Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à
Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

* * * * *

Georges Lion est décédé au mois de novembre 2014. Je ne l'ai jamais rencontré et n'ai jamais entendu le son de sa voix. Et pourtant mon ordinateur contient des pages et des pages écrites par lui. Ses nombreuses réponses à la rubrique des problèmes, toujours accompagnées de messages cordiaux, me donnaient l'impression de le connaître. À travers l'élégance de ses preuves, la clarté de sa rédaction, le recul sur chaque thème, je devinais l'homme passionné et le pédagogue expérimenté. C'est peu dire que ses contributions manqueront à cette rubrique.

* * * * *

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 512–1 (Michel Lafond (Dijon))

Le nombre N! écrit en base dix se termine par un huit suivi d'exactement mille zéros. Que vaut N ?

Problème 512–2 (Louis Manara (Montferrier-sur-Lez))

Dans le probleme 21 posé dans un bulletin vert en 2006, on démontre que les solutions rationnelles de l'équation $x^y = y^x$ avec $x < y$ sont données par

$$x = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}$$

avec $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$u_n = x^y = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{(n+1)^{n+1}}{n^n}}.$$

Montrer que la suite (u_n) converge, déterminer sa limite, et préciser si la convergence a lieu de façon monotone.

Problème 512–3

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n le groupe symétrique, à savoir l'ensemble des bijections de l'ensemble $[[1, n]]$ dans lui-même, muni de la loi de composition. Soit G un sous-groupe commutatif de S_n. On suppose que G agit transitivement sur [[1, n]] : pour deux éléments x, $y \in$ [[1, n]], il existe $g \in$ G tel que $g(x) = y$. Trouver le cardinal de G. Quels sont les groupes que l'on peut ainsi réaliser (c'est-à-dire isomorphes à un tel sous-groupe G de S_n) ?

Solutions des problemes antérieurs

Problème 500 - 2 (Jean-Louis Trinquand (Clermont-Ferrand))

Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On extrait au hasard successivement et sans remise tous les jetons de l'urne. On note t_i le numéro porté par le jeton obtenu au i-ième tirage. On note x_i le plus petit nombre de séquences d'entiers consécutifs que l'on peut former en utilisant tous les entiers $t_1, \ldots, t_i$.
On définit enfin une variable aléatoire X par

$$\mathrm{X} = \max\left\{x_i \mid i \in [\![1,n]\!]\right\}.$$

Que dire d'icelle ?
Voici un exemple pour $n = 8$. Si on a

$$t_1 = 4, t_2 = 5, t_3 = 2, t_4 = 7, t_5 = 1, t_6 = 3, t_7 = 8, t_8 = 6,$$

alors

$$x_1 = \mathrm{card}\left\{\{4\}\right\} = 1, x_2 = \mathrm{card}\left\{\{4,5\}\right\} = 1, x_3 = \mathrm{card}\left\{\{2\},\{4,5\}\right\} = 2,$$
$$x_4 = \mathrm{card}\left\{\{2\},\{4,5\},\{7\}\right\} = 3, x_5 = \mathrm{card}\left\{\{1,2\},\{4,5\},\{7\}\right\} = 3,$$
$$x_6 = \mathrm{card}\left\{\{1,2,3,4,5\},\{7\}\right\} = 2, x_7 = \mathrm{card}\left\{\{1,2,3,4,5\},\{7,8\}\right\} = 2,$$
$$x_8 = \mathrm{card}\left\{\{1,2,3,4,5,6,7,8\}\right\} = 1.$$

Dans ce cas, X prend la valeur 3.

Une seule réponse m'est parvenue, celle de Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques)

I) Relations de récurrence

Notons X_n la variable aléatoire X lorsque l'on tire les numéros de 1 à n. On peut obtenir la loi de X_n par récurrence sur n. Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont constantes, égales à 1.
Pour un tirage des nombres de 1 à $n + 1$, soit U le dernier numéro tiré. On va examiner les probabilités conditionnelles selon les valeurs de U. Si le numéro U vaut 1 ou $n + 1$, il va directement dans une séquence d'entiers consécutifs et n'augmente donc pas le nombre de séquences. Ainsi, pour tout entier k,

$$\mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n+1} = k \middle| \mathrm{U} = 1\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_{n-1} = k \middle| \mathrm{U} = n+1\right) = \mathrm{P}\left(\mathrm{X}_n = k\right).$$

Si U prend une valeur $u \in$ [[2, n]], les n premiers numéros tirés sont dans l'un des deux intervalles [[1, $u - 1$]], ou [[$u + 1$, $n + 1$]]. En supprimant les numéros de [[$u + 1$, $n + 1$]], on obtient un tirage de $u - 1$ nombres appartenant à [[1, $u - 1$]] pour lequel la variable X_{u-1} prend une valeur a. En supprimant les numéros de [[1, $u - 1$]], on obtient un tirage de $n + 1 - u$ nombres appartenant à [[$u + 1$, $n + 1$]] pour lequel la variable X_{n+1-u} prend une valeur b. La valeur de X_{n+1} est alors égale à $a + b$.

Ainsi, pour tout $u \in [[2, n]]$,

$$P\left(X_{n+1}=k \mid U=u\right)=\sum_{a=1}^{k-1} P\left(X_{u-1}=a\right) \cdot P\left(X_{n+1-u}=k-a\right).$$

On en déduit que pour $n \geq 1$,

$$P\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{1}{n+1} \sum_{u=1}^{n+1} P\left(X_{n+1}=k \mid U=u\right),$$

ce qui est égal à

$$\frac{2}{n+1} P\left(X_n=k\right)+\frac{1}{n+1} \sum_{u=2}^{n} \sum_{a=1}^{k-1} P\left(X_{u-1}=a\right) \cdot P\left(X_{n+1-u}=k-a\right).$$

Avec la convention $P\left(X_0=0\right)=1$ et $P\left(X_0=k\right)=0$ pour tout $k \geq 1$, on peut simplifier cette formule :

$$P\left(X_{n+1}=k\right)=\frac{1}{n+1} \sum_{u=1}^{n+1} \sum_{a=0}^{b} P\left(X_{u-1}=a\right) \cdot P\left(X_{n+1-u}=k-a\right).$$

II) Premières valeurs

Les relations de récurrence établies ci-dessus permettent d'obtenir les premières valeurs :

$P(X_n = k)$	$k = 1$	$k = 2$	$k = 3$	$k = 4$	$k = 5$
$n = 3$	2/3	1/3			
$n = 4$	1/3	2/3			
$n = 5$	2/15	11/15	2/15		
$n = 6$	2/45	26/45	17/45		
$n = 7$	4/315	38/105	4/7	17/315	
$n = 8$	1/315	4/21	64/105	62/315	
$n = 9$	2/2835	247/2835	484/945	1072/2835	62/2835

III) Une fonction génératrice globale

On considère maintenant la série formelle à deux variables

$$f(x, y)=\sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} P\left(X_n=k\right) x^k y^n .$$

Ainsi,

$$f(x, y)=1+x y+x y^2+\frac{2}{3} x y^3+\frac{1}{3} x^2 y^3+\frac{1}{3} x y^4+\frac{2}{3} x^2 y^3+\cdots$$

Les formules de récurrence établies dans la partie I peuvent s'écrire, pour $n \geq 1$,

$$(n+1) P\left(X_{n+1}=k\right) x^k y^n=\sum_{u=1}^{n+1} \sum_{a=0}^{k} P\left(X_{u-1}=a\right) x^a y^{u-1} P\left(X_{n+1-u}=k-a\right) x^{k-a} y^{n+1-u} .$$

Le premier membre est le terme en $x^k y^n$ de $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$. Le deuxième membre est le terme en $x^k y^n$ de $f^2(x, y)$. Le seul terme sans y de $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ est x. Le seul terme sans y de $f(x, y)$ est 1 donc le seul terme sans y de $f^2(x, y)$ est 1 également.

Ainsi, f vérifie l'équation différentielle

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = f^2(x,y) - 1 + x,$$

que l'on peut aussi écrire

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f^2(x,y) - (1-x)} = 1,$$

ou encore

$$\frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y) - \sqrt{1-x}} - \frac{\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{f(x,y) + \sqrt{1-x}} = 2\sqrt{1-x}.$$

En intégrant cela par rapport à y,

$$\ln\left(f(x,y) - \sqrt{1-x}\right) - \ln\left(f(x,y) + \sqrt{1-x}\right) = 2y\sqrt{1-x} + \mathrm{C}(x),$$

où C est une fonction de la seule variable x. Ainsi,

$$\frac{f(x,y) - \sqrt{1-x}}{f(x,y) + \sqrt{1-x}} = \mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right),$$

avec

$$\mathrm{K}(x) = \exp(\mathrm{C}(x)).$$

On trouve $\mathrm{K}(x)$ en remplaçant y par 0 :

$$\mathrm{K}(x) = \frac{1-\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}.$$

Finalement,

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{1+\mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}{1-\mathrm{K}(x)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}$$

soit

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{1+\sqrt{1-x} + \left(1-\sqrt{1-x}\right)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}{1+\sqrt{1-x} - \left(1-\sqrt{1-x}\right)\exp\left(2y\sqrt{1-x}\right)}$$

ou encore

$$f(x,y) = \sqrt{1-x}\,\frac{\mathrm{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right) - \sqrt{1-x}\,\mathrm{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}\,\mathrm{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right) - \mathrm{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)},$$

soit enfin

$$f(x,y)=\frac{\operatorname{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right)-\sqrt{1-x}\,\operatorname{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\operatorname{ch}\left(y\sqrt{1-x}\right)-\dfrac{\operatorname{sh}\left(y\sqrt{1-x}\right)}{\sqrt{1-x}}}.$$

IV) Une fonction génératrice pour les X_n

Pour n fixé, on pose

$$g_n(x)=\sum_{k\geq 1}\mathrm{P}(\mathrm{X}_n=k)x^n.$$

On peut obtenir $g_n(x)$ a partir de f :

$$g_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0).$$

L'espérance de X_n s'obtient par la relation

$$\mathrm{E}(\mathrm{X}_n)=g_n'(1).$$

Comme

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=f^2(x,y)+z \quad \text{avec} \quad z=x-1,$$

on peut obtenir les dérivées suivantes sous la forme

$$\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}=\mathrm{P}_n(f),$$

où P_n est un polynôme, l'expression $z=x-1$ étant considérée comme une constante. On construit les polynômes P_n ainsi : d'après l'équation différentielle vérifiée par f,

$$\mathrm{P}_1(\mathrm{X})=\mathrm{X}^2+z,$$

et en dérivant par rapport à y la relation au rang n,

$$\mathrm{P}_{n+1}(\mathrm{X})=\frac{1}{n+1}\mathrm{P}_n'(\mathrm{X})\left(\mathrm{X}^2+z\right).$$

Et

$$g_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{\partial^n f}{\partial y^n}(x,0)=\mathrm{P}_n(1),$$

puisque $f(x, 0) = 1$. On trouve les premières valeurs des polynômes P_n :

$$\mathrm{P}_2(\mathrm{X})=\mathrm{X}^3+z\mathrm{X},$$

$$\mathrm{P}_3(\mathrm{X})=\mathrm{X}^4+\frac{4}{3}z\mathrm{X}^2+\frac{1}{3}z^2,$$

$$\mathrm{P}_4(\mathrm{X})=\mathrm{X}^5+\frac{5}{3}z\mathrm{X}^3+\frac{2}{3}z^2\,\mathrm{X},$$

$$P_5(X) = X^6 + 2zX^4 + \frac{17}{15}z^2X^2 + \frac{2}{15}z^3,$$

$$P_6(X) = X^7 + \frac{7}{3}zX^5 + \frac{77}{45}z^2X^3 + \frac{17}{45}z^3X,$$

$$P_7(X) = X^8 + \frac{8}{3}zX^6 + \frac{12}{5}z^2X^4 + \frac{248}{315}z^3X^2 + \frac{17}{315}z^4,$$

$$P_8(X) = X^9 + 3zX^7 + \frac{16}{5}z^2X^5 + \frac{88}{63}z^3X^3 + \frac{62}{315}z^4X,$$

$$P_9(X) = X^{10} + \frac{10}{3}zX^8 + \frac{37}{9}z^2X^6 + \frac{424}{189}z^3X^4 + \frac{1382}{2835}z^4X^2 + \frac{62}{2835}z^5.$$

Dans l'expression $g_n(x) = P_n(1)$, on trouve l'espérance $g_n'(1)$ comme coefficient devant $z = x - 1$. Ainsi, les premières valeurs sont

n	3	4	5	6	7	8	9
E(n)	4/3	5/3	2	7/3	8/3	3	10/3

On conjecture donc que

$$E(X_n) = \frac{n+1}{3}.$$

Cette conjecture se démontre par récurrence : $E(X_n) = g_n'(1)$ est le coefficient devant z, qui apparaît dans le coefficient en X^{n-1} de $P_n(X)$. Faisons l'hypothèse de récurrence

$$P_n(X) = X^{n+1} + \frac{n+1}{3}zX^{n-1} + \cdots$$

Alors

$$P_n'(X) = (n+1)X^n + (n-1)\frac{n+1}{3}zX^{n-2} + \cdots$$

et donc

$$P_{n+1}(X) = \frac{1}{n+1}(X^2+z)P_n'(X) = (X^2+z)\left(X^n + \frac{n-1}{3}zX^{n-2} + \cdots\right)$$

soit

$$P_{n+1}(X) = X^{n+2} + \left(1 + \frac{n-1}{3}\right)zX^n + \cdots = X^{n+2} + \frac{n+2}{3}zX^{n+1} + \cdots,$$

ce qui termine la récurrence.

Problème 495–1. Contrairement à ce que j'avais annoncé, le problème 495-1 sera abordé dans le prochain numéro. J'entretiens le suspens…