Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 512–1 Jean-Christophe Laugier – Rochefort

Paul a reçu pour ses étrennes le 1er janvier 2014 une belle montre avec dateur. Mais il a été très désappointé quand, le 1er mars, la montre n'a pas affiché « 1 » comme attendu mais « 29 ». Pour le dateur tous les mois ont 31 jours !
On supposera dans la suite que Paul n'effectue aucune correction sur le dateur.

1) Quand, pour la première fois après le 1er mars 2014, la montre affichera-t-elle une date correcte ?
2) Notons d(n) la date affichée par la montre le 1er janvier de l'an 2014 + n ; donc d(0) = 1.
   Quelle est la période T de la suite (d(n)) ?
3) Quelles sont les années pendant la période [2014 ; 2014 + T] au cours desquelles la montre affichera une date correcte ?

Exercice 512–2 Roger Ferrieu – Paris

Que devient la somme

$$\mathrm{S}_n = 2 + \frac{a+b}{ab} + \cdots + \frac{a^n + b^n}{a^n b^n}$$

lorsque n augmente indéfiniment ?

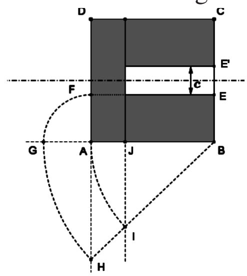
Exercice 512–3 Émile Fourrey – Paris pour nos élèves

A – On dispose la suite des nombres impairs en lignes comme suit :

l_1	1
l_2	3 ; 5
l_3	7 ; 9 ; 11
l_4	13 ; 15 ; 17 ; 19

....

Prouver que sur chaque ligne, la somme des nombres est égale au cube du rang de cette ligne.



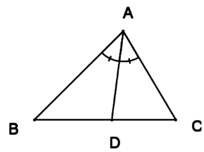
B – Diviser le carré ABCD de côté a en trois parties équivalentes (de même aire), de sorte qu'il y ait encore un chemin d'une largeur donnée c conduisant aux trois parties.

La construction est indiquée sur la figure ci-contre.
Prouver son exactitude.

Exercice 512—4 Valentin Paubarol – Ampéris

ABC est un triangle quelconque.

La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe [BC] en D.
Montrer que $AB \cdot AC = AD^2 + DB \cdot DC$.



Solutions

Exercice 510–1 Michel Lafond – Dijon *arithmétique*

n est un entier naturel positif écrit en base dix. On note d(n) le dernier chiffre de n et s(n) la somme des chiffres de n.

Si $a = \dfrac{3^{2014} - 1}{2}$, démontrer que d($a$) = s(s(s($a$))).

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Sarrouy (Mende), Michel Lafond (Dijon), Patrick Tardivel (Toulouse).

Voici la solution de Patrick Tardivel.

▪ Nous allons montrer que $s(s(s(a))) = 4$.
On rappelle que tout entier naturel n est congru à la somme de ses chiffres modulo 9.

Ainsi $a \equiv s(a)$ mod(9) d'où $a \equiv s(s(s(a)))$ mod(9).

Nous avons $3^{2014} \equiv 9^{1007} \equiv 0$ mod(9) d'où $2a \equiv -1 \equiv 8$ mod(9)

Par ailleurs, 2 a pour inverse 5 dans $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$, ainsi $a \equiv 5 \times 8 \equiv 40 \equiv 4$ mod(9).

Donc, $s(s(s(a))) \equiv 4$ mod(9).

Nous savons que l'entier a au plus 1007 chiffres donc $s(a) \leq 1007 \times 9$, soit $s(a) \leq 9063$.

Ainsi, $s(a)$ a au plus 4 chiffres donc $s(s(a)) \leq 36$.
Enfin, si n est un entier compris entre 0 et 36, on a $s(n) \leq s(29)$.
Alors, $s(s(s(a))) \leq 11$ et comme $s(s(s(a))) \equiv 4 \bmod(9)$, nous en déduisons finalement que $s(s(s(a))) = 4$.

- Nous allons montrer que $\mathrm{d}(a) = 4$.

On a $a \equiv \mathrm{d}(a) \bmod(10)$.
Par ailleurs, $3^4 \equiv 1 \bmod(10)$ d'où $3^{503\times4+2} \equiv 9 \bmod(10)$ et ainsi $2a \equiv 8 \bmod(10)$.
2 n'est pas inversible dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$, cependant, nous allons voir que l'entier a peut être congru à 4 ou 9 modulo 10.

Classe de a dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Classe de $2a$ dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$	0	2	4	6	8	0	2	4	6	8

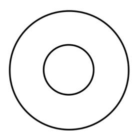
D'où, $a \equiv 4 \bmod(10)$ ou $a \equiv 9 \bmod(10)$.
Pour montrer que $a \equiv 4 \bmod(10)$, nous allons étudier la parité de a. Cependant, plutôt que de déterminer la classe de a dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ ce qui va être délicat puisque le dénominateur de a est 2, nous allons déterminer la classe de $2a$ dans $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$.
On a $3 \equiv -1 \bmod(4)$ d'où $3^{2014} \equiv 1 \bmod(4)$, donc $2a \equiv 0 \bmod(4)$.
Ainsi, $2a$ est un multiple de 4, donc, a est pair et on en déduit que $a \equiv 4 \bmod(10)$, soit $\mathrm{d}(a) = 4$.

- Conclusion : $s(s(s(a))) = \mathrm{d}(a) = 4$.

Remarque. En utilisant les logarithmes on obtient $s(a) \leq 8649$ puis $s(s(a)) \leq 34$.

Exercice 510 - 2 Greg Leceul – Detroit *only rule*

Deux cercles concentriques étant donnés sans leur centre, retrouver celui-ci à la règle seule (sans graduation).



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Bataille (Rouen), Michel Lafond (Dijon).

Voici la solution de Pierre Renfer.

On sait construire classiquement, à la règle, la polaire d'un point A par rapport à un cercle.
Cette polaire coupe le cercle en T et S, les points de contact des tangentes au cercle passant A (figure 1).

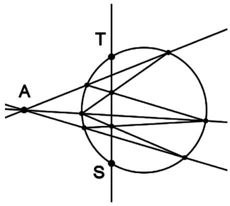


fig.1

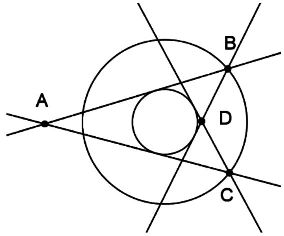
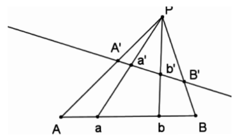


fig.2

Pour les cercles concentriques, on peut donc construire des tangentes au cercle intérieur comme sur la figure 2 ci-dessus.
La droite (AD) est un axe de symétrie de la figure et passe donc par le centre des deux cercles.
La construction d'un second axe de symétrie permet alors d'obtenir le centre à l'intersection des deux axes.

Remarques et questions.



- Raymond Heitz a voulu ramener le problème à celui de la construction du milieu commun de deux segments superposés [AB] et [*ab*] au moyen d'un faisceau de droites et d'une transversale ; mais n'a pas réussi à obtenir cette construction à la règle seule.
  Est-ce possible ?
- Je vous propose de voir une construction complète utilisant dix-huit droites sur un fichier GeoGebra disponible sur le site de l'association. Peut-on faire moins ?

Exercice 510 - 3 Louis-Marie Bonneval – Poitiers *pour nos élèves*

Les organisateurs du banquet disposent de tables rondes de 150 cm de diamètre. Ils ont fait faire des nappes carrées pour les recouvrir. Mais suite à une erreur de mesure ces nappes ne font que 140 cm de côté.
Peuvent-ils avec deux nappes recouvrir complètement une table ?

Solutions : Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Névez), Michel Sarrouy (Mende), Louis-Marie Bonneval (Poitiers).

Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

On peut recouvrir complètement une table avec deux nappes, et même avec une nappe et la moitié d'une nappe.

On représente la table par un cercle de centre O et de rayon R = 75 cm ; on désigne par P_1, Q_1, P_2, Q_2 des points qui partagent le cercle en quatre arcs égaux.

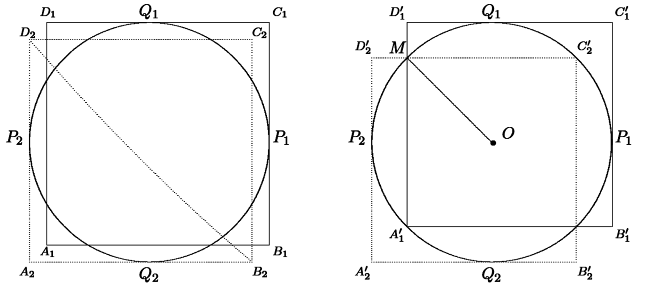


figure 1 figure 2

On dispose la nappe $A_1B_1C_1D_1$ de manière à ce qu'elle soit tangente au cercle en P_1 et Q_1 ; on dispose la nappe $A_2B_2C_2D_2$ de manière à ce qu'elle soit tangente au cercle en P_2 et Q_2. Les deux nappes recouvrent la table si leur dimension est supérieure à la dimension des deux nappes qui se coupent en M, milieu de l'arc Q_1P_2 (cf. figure 2). Cette dimension est égale à

$$\mathrm{OM}\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathrm{OP}_1=\mathrm{R}+\mathrm{R}\frac{\sqrt{2}}{2}\cong 128{,}033 \text{ cm}.$$

Puisque 128,033 < 140, les deux nappes recouvrent la table (cf. figure 1).

On remarque que l'on peut enlever le triangle $B_2C_2D_2$, et alors avec trois nappes on recouvre deux tables.

Nota. Louis-Marie Bonneval propose une étude plus complète concernant tout d'abord les solutions dans lesquelles les nappes ont le même centre que la table ; puis celles où les deux carrés ont une diagonale commune passant par le centre de la table. Cette étude est disponible sur le site de l'association.

Exercice 510 - 4 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

- Dans un plan euclidien, déterminer et construire à la règle et au compas les carrés dont les côtés (éventuellement prolongés) passent par quatre points donnés du plan.

Et le problème dual :

- Dans un plan euclidien, déterminer et construire à la règle et au compas les carrés dont les sommets sont situés sur quatre droites données du plan.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Maurice Bauval (Versailles), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach).

Voici la solution de l'auteur.

Analyse du problème

Soient A, B, C, D les quatre points donnés, (a), (b), (c), (d) les quatre droites cherchées, (a) passant A, (b) passant par B, etc. et ab le point d'intersection de (a) et (b), etc. Le point ab est situé sur le cercle de diamètre [AB] et de même pour les autres intersections. Ils définissent en général un rectangle dont les côtés passent par les points ABCD. Les bissectrices des paires de droites choisies parmi les droites (a), (b), (c), (d) passent nécessairement par l'un ou l'autre des milieux des demi-cercles lieux des sommets du rectangle. Ces milieux sont fixes. Le rectangle sera un carré si et seulement si deux telles bissectrices en des sommets opposés sont confondues définissant alors une diagonale d'un carré solution. Nous avons placé sur la figure 1 ci-dessous les huit points fixes considérés (deux par cercle) et chaque paire de points choisie sur des cercles pour des diamètres opposés, avec la bissectrice issue du point ad passant par le point fixe S′ et celle du point opposé bc passant par le point fixe T′. La figure 2 montre alors une solution définie par la diagonale (S′T′).

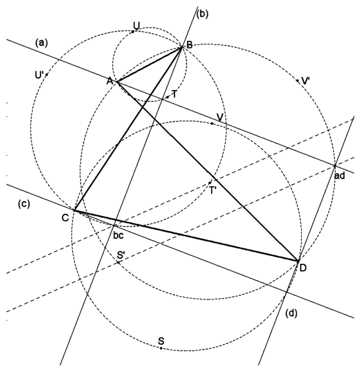


figure 1

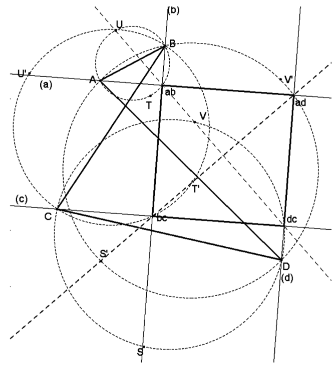
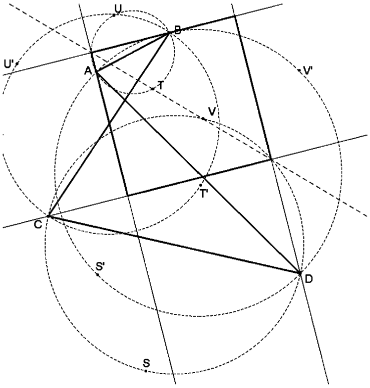


figure 2

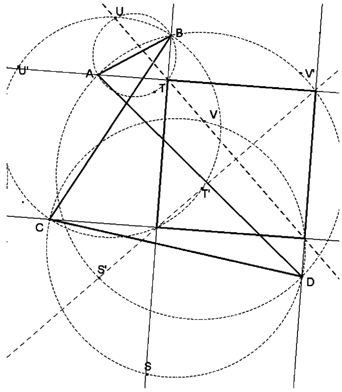
Il y a donc *a priori* autant de solutions qu'il y a de paires de points choisis comme indiqué, soit $2 \times 2 \times 2 = 8$, en associant à chacun des points U et T du cercle de diamètre [AB] les deux points du cercle de diamètre [CD] et à chacun des points U′ et T′ du cercle de diamètre [BC] les deux points du cercle de diamètre [AD]. En réalité il n'y en a que 6 car (UV) et (T′S′) correspondent à des diagonales perpendiculaires du même carré, ainsi que (TS) et (U′V′). (voir démonstration en annexe).

D'où la construction :

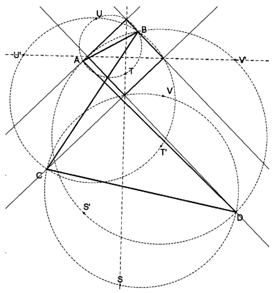
Choisir une paire de points milieux des demi–cercles pris sur deux diamètres opposés et tracer la droite les joignant, qui sera diagonale de l'un des carrés solution. Déterminer les autres points d'intersection de cette diagonale avec les cercles de diamètres correspondants. Tracer à partir de ces points les droites les joignant aux extrémités des diamètres correspondants. Ces droites sont les côtés des carrés cherchés. Les six figures qui suivent sont les six solutions pour la configuration de points ABCD choisis sur les figures 1 et 2.



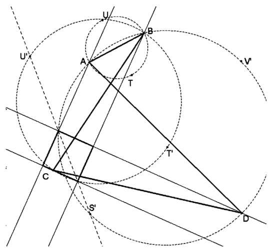
diagonale (TV)



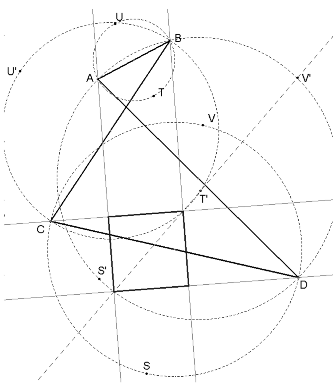
diagonale (UV) ou (T'S')



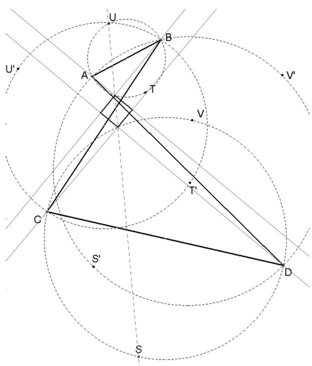
diagonale (U'V') ou (TS)



diagonale (U'S')



diagonale (T'V')



diagonale (US)

La solution complète, incluant la démonstration annoncée plus haut, basée sur l'utilisation de similitudes, ainsi que le problème dual, dont l'étude repose également sur l'emploi de similitudes, sont disponibles sur le site de l'association.