Ensembles gonflés en dimension *n*

Marc Roux(*)

Dans « Tout ensemble est-il gonflable ? » (BV nº 510) j'ai montré que *dans le plan*, tout ensemble borné est inclus dans un ensemble de largeur constante (aussi parfois appelé « ensemble gonflé ») de même diamètre. Cherchant à étendre ce résultat à l'espace et aux dimensions supérieures, je n'ai pas trouvé de démonstration analogue à celle donnée dans le plan ; mais j'en ai trouvée une, plus brève, valable en dimension finie quelconque, plan (et droite) compris ; cependant elle est bien moins pratique, pour les constructions effectives, que celle de l'article précédent, qui n'est donc pas totalement obsolète.

Que le lecteur peu familier des espaces de dimension finie quelconque ne soit pas rebuté : il peut suivre ce qui suit en lisant 3 à la place de n, autrement dit en imaginant qu'on est dans l'espace ordinaire.

1. Définitions et préliminaires.

Les quatre définitions équivalentes données dans le précédent article restent quasiment identiques, à quelques mots près, et on pourrait sans doute en ajouter d'autres. Cependant dans la suite nous nous servirons uniquement de la caractérisation qui était numérotée 4, à savoir :

Un ensemble borné est « de largeur constante », ou « gonflé », si et seulement si on ne peut lui ajouter aucun point sans augmenter son diamètre.

Désormais j'utiliserai donc exclusivement l'expression « ensemble gonflé » ; mais le lecteur ne doit pas oublier qu'elle est synonyme de « ensemble de largeur constante » (dans le plan) ou « ensemble d'épaisseur constante » (dans l'espace).

Exactement comme dans le cas plan, on dispose du théorème de Carathéodory : *l'enveloppe convexe* E′ *d'une partie* E *de* $\mathbb{R}^n$ *est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls des (n+1)-uplets de points de* E. On en déduit, comme dans le plan, que tout ensemble borné a le même diamètre que son enveloppe convexe. Et l'adhérence de celle-ci a aussi le même diamètre. On en déduit que **tout ensemble gonflé dans** $\mathbb{R}^n$ **est nécessairement convexe et compact**, car sinon l'adjonction d'un point de son enveloppe convexe ou de son adhérence n'augmenterait pas son diamètre.

2. Proposition

Toute partie bornée de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de diamètre d, est contenue dans un ensemble gonflé, de même diamètre d.

(*) marc.roux15@wanadoo.fr

Idée de la démonstration

On examine un par un les points de $\mathbb{R}^n$ à coordonnées rationnelles, c'est-à-dire les éléments de $\mathbb{Q}^n$, ce qui est possible puisque cet ensemble est dénombrable ; partant de l'ensemble E considéré, chaque fois que l'adjonction de l'un de ces points n'augmente pas le diamètre de l'ensemble déjà formé, on le lui adjoint, sinon on le rejette. On obtient un ensemble G, de diamètre d, contenant E. L'adhérence, ou fermeture, de l'enveloppe convexe de G répondra à la question.

Remarque 1 : au lieu de $\mathbb{Q}^n$, on peut considérer n'importe quelle partie dénombrable dense dans $\mathbb{R}^n$, par exemple l'ensemble des triplets (x, y, z) où chacun des termes du triplet est de la forme $\dfrac{k}{2^j}$, k entier relatif quelconque, j entier positif ou nul quelconque.

Détail de la démonstration

Soit E une partie bornée de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, de diamètre d. Si $d = 0$, E, réduit à un point, est un gonflé de lui-même ; dans la suite on supposera toujours $d > 0$. L'ensemble $\mathbb{Q}^n$ est dénombrable et dense dans $\mathbb{R}^n$. On sait construire explicitement(1) une bijection de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{Q}^n$, c'est-à-dire une suite $(\mathrm{A}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ qui liste tous les points de $\mathbb{Q}^n$ sans répétition. Si $\mathrm{E}\cup\{\mathrm{A}_0\}$ a pour diamètre d, on pose $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}\cup\{\mathrm{A}_0\}$, sinon on pose $\mathrm{E}_0 = \mathrm{E}$ et, pour tout i $\in \mathbb{N}^*$, on pose : si $\mathrm{E}_{i-1}\cup\{\mathrm{A}_i\}$ a pour diamètre d, $\mathrm{E}_i = \mathrm{E}_{i-1}\cup\{\mathrm{A}_i\}$, sinon $\mathrm{E}_i = \mathrm{E}_{i-1}$.

$(\mathrm{E}_i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite d'ensembles emboîtés (pour tout i, $\mathrm{E}_{i-1} \subset \mathrm{E}_i$), tous de diamètre d, et tous contenant E. Soit $\mathrm{G} = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_i$: G est de diamètre d, et contient E. Si on ajoute à G un point à coordonnées rationnelles ne lui appartenant pas, on augmente son diamètre. Soit G′ l'adhérence de l'enveloppe convexe de G : G′ est un compact (car fermé et borné), de diamètre d, contenant E.

G′ n'est pas contenu dans un hyperplan, car s'il l'était, on pourrait lui ajouter des points (à coordonnées rationnelles) sans augmenter son diamètre. Cette affirmation me semble intuitivement évidente : il suffit de prendre un point suffisamment proche de l'hyperplan, et éloigné du bord de G′ : voir figure 1, en dimension 3. D'autre part elle se déduit immédiatement d'une des définitions équivalentes d'*ensemble de largeur constante : ensemble dont la projection orthogonale sur toute droite est un segment de même longueur d*. Cependant, n'ayant pas prouvé l'équivalence de ces définitions en dimension n, je donne en annexe une démonstration de « G' n'est pas contenu dans un hyperplan », n'utilisant que la définition d'« ensemble gonflé » retenue ci-dessus (dans la rédaction de cette annexe, G′ est simplement appelé G).

(1) Le choix d'une de ces bijections, bien déterminée, permet d'éviter une utilisation cachée de l'axiome du choix, et donc de rester dans le cadre des mathématiques constructives.

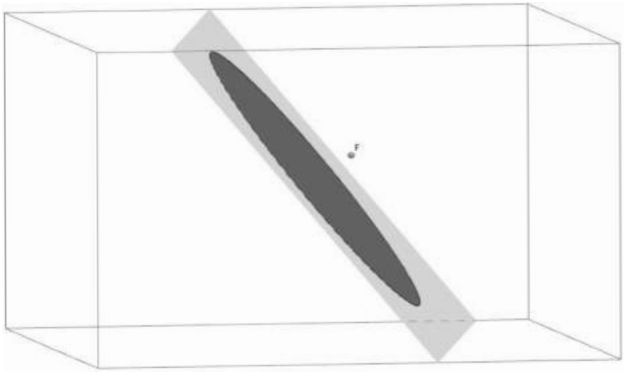


Fig 1.

Montrons que G′ est gonflé : Soit M $\notin$ G′ ; supposons que l'adjonction de M n'augmente pas le diamètre de G′, c'est-à-dire que $G' \cup \{M\}$ a pour diamètre d. Alors l'enveloppe convexe de $G' \cup \{M\}$ est aussi de diamètre d. Or cette enveloppe contient un « cône », réunion de segments [MA] avec A sur la frontière de G′, les points de [MA] autres que A n'appartenant pas à G′. G′ n'étant pas « sans épaisseur » (non contenu dans un hyperplan), ce cône est d'intérieur non vide. Or $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, donc ce cône contient au moins un point P à coordonnées rationnelles, n'appartenant pas à G′. Par construction de G, l'adjonction de P augmente le diamètre de G, donc de G′. D'où contradiction.

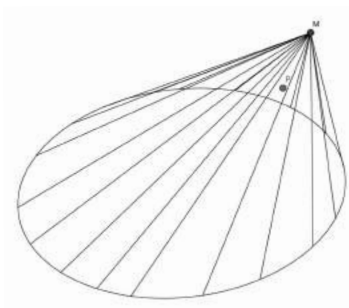


Fig 2.

3. Une autre démonstration.

Pierre Legrand m'a soufflé une autre démonstration de la proposition du paragraphe 2. Elle a l'inconvénient de ne pas être constructive, de reposer sur l'axiome du choix, sous la forme du lemme de Zorn ; mais elle a les avantages de la simplicité, de la concision.

Lemme de Zorn : « *Si dans un ensemble* E *muni d'un ordre partiel toute partie totalement ordonnée admet un majorant, alors* E *a un élément maximal*. »

Étant donné une partie bornée A de $\mathbb{R}^n$, de diamètre d, on prend pour E l'ensemble des compacts contenant A et de même diamètre d (il en existe, ne serait-ce que $\overline{A}$). Soit une famille F d'éléments S_i de E, totalement ordonnée pour l'inclusion ; il est immédiat que la réunion des S_i est encore de diamètre d ; son adhérence appartient donc à E et majore F. D'après le lemme de Zorn, E a un élément maximal K : K est donc un compact contenant A, de même diamètre, qui n'est contenu dans aucun autre élément de E.

4. Vers une construction algorithmique ?

J'avais tenté d'écrire les grandes lignes d'un algorithme qui, en dimension 3, utiliserait un maillage d'une partie de l'espace et, suivant la démonstration de 2., testerait dans un ordre donné chaque nœud pour voir si son adjonction augmente ou non le diamètre ; pour une maille assez fine, l'ensemble des points retenus visualiserait approximativement le « gonflé ». Mais des collègues relecteurs, meilleurs connaisseurs que moi du domaine de l'algorithmique, pensent qu'on ne peut pas ainsi déboucher sur un programme effectif d'une complexité acceptable ; sauf peut-être dans le cas où l'ensemble de départ E est un polyèdre convexe, et même dans ce cas bien des problèmes restent à résoudre. Le problème de la construction algorithmique d'un « gonflé » d'une partie bornée quelconque de $\mathbb{R}^n$ reste donc ouvert, et proposé à la sagacité de nos lecteurs(2).

5. Exemples visuels.

N'étant pas en mesure d'obtenir des images à partir d'un algorithme, je renvoie, pour quelques exemples d'objets de largeur constante en dimension 3 (dits aussi *sphéroformes*), à l'article [2], dont j'extrais les figures suivantes :

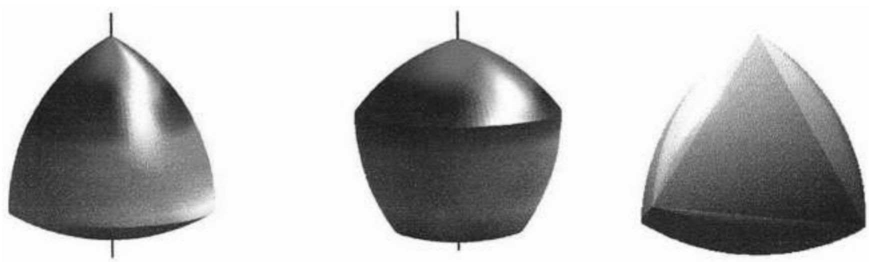


Fig 3 : *Trois sphéroformes : le triangle de Reuleaux et le pentagone de Reuleaux tournés autour de leur axe de symétrie de révolution ; le solide de Meissner.*

(2) Après la rédaction de ce texte, Hubert Proal, que je remercie, m'a signalé qu'en 2011 une équipe MathEnJeans du lycée français de Varsovie avait réalisé un programme reposant grosso modo sur le principe de ce qui précède : ajout un par un de points tirés au hasard, pour construire des gonflés de certains ensembles. Je n'ai pas pu me procurer ce programme.

Fig 4 : *Deux vues du tétraèdre sphérique de Reuleaux, qui n'est pas d'épaisseur constante.*

Les trois mêmes sphéroformes sont également représentés dans [3]. Si j'ai bien compris (ce passage de la thèse est en anglais !), le solide de Meissner est un « gonflé » du tétraèdre régulier ; il s'obtient en « rognant » le tétraèdre sphérique de Reuleaux (limité par quatre portions de sphères centrées aux sommets), car certains points des arcs qui délimitent ces portions de sphères sont à des distances mutuelles strictement supérieures à la longueur des arêtes ; démontrer cette dernière assertion pourrait d'ailleurs être un exercice abordable en lycée, par exemple en guidant les élèves, par des questions intermédiaires, vers la démonstration donnée en Annexe 2, selon une idée de Pierre Legrand.

On peut aussi vérifier ceci avec un logiciel comme GeoGebra (version 5.0, avec fenêtre 3D) : il indique que E , sur l'arc $\overset{\frown}{CD}$, et H, sur l'arc $\overset{\frown}{AB}$, peuvent avoir une distance strictement supérieure à 1 (fig 5). Sur cette copie d'écran, la valeur de EH, calculée par le logiciel, est bien sûr une valeur décimale approchée.

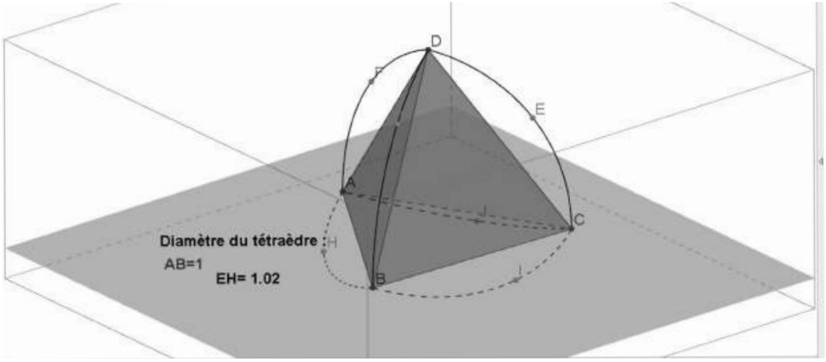


Fig 5.

Le domaine des objets gonflés est l'objet de recherches actuelles, on y rencontre encore bien des problèmes ouverts, par exemple celui de la minimisation du volume : on conjecture que le solide de Meissner serait, parmi les gonflés de diamètre *d* fixé, celui de volume minimal.

Je remercie chaleureusement Daniel Reisz, Christophe Boilley, Sébastien Soucaze et Pierre Legrand, dont les remarques judicieuses m'ont permis d'améliorer nettement la rigueur et la clarté de cet article.

6. Bibliographie et sitographie.

[1] *Tout ensemble est-il gonflable ?* , par Marc Roux. Bulletin de l'APMEP n° 510.
[2] *Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux*. par T. Bayen et J.-B. Hiriart-Urruty, en ligne sur le site de l'académie de Toulouse :
http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Annales%20sci%20math%20quebec.pdf
[3] Pour aller (beaucoup) plus loin : « Optimisation de formes dans la classe des corps de largeur constante et des rotors. Thèse de Térence Bayen : http://www.cmap.polytechnique.fr/~bayen/Bayen1.pdf
Ici, contrairement à [2], tous les résultats sont démontrés.

ANNEXE 1 : un ensemble gonflé dans $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être contenu dans un hyperplan.

Lemme. Soit G une partie compacte et convexe de $\mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$), de diamètre $d > 0$ Soit k la dimension du sous-espace engendré par G (autrement dit : G est contenu dans un sous-espace H de dimension k, et n'est contenu dans aucun sous-espace de dimension $k - 1$; quitte à effectuer un changement de repère orthonormé, on peut supposer que $\mathrm{H} = \mathbb{R}^k$). On a $1 \leq k \leq n$. Si $k < n$, on peut adjoindre à G un point M à coordonnées rationnelles n'appartenant pas à H, tel que G_1, adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{G} \cup \{\mathrm{M}\}$, soit un compact convexe contenant G et de même diamètre que G, d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^{k+1}$.

Démonstration. Soit O un point intérieur à G, dans $\mathbb{R}^k$. Pour tout P de G on a $\mathrm{OP} < d$ (car des points diamétraux sont forcément sur la frontière). L'application de G dans $\mathbb{R}^+$: $\mathrm{P} \to \mathrm{OP}$ est continue sur un compact, donc bornée et atteint ses bornes : il existe $r = \max\limits_{\mathrm{P} \in \mathrm{G}} \mathrm{OP} < d$.

Soit M à coordonnées rationnelles dans la boule de centre O, de rayon $\dfrac{d-r}{2}$ (dans $\mathbb{R}^{k+1}$). Pour tout P de G on a $\mathrm{MP} \leq \mathrm{MO} + \mathrm{OP} \leq \dfrac{d-r}{2} + r = \dfrac{d+r}{2} < d$: l'adjonction de M n'augmente pas le diamètre.

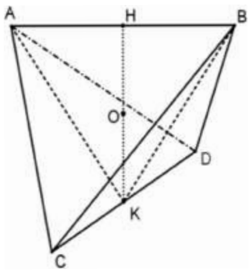
Soit G_1 l'adhérence de l'enveloppe convexe de $\mathrm{G} \cup \{\mathrm{M}\}$; G_1 est un compact convexe contenant G et de même diamètre que G ; dans $\mathbb{R}^{k+1}$, la frontière de G_1 est la réunion de G et des segments [MT] avec T sur la frontière de G ; O étant intérieur à G, le segment [OM] n'est pas inclus dans la frontière de G_1, et donc, par convexité, contient des points intérieurs à G_1 ; G_1 est d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^{k+1}$. CQFD.

Corollaire. Soit G un compact convexe engendrant un sous-espace de $\mathbb{R}^n$ de dimension k ($1 \leq k < n$). Il existe un compact convexe G′, contenant G, de même diamètre que G, d'intérieur non vide dans $\mathbb{R}^n$ (donc non contenu dans un hyperplan).

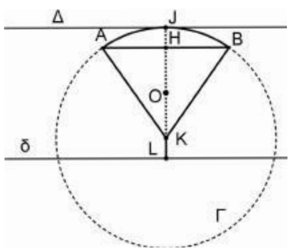
Démonstration. Il suffit d'appliquer $n - k$ fois le lemme précédent.

Remarque. Ceci implique en particulier qu'un ensemble gonflé (= de largeur constante) dans $\mathbb{R}^n$ ne peut pas être contenu dans un hyperplan.

Annexe 2 : Le tétraèdre de Reuleaux n'est pas gonflé. Démonstration d'après Pierre Legrand.



Soit (T) le tétraèdre régulier ABCD, la longueur des arêtes étant prise comme unité. Soit (R) le tétraèdre de Reuleaux associé, c'est-à-dire l'intersection des quatre boules de rayon 1, de centres A, B, C, D. Ce solide possède six arêtes curvilignes, de mêmes extrémités que les arêtes de (T), portées par les cercles d'intersection deux à deux des quatre sphères de rayon 1. Soit H le milieu de [AB], K le milieu de [CD], O le milieu de [KH]. L'intersection des deux sphères de rayon 1, de centres C et D, est un cercle Γ situé dans le plan médiateur de [CD], qui est (ABK), et son centre est K. L'arête curviligne de (R) ayant pour extrémités A et B est un arc du cercle Γ. Le milieu J de cet arc est par symétrie sur (HK). Voir figure ci-dessous, dans le plan (ABK)



Calculons OJ : OJ = KJ − KO.
[KA]est une hauteur du triangle équilatéral ACD, donc

$$KJ = KA = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$KO = \dfrac{1}{2}KH$; KH se calcule par le théorème de Pythagore appliqué à AKH : $KH = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$,, d'où :

$$OJ = KJ - KO = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}.$$

De la même manière on montre que L, milieu de l'arête curviligne de (R) d'extrémités C et D, est sur (KH), et $OL = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}$.

D'où $JL = \sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}025$.

Ceci montre que le diamètre de (R) est supérieur ou égal à $\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 1{,}025$. (en fait, il est certainement égal à cette valeur, mais le justifier est superflu ici), donc que (R) n'a pas le même diamètre que (T) : (R) n'est pas un « gonflé de (T) ».

De plus, montrons que (R) n'est pas gonflé : soit M un point à l'extérieur de (R) tel que AM < JL – 1 (par exemple AM = 0,01) ; soit P un point quelconque de (R) : P est dans la boule de centre A, de rayon 1, donc :

$$MP \leq MA + AP \leq JL - 1 + 1 = JL.$$

Donc l'adjonction de M à (R) n'augmente pas son diamètre : (R) n'est pas gonflé.