | 1 | 1 | 6 |
| petit | 0 | 5 | 0 | 5 | 3 | 3 | 0 | 5 | 1 | 1 | 0 | 5 | 0 |
| point | O | A′ | | | | | | | | | | X | Z |

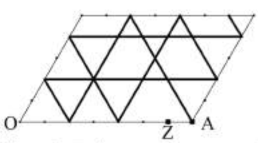


Figure 7. Trajet commençant en A

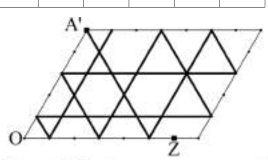


Figure 8. Trajet commençant en A'

Ici la représentation triangulaire, qui nous a conduits à la métaphore du billard, nous a permis de résoudre le problème posé.

## B) Formules sommatoires.

L'addition (des nombres) a une représentation naturelle en géométrie. Si on a du mal avec le concept numérique 2 + 3 = 5, cela ira peut-être mieux avec sa représentation géométrique :

1) Commençons par un grand classique (fig. 9) :

$$2\sum_{i=1}^{n} i = 2(1+2+\cdots n) = n(n+1).$$

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

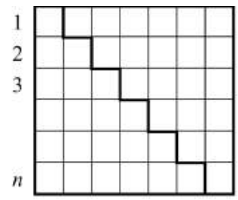


Figure 9. Somme des entiers

La représentation ci-dessus est largement aussi convaincante pour les élèves que la récurrence.

Bien sûr, si on veut *démontrer*, c'est autre chose.

La démonstration par changement de variable $j = n + 1 - i$ :

$$\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n}(n+1-j) = n(n+1) - \sum_{j=1}^{n} j$$

n'est que la traduction « mot à mot » de la preuve visuelle.

2) Par contre, c'est moins évident avec la représentation géométrique (fig. 10) de l'identité

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots n^3 = (1+2+3+\cdots n)^2 .$$

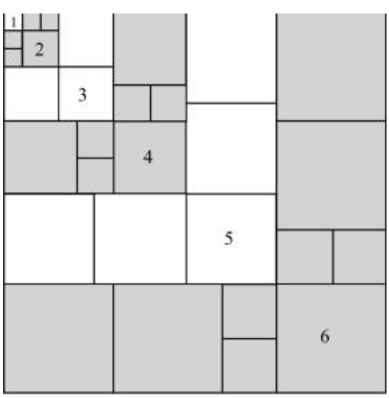


Figure 10. Somme des cubes des entiers

Le carré $1^2$ est représenté une fois.
Le carré $2^2$ est représenté deux fois :
(Une fois en entier et une fois coupé en 4)
Le carré $3^2$ est représenté trois fois.
Le carré $4^2$ est représenté quatre fois :
(Trois fois en entier et une fois coupé en 4)
Le carré $5^2$ est représenté cinq fois.
Le carré $6^2$ est représenté six fois :
(Cinq fois en entier et une fois coupé en 4)
etc.

Ici, la représentation de l'identité fournit une piste de démonstration :

$$n^3 = n\left[n\left((n-1)+n\right)\right] = n\left[2(1+2+\cdots+n-1)+n\right]$$

$$n^3 = n\left[(1+2+\cdots+n-1)+1+2+\cdots+n\right]$$

$$n^3 = (1+2+\cdots+n)^2 - (1+2+\cdots+n-1)^2$$

Et c'est l'occasion d'utiliser le « télescopage », très prisé dans les sommations.

N.B. On trouvera dans l'article « Les preuves sans mots » de J.L. Delahaye sur le site www.lifl.fr/~delahaye/pls/050.pdf, extrait du numéro 244 (février 1998) de Pour la Science, une représentation très astucieuse en 3 D (due à Man Keung Siu en 1984) de l'identité :

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

## C) Trigonométrie.

1) Voici une représentation de

$$\sin(x-y) = \sin y \cos x - \sin x \cos y$$

dans laquelle les trois termes de l'identité sont représentés par des aires (au coefficient $ab/2$ près).
Elle est valable seulement dans le cas particulier $0 < x < y < \pi / 2$.

La clé est l'égalité $a \cos x = b \cos y$, utilisée deux fois.

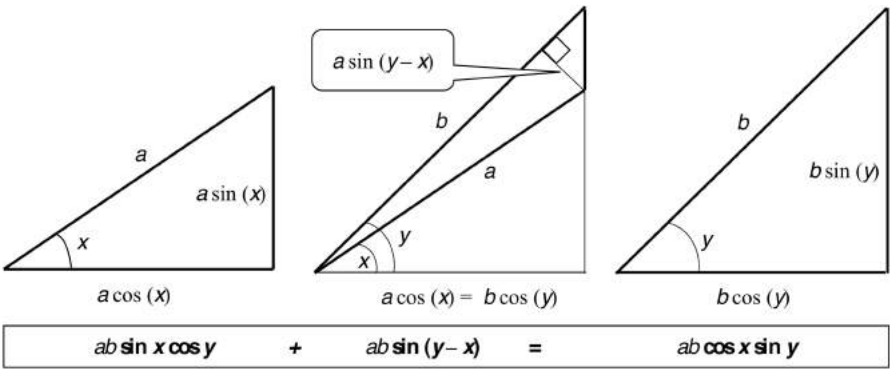



Figure 11. Sinus d'une différence

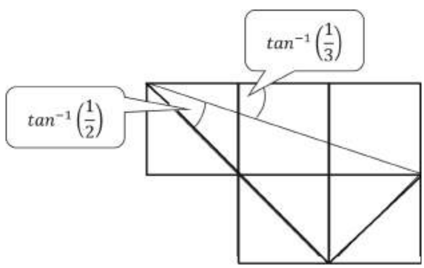
2) Les formules de Machin peuvent être représentées par des additions d'angles (fig. 12) :

Ci-contre une représentation de la célèbre formule :

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1}(1) = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)$$

et plus bas une représentation d'une autre formule de Machin :

$$\frac{\pi}{4} = 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{1}{7}\right)$$



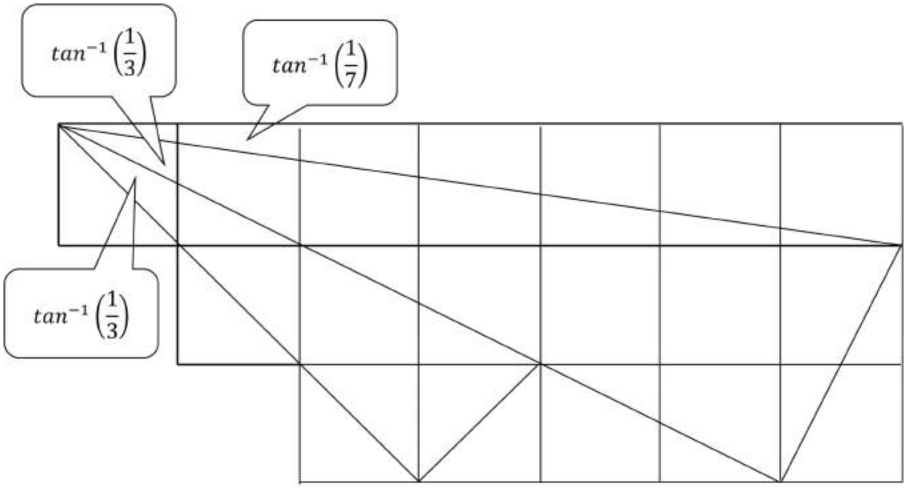



Figure 12. Formules de Machin

Ce sont de bons exercices à demander aux élèves que de représenter d'autres formules de Machin, tel ce petit bijou :

$$\pi = \tan^{-1}(1) + \tan^{-1}(2) + \tan^{-1}(3).$$

Dans les deux exemples ci-dessus, on peut presque parler de démonstrations (il resterait à prouver les orthogonalités d'obliques).

Les démonstrations par le calcul sont pénibles. Sont-elles plus rigoureuses ?

De plus, on a là un moyen de fabriquer *ad libitum* de telles formules à partir d'un partage du demi-angle droit en sommes de petits angles aigus.

## D) Les inégalités.

Voici (fig. 13) une représentation des inégalités bien connues sur les moyennes :

$$\mathrm{MH} \leq \mathrm{MG} \leq \mathrm{MA} \leq \mathrm{MQ}$$

où MH, MG, MA, MQ sont respectivement les moyennes harmonique, géométrique, arithmétique et quadratique de deux réels $a$ et $b$ tels que $a > b > 0$.

Ici, la représentation ne donne pas de piste pour une démonstration. De plus il ne s'agit que de moyennes non pondérées concernant deux réels seulement. Les jeux de cadres[2] ont leurs limites.

(2) Voir par exemple Douady, R. (1992) Des apports de la didactique des mathématiques à l'enseignement. Repères-IREM 6, pp. 132-158. http://www.univ-irem.fr/reperes/articles/6_article_40.pdf

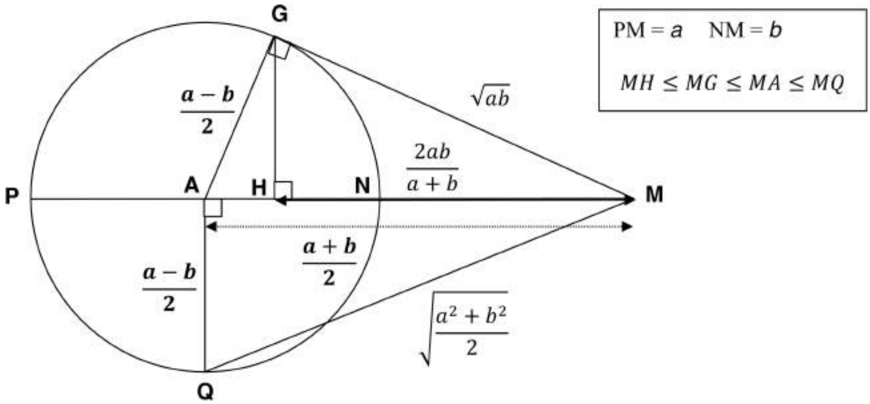



Figure 13. Différentes moyennes de deux nombres

## E) Les statistiques.

La représentation graphique du paradoxe de Simpson, ci-dessous, est bien meilleure que les contre-exemples qu'on donne habituellement dans un seul tableau, pour comprendre ce qu'on appelle aussi « effet de structure ».

*Pour un même examen, on compare les proportions de reçus chez les étudiantes et chez les étudiants dans deux universités A et B, puis globalement* :

| | Étudiantes | | | Étudiants | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| A | présents | 1100 | **10 %** | présents | 350 | **8 %** |
| | reçus | 110 | | reçus | 28 | |
| B | présents | 100 | **82 %** | présents | 400 | **56 %** |
| | reçus | 82 | | reçus | 224 | |
| A ∪ B | présents | 1200 | **16 %** | présents | 750 | **33,6 %** |
| | reçus | 192 | | reçus | 252 | |

Le paradoxe est que dans les deux universités, les étudiantes font mieux que les étudiants (soit, en pourcentages, 10 > 8 et 82 > 56), alors que globalement les étudiantes font moins bien que les étudiants (soit, en pourcentages, 16 < 33,6) !

Les 12 effectifs du tableau sont représentés par les 12 coordonnées du graphique ci-dessous (fig. 14).

Les ronds blancs correspondent aux données des étudiants, les ronds noirs à celles des étudiantes.

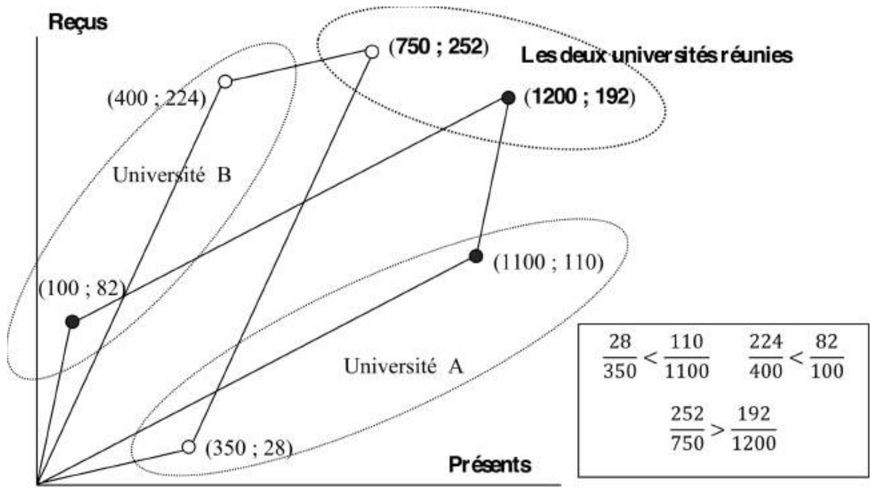



Figure 14. Effet de structure

Dans cette représentation graphique, les proportions de succès correspondent à des pentes de droites, et on voit bien comment peut apparaître le paradoxe. On n'imagine même pas les statistiques sans leurs multiples représentations graphiques (voir le premier exemple en figure 3).

## F) La théorie des nombres.

Il est possible de résoudre graphiquement, sans calcul, l'équation de Bézout

$$ax - by = \pm 1$$

($a$, $b$ paramètres entiers donnés premiers entre eux ; $x$, $y$ inconnues dans $\mathbb{Z}$).

Exemple : Soit à résoudre $5x - 11y = \pm 1$ dans $\mathbb{Z}$.

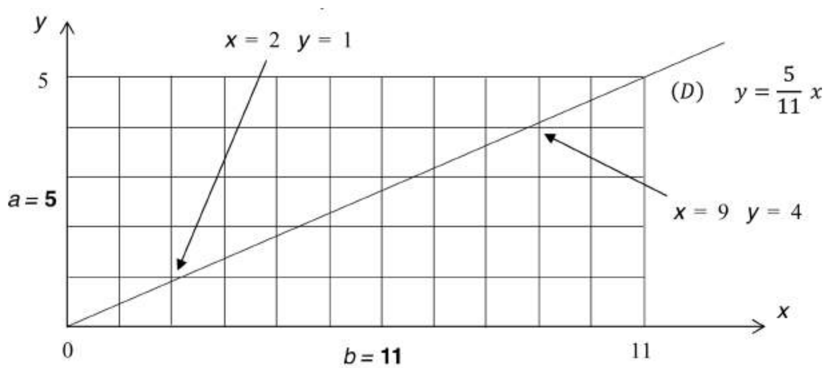



Figure 15. Équation de Bézout

On construit dans le plan cartésien quadrillé par les entiers la droite (D) d'équation $ax - by = 0$ (fig. 15), puis on cherche un point du quadrillage *qui est le plus près possible de* (D) *mais pas sur* (D).

Les coordonnées de chacun de ces points proches fournissent une solution.
Ici $x = 9$, y = 4 au-dessous de (D) ou $x = 2$, $y = 1$ au-dessus de (D) conviennent.

Vérification : $5 \times 9 - 11 \times 4 = 1 \quad 5 \times 2 - 11 \times 1 = -1$.

Explication :

La distance du point M $(x_0 ; y_0)$ à la droite (D) d'équation $ax - by = 0$ est

$$\mathrm{d}(x_0 ; y_0) = \frac{|ax_0 - by_0|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

$\mathrm{d}(x_0 ; y_0)$ sera minimal si et seulement si $|ax_0 - by_0|$ est minimal.

Or $|ax_0 - by_0|$ est un entier positif (non nul car on n'est pas sur (D)).

Donc le minimum a lieu lorsque $|ax_0 - by_0| = 1$.

Ce minimum est atteint aux deux points particuliers du graphique. On peut le prouver géométriquement en utilisant le théorème de Pick.
Si on étend le quadrillage au plan tout entier, la figure ci-dessus se répète périodiquement, ce qui montre bien que la solution particulière $x_0 = 9$, $y_0 = 4$ engendre la solution générale (dans le cas $5x - 11y = +1$)

$$x = x_0 + 11\,\mathrm{T} \quad y = y_0 + 5\,\mathrm{T}$$

Le passage d'une équation diophantienne austère à un cadre graphique apporte ici beaucoup de choses.
Les exemples précédents nous ont montré l'intérêt que peuvent présenter les représentations visuelles bien choisies en mathématiques, soit pour (se) convaincre de la réalité d'une propriété, soit pour trouver l'idée d'une démonstration, soit pour pouvoir se souvenir d'un résultat, etc.
Mais l'exercice n'est pas sans risques et, s'il ne faut pas croire tout ce qu'on lit, il ne faut pas non plus croire tout ce qu'on voit en géométrie. Il faut rester vigilant, car un dessin peut parfois tromper. Tout le monde connaît le fameux « 64 = 65 » (fig. 16) où, par recomposition d'un carré 8 × 8 découpé, on obtient un rectangle 13 × 5.

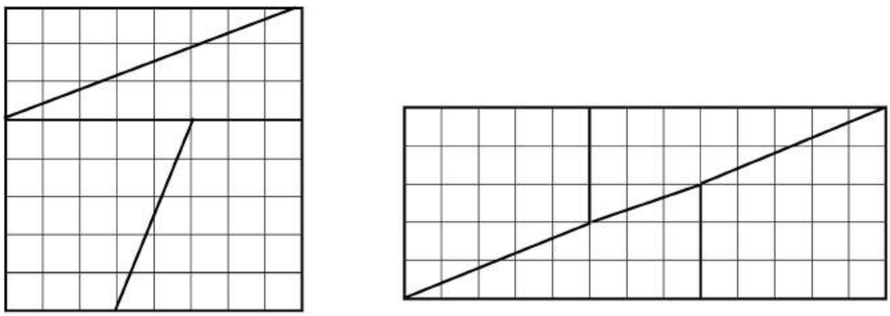


Figure 16. « 64 = 65 »

En voici un autre exemple, peut-être moins connu (fig. 17).

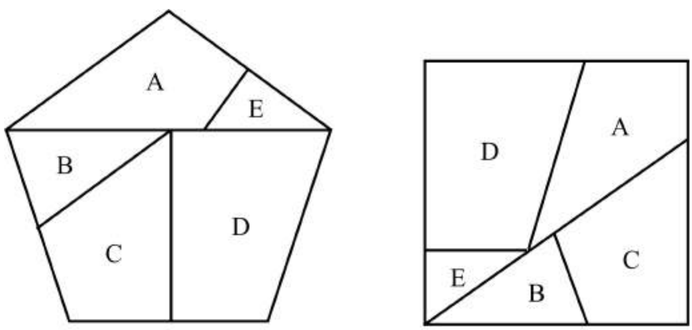



Figure 17. Du pentagone au carré

On *voit* un découpage du pentagone régulier en 5 pièces qui, assemblées différemment, donnent un carré. Mais un tout petit quelque chose cloche…

Dans le dessin de gauche, les 4 points qui semblent être des milieux de segments le sont effectivement. Aucune des pièces n'a été modifiée lors de la recomposition mais, dans le dessin de droite, un bon exercice consiste à vérifier que le rapport entre la hauteur et la largeur du *rectangle* est 1,004…

On trouvera d'autres « dissections approximatives dans Frederickson, G. N. (1997) *Dissections : Plane & Fancy*. Cambridge University Press.