Maths et TICE en quatrième autour d'un Sangaku(*)

Christelle Kunc(**)

J'étais à la recherche d'une idée originale à tester en classe dans le cadre du groupe « TICE et Pédagogie » de l'IREM de Lorraine, lorsque, parcourant l'excellent livre de Géry Huvent(1), *Le mystère des énigmes géométriques japonaises* (Dunod), j'ai envisagé de faire démontrer par mes élèves de quatrième une jolie formule trouvée dans un SANGAKU.

Outre le côté culturel et historique, l'idée principale était de faire travailler mes élèves sur les domaines suivants :

- la recherche de conjecture,
- l'utilisation d'un logiciel de géométrie dynamique GeoGebra,
- la démonstration.

Les sangakus sont des énigmes géométriques japonaises gravées sur des tablettes en bois, que l'on trouve souvent sous les auvents des temples et des sanctuaires au Japon. Ils ont été réalisés entre le XVIIe et le XIXe siècle et représentent des problèmes proposés par de grands maîtres de prestigieuses écoles de mathématiques, qui faisaient ainsi connaître leur école. Ils étaient parfois à l'origine de véritables joutes mathématiques.

1. L'activité proposée

Les exercices 1 et 2 qui suivent sont extraits d'un premier DM, puis les exercices 3 et 4 figurent dans le DM suivant.

Dans les exercices 1 et 3, je demande aux élèves de m'envoyer leurs fichiers sur PLACE : il s'agit de l'ENT (Environnement numérique de Travail) mis en place sur l'ensemble de l'académie Nancy-Metz dans les collèges et les lycées. Les professeurs, les élèves, les parents peuvent y accéder pour y trouver, entre autres, le cahier de texte de la classe, les notes et appréciations, l'agenda de l'établissement, des liens vers des logiciels, des groupes de travail, et une messagerie. C'est par cette messagerie que transitent les exercices 1 et 3.

(*) Une première version de cet article est parue dans LE PETIT VERT, bulletin de la régionale de Lorraine.

(**) Collège Chepfer, Villers-les-Nancy.

(1) Le livre de Géry Huvent a été recensé dans la rubrique Matériaux du BV 481 (http://www.apmep.fr/Sangaku).

Pour plus d'informations, vous pouvez aller directement voir la présentation des sangaku faite par l'auteur :

http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/html/sangaku.htm

ou accéder directement à son site:

http://gery.huvent.pagesperso-orange.fr/index_explorer_net.htm

Exercice 1 (sur ton ordinateur)

1) Dans GeoGebra, construis un triangle ABC rectangle en C.
Nomme ou renomme les longueurs des côtés afin que : a = BC, b = AC, et c = AB.
Construis le cercle inscrit dans le triangle ABC. Nomme son centre O et la mesure de son rayon r.

2) Fais apparaître le tableur.
Recopie la ligne 1 en suivant le modèle ci-contre, puis entre les distances correspondantes dans la ligne 2.
(*Aide : n'oublie pas de tracer r pour avoir sa mesure !*)

Tableur

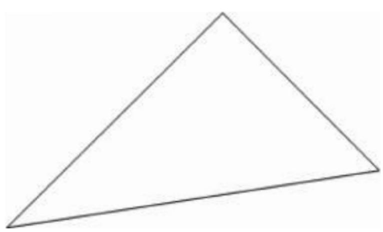
	A	B	C	D	E
1	a	b	c	r	a+b-c
2					

3) Modifie la taille de ton triangle rectangle (*attention, il doit rester rectangle !*) et cherche à établir une relation entre les résultats des colonnes D et E. Enregistre ton fichier et envoie-le sous le titre : « DM8-NOM-Prénom-Classe » sur PLACE.

(si tu ne parviens pas à m'envoyer ton fichier, tu peux aussi faire plusieurs saisies d'écran avec des triangles de tailles différentes et l'affichage correspondant sur le tableur, en laissant la fenêtre algèbre ouverte.

Écris sur ta copie (à l'aide d'une phrase) la conjecture que tu peux émettre à la suite de cette activité en ce qui concerne le lien existant entre un triangle rectangle et son cercle inscrit.

Exercice 2 (sur ta copie)
Soit un triangle ABC rectangle en C. Son cercle inscrit a pour rayon r et pour centre O.
a) Complète la figure ci-contre avec tes instruments et code la.
Le cercle inscrit est tangent à (BC) en I, à (AC) en J et à (AB) en K. Place I, J, K.
b) Démontre que AJ = AK, BI = BK et CJ = CI.
c) Démontre que CIOJ est un carré.
d) Code tous les résultats obtenus ci-dessus sur ta figure.
e) Montre que AB = AC + BC − 2r.
f) Déduis-en l'expression de r en fonction de AC, BC et AB.

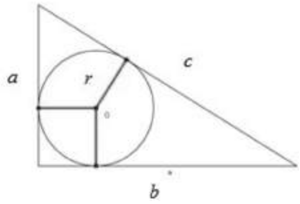


Récapitulatif du contenu des exercices 1 et 2

Dans un premier temps, les élèves doivent démontrer une formule reliant les côtés d'un triangle rectangle avec la longueur du rayon de son cercle inscrit :

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

(Démonstration à l'aide de propriétés géométriques et calcul littéral)



Exercice 3 (sur ton ordinateur)

1) À l'aide du logiciel GeoGebra, construis deux droites perpendiculaires sécantes en R. En plaçant deux points S et T sur ces droites, construis un triangle RST rectangle en R.

2) Construis la hauteur issue de R, et appelle H le pied de cette hauteur, puis définis $h = \mathrm{RH}$.

3) Construis les cercles inscrits dans chacun des trois triangles rectangles, RST, RHT et RSH et de rayons respectifs R_1, R_2 et R_3.

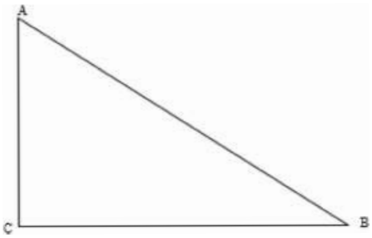
Remarque : Attention à bien définir les rayons des cercles avant de les construire pour qu'ils soient corrects et qu'ils restent inscrits si tu agrandis ou réduis le triangle RST.

4) En faisant varier sur ta figure les points S et T, et à l'aide du tableur, vérifie la conjecture suivante : $R_1 + R_2 + R_3 = h$.

5) Enregistre ton fichier GeoGebra et envoie-le moi en pièce jointe sur PLACE. (DM9-NOM-Prénom-Classe)

Exercice 4 (sur ta copie)

a) Dans le triangle ABC rectangle en C ci-contre, construis le cercle inscrit.
On notera r la longueur de son rayon.



b) Construis la hauteur [CP] issue de C (P étant le pied de la hauteur) puis construis les deux cercles inscrits dans les triangles APC et PCB.
On notera r_1 et r_2 les longueurs respectives de leurs rayons et h la longueur PC.

c) Soit a la longueur BC, b la longueur AC, s la longueur AP et t la longueur PB. Annote ta figure à l'aide de ces lettres.

d) Dans les exercices 1 et 2 précédents, on a vu que :
Si ABC est un triangle rectangle en C tel que son cercle inscrit a pour rayon r, alors

$$r = \frac{a+b-c}{2}.$$

Applique cette propriété dans les deux autres triangles rectangles de la figure et écris les deux égalités ainsi obtenues.

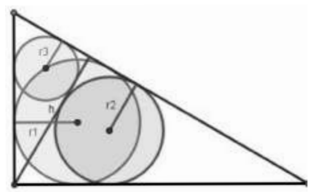
e) En utilisant les trois égalités précédentes, démontre que $r + r_1 + r_2 = h$.

f) Au Japon, on découvre parfois accrochés sous les auvents des temples et sur les torii à l'entrée des sanctuaires, des panneaux recouverts d'écritures mathématiques,

que l'on nomme des *sangakus*. Le problème géométrique que tu as résolu dans cet exercice figure sur l'un d'entre eux.
Qu'est ce qu'un *sangaku* ? Quelle fonction ces panneaux pouvaient-ils remplir dans le passé ? Pour quelle raison a-t-on choisi des lieux sacrés pour les exposer ?
Tu essaieras de répondre à ces questions en effectuant une recherche que tu illustreras (par des images et/ou représentations géométriques différentes de la figure proposée dans cet exercice).

Contenu des exercices 3 et 4

Dans un deuxième temps, les élèves doivent utiliser la formule trouvée dans le devoir précédent pour démontrer que dans un triangle rectangle dont on a tracé la hauteur issue du sommet de l'angle droit, la somme des rayons des cercles inscrits dans chaque triangle rectangle ainsi construit est égal à la longueur de la hauteur :



$$r + r_1 + r_2 = h.$$

(Démonstration à l'aide d'un calcul littéral)

2. Faire le choix de devoir maison

Pour pouvoir utiliser correctement un logiciel de géométrie dynamique tel que GeoGebra, il faut un apprentissage spécifique des outils ;

– **en classe**, sur le vidéo projecteur, le professeur peut montrer ou expliquer certaines fonctions du logiciel, mais l'élève reste passif,
– **en salle info**, souvent l'élève est **en binôme**, ce qui le motive ou le rassure, mais parfois cela ne lui permet pas de se tromper. Or c'est en passant par l'erreur (corrigée !) que la plupart du temps les progrès sont possibles,
– dans le meilleur des cas, **en salle info**, l'élève peut se retrouver **seul** sur son ordinateur (par exemple en 1/2 classe) mais, là encore, l'influence du collectif ou l'aide de l'enseignant peut le guider dans la bonne direction et lui éviter trop d'erreurs.

Finalement, pour s'approprier l'outil correctement, l'idéal est que l'élève s'en serve **seul à la maison**. Il peut tout d'abord réaliser des petits exercices simples d'un jour sur l'autre (refaire un exercice réalisé en classe…) mais on n'ignore pas qu'une majorité d'élèves ne le fera que si ce travail est vérifié, voire évalué !
Il est possible que l'élève réalise des impressions d'écrans, mais ce n'est pas toujours suffisant pour vérifier la bonne construction d'une figure, et rien ne remplace la récupération du fichier.
Il faut alors prévoir une messagerie adaptée et pratique pour l'envoi et la réception des fichiers (PLACE par exemple).

Pour parvenir à établir la formule de ce SANGAKU, j'ai choisi d'insérer des exercices dans deux DM, l'un en Mars et l'autre en Avril (voir annexe). De cette expérience, j'analyse des erreurs des élèves et je tire quelques enseignements sur le choix de la présentation des sujets.

3. Conjecture et démonstration

Le matériel

Mes élèves disposent tous d'un accès à un ou plusieurs ordinateurs chez leurs parents, (même en cas de garde partagée), je l'ai vérifié dès le début de l'année. Si ce n'était pas le cas, l'élève pourrait aller travailler au CDI dans le temps imparti pour le devoir, ou demander un délai en cas de problème technique. Cependant, l'accès à l'Environnement Numérique de Travail PLACE est largement utilisé par nos familles pour vérifier les devoirs et les notes des enfants. De même, dans mon établissement, les recherches par internet sont fréquemment demandées par l'ensemble de l'équipe éducative, et cela fonctionne bien. Dans le même ordre d'idée, mes élèves ont souvent des exercices à faire sur LABOMEP, ce qui nécessite d'avoir un ordinateur avec des mises à jour récentes, et dans la grande majorité des cas, l'utilisation de l'ordinateur à la maison se passe sans soucis. En revanche, dès qu'il s'agit d'installer un logiciel, même gratuit, de tableur ou de géométrie, on rencontre des résistances de certains parents qui considèrent alors notre demande comme intrusive sur l'ordinateur familial. Je pense que ce n'est pas un problème d'ordre financier, mais plus d'ordre « pédagogique » ; ainsi, j'ai déjà du répondre à certaines remarques du style : « en géométrie, ils feraient mieux de savoir dessiner avec un crayon et une feuille ! ». L'intérêt de la géométrie dynamique reste donc peut-être à expliquer.

Mise en œuvre

Il y a nécessité de bien séparer la recherche de conjecture de la démonstration, afin d'éviter que les élèves ne se contentent du constat sur GeoGebra pour valider la démonstration. C'est un objectif fondamental de parvenir à convaincre des élèves de quatrième que constater un résultat à partir d'exemples ne constitue pas une preuve. D'autant qu'on ne leur a pas toujours demandé cela au cours de leur scolarité dans les classes de niveaux inférieurs !

J'ai donc dans chaque DM donné deux exercices **distincts**, en prenant soin, en plus, de changer les lettres utilisées dans les deux. Dans chacun des devoirs :
– le premier exercice consiste en la réalisation de la figure sur GeoGebra et doit aboutir à la conjecture d'une relation entre les longueurs de cette figure à l'aide du tableur du logiciel.
– un deuxième exercice placé à la suite permet de dessiner la figure sur le sujet (papier/crayon) et de démontrer la conjecture.
Les deux exercices sont donc complètement indépendants.

Résultats

Ce n'étaient pas les seuls exercices constituant ces DM, et par conséquent ils n'ont pas toujours été traités par les élèves. Pour éviter d'éventuels problèmes techniques (ou « soit disant problèmes » rencontrés par des élèves de mauvaise foi…) et divers courriers des parents, j'ai fait le choix de considérer l'exercice de construction sur le logiciel comme un exercice parmi les autres. Ainsi, les élèves pouvaient avoir une bonne note s'ils faisaient tous les autres exercices correctement même s'ils n'abordaient pas celui-là. Mais à l'inverse, il valorisait des élèves moins bons (notamment dans les démonstrations) dès qu'ils s'efforçaient de m'envoyer leur fichier.

Sur deux classes de quatrième (total 54 élèves), sur l'ensemble des deux devoirs, environ 60 % des élèves m'ont envoyé un fichier GeoGebra et environ 10% ont imprimé une ou plusieurs figures (avec les fenêtres Algèbre et Tableur ouvertes !). Des élèves se sont donc contentés de faire le deuxième exercice, c'est-à-dire la construction tracée sur le sujet et la démonstration et n'ont pas utilisé le support informatique du tout.

Dans le deuxième DM, j'ai ajouté la petite recherche documentaire sur les Sangakus, afin d' intéresser le maximum d'élèves et de valoriser les élèves fragiles mais volontaires.

4. Les erreurs informatiques

La moitié des élèves qui ont fait l'exercice sur GeoGebra a construit une figure qui semble correcte, et qui donnerait un dessin correct à l'impression de la page, mais qui n'est pas « dynamique ». Ils ont dessiné avec l'ordinateur une jolie figure, mais elle perd ses propriétés lorsqu'on déplace les points « libres » qui la constituent ; la figure construite ne correspond donc pas à l'énoncé.

On peut distinguer deux types d'erreurs, celles qui sont dues à une mauvaise maîtrise du logiciel dynamique et celles qui sont dues à des erreurs mathématiques.

Les erreurs liées à l'utilisation du logiciel de géométrie

– La construction de l'angle droit du triangle rectangle « à vue » (horizontal/vertical) ou à l'aide de la grille.
– L'absence de matérialisation des points d'intersection (centre des cercles, pied de la hauteur, …)
– Pas d'existence propre des segments dont on doit connaître les longueurs pour pouvoir effectuer la conjecture par la suite.

J'ai noté que ces erreurs ont diminué entre les deux devoirs (après corrections, autre TP en classe, ..)

Les erreurs mathématiques

Quelques élèves essaient de construire le cercle inscrit sans commencer par construire son centre à l'aide de bissectrices, ou en construisant le triangle après avoir construit le cercle, « à l'œil » ! Il s'agit en général d'élèves qui ne pensent même pas à utiliser leur leçon et construisent juste une figure qui a l'apparence de celle qu'on leur demande.
C'est un problème révélé par le logiciel : les élèves n'ont pas compris ce qu'est une construction, ils ne partent pas des hypothèses pour la construire et, de plus, confondent dessin et figure.

Dans le même registre d'erreur, on note principalement des problèmes de

construction du rayon des cercles inscrits. Les élèves construisent le cercle en plaçant le centre correctement, puis ils l'agrandissent jusqu'à ce qu'il entre « à peu près bien » dans le triangle. Et c'est souvent ce que font les élèves sur papier avec leur compas ! Mais ce qui peut passer inaperçu sur le papier se repère immédiatement sur la construction GeoGebra : on peut alors leur montrer que si on éloigne les sommets du triangle, les « rayons » choisis ne conviennent plus : les cercles sortent des triangles…
Cette erreur est commise par des élèves qui utilisent partiellement le cours, citent les propriétés dans les démonstrations, et ont l'impression de faire la différence entre dessin et figure car par ailleurs ils ne font pas n'importe quoi. Ils ont beaucoup de mal à comprendre ce qu'on leur reproche.

D'ailleurs cette erreur de rayon est tenace, parce qu'elle persiste entre les deux devoirs malgré les corrections, et les remarques orales et écrites sur le deuxième sujet ! Il me semble que c'est la notion de distance entre un point et une droite qui n'est pas facile à assimiler pour les élèves dans cette construction. Ce n'est pas étonnant, car c'est un obstacle important en géométrie : l'outil informatique permet de le mettre en lumière, c'est un gros avantage !

L'utilisation du tableur

La moitié des élèves qui ont rendu le travail sur GeoGebra n'a pas utilisé le tableur. En général, c'est parce qu'ils ne sont pas parvenus à une figure correcte qui matérialise les rayons.

Bilan chiffré : la moitié des élèves qui ont fait l'exercice utilisent le tableur, parmi lesquels 4 l'utilisent mal, 2 l'utilisent bien mais avec une figure « fausse ».

Les erreurs rencontrées

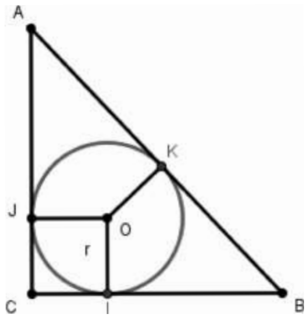
– le recopiage des valeurs trouvées et la réalisation d'un tableau de valeurs,
– l'entrée des points au lieu des distances dans le tableau (coordonnées !),
– l'insertion correcte des longueurs dans le tableur mais sans faire effectuer la somme par le tableur et en effectuant celle-ci sur sa calculatrice (!) puis en donnant les résultats sur sa copie.

On peut en conclure que les élèves produisant ces erreurs n'ont pas compris ce qu'est vraiment un tableur et n'en maîtrisent pas les fonctionnalités de base.
J'ai constaté une petite amélioration de l'usage du tableur entre les deux devoirs.

5. Les démonstrations

– La première démonstration attendue consiste à justifier puis utiliser les égalités de longueurs AJ = AK, BK = BI et CI = CJ ainsi que la propriété du quadrilatère CJOI qu'on démontrera être un carré :
CI = IO = JO = CJ = rayon du cercle.

On termine par un petit calcul littéral.



– La deuxième démonstration consiste juste à utiliser la propriété démontrée précédemment dans chaque triangle rectangle et à l'aide d'un calcul littéral, on peut établir rapidement la formule. (C'est rapide, mais il y a plein de lettres et une grosse formule qui fait peur…)

Globalement les démonstrations proposées par les élèves sont satisfaisantes, mais on notera tout de même toujours des difficultés dans l'utilisation du calcul littéral.

Évidemment, certains élèves ont utilisé les valeurs numériques du dessin pour justifier les résultats. Il a fallu revenir sur la notion de démonstration et réexpliquer la nécessité de prouver les formules avec des lettres afin de l'établir pour tous les dessins et non pas pour quelques exemples. On retrouve ainsi le problème de la preuve cité précédemment.

6. Bilan de l'activité

En ce qui concerne l'usage de l'outil informatique, des progrès sont notables entre les deux devoirs. Mais il n'y a quand même que la moitié des élèves qui ont réellement cherché à l'utiliser. Cela semble peu, mais finalement, c'est honorable pour des quatrièmes. L'exercice sur GeoGebra ne représentait que 1/4 ou 1/5 de chaque DM. Globalement les notes à ces devoirs sont semblables à celles des autres devoirs plus classiques. Et les élèves qui ont joué le jeu ne sont pas nécessairement les meilleurs élèves des deux classes. Les très bons élèves scolaires ont évidemment fait l'exercice (pour viser l'excellence), mais certains élèves assez « à l'aise » ont fait l'économie de cet effort, et en contrepartie, certains autres élèves plutôt fragiles ont été motivés par l'outil.

J'ai valorisé toute recherche envoyée, même fausse ou incomplète dans le B2i (envoi d'un fichier, utilisation des outils, …) et le socle de compétences (prise d'initiative, recherche, …).

Je pense que le choix de faire deux DM et non un seul a permis des progrès entre les deux et est intéressant, également dans le fait qu'avec un objectif plus long dans le temps (sur 2 mois), il laisse davantage de traces.

S'agissant du choix des énoncés des exercices de DM, je ferai quatre remarques :
1 – Le premier exercice détaille l'utilisation du tableur. Il sert un peu à donner des méthodes. Dans l'exercice 3, j'ai choisi de faire le contraire : donner le résultat à établir mais laisser l'élève faire sa démarche seul sur le tableur. Suivant l'objectif voulu ou le niveau des élèves, on peut proposer un énoncé plus ouvert du type : « À l'aide du tableur, établis une relation entre les trois rayons r_1, r_2 et r_3 ".
2 – De la même manière, on peut choisir de donner des questions plus ouvertes dans la démonstration de l'exercice 4 (questions d et e). Par exemple, il est possible de laisser l'élève faire le lien seul entre la conjecture et la démonstration en ne donnant la formule à démontrer que dans l'exercice 3. On peut aussi renvoyer l'élève au résultat du DM précédent sans redonner l'égalité utilisée.
(Mes élèves ont réussi la plupart du temps à écrire les trois égalités, mais ont surtout eu du mal à les réutiliser dans le calcul algébrique permettant d'établir la relation.)

3 – Pour éviter les problèmes relatifs à l'utilisation du tableur et juste se concentrer sur le logiciel de géométrie dynamique, on peut simplement insérer un texte dynamique dans la fenêtre pour faire calculer la somme des rayons comme une grandeur s, puis deux fois le rayon (comme t) et comparer les nombres s et t dans la fenêtre algèbre.
Mais si on souhaite conserver l'usage du tableur (qui offre une alternative aux tableurs open office ou excel, …), il peut être judicieux de modifier la formulation de l'exercice 1 qui peut inciter les élèves à entrer des valeurs manuelles en dessous des lettres a, b, et c.

4 – En ce qui concerne la découverte de ce qu'est un ***Sangaku***, je pense que mon objectif est atteint, car la plupart des élèves ont fait des recherches intéressantes et illustrées. De plus, dans les deux devoirs, les formules, simples et « jolies » ont marqué les esprits. *A posteriori*, il me semble que cela aurait été plus profitable de donner la recherche à faire sur les sangakus en amont des DM plutôt qu'en dernière question. Ainsi cela aurait pu motiver les élèves de savoir qu'ils étaient en situation de résoudre un problème de Sangaku, proposé par un maître japonais d'une de ces illustres écoles.
Il me semble que pour mettre en place ce genre de recherche, il est préférable de faire démontrer des résultats inconnus des élèves, afin qu'il y ait un enjeu dans l'intérêt de la démonstration. Trop souvent les « grandes » démonstrations restent limitées aux propriétés du programme et figurent dans les leçons. Sortir des sentiers battus lutte contre l'idée que la démonstration d'une propriété est un résultat artificiel ou inaccessible pour un élève et que c'est surtout le travail du professeur alors que le travail de l'élève serait juste d'utiliser les propriétés !
Il est à noter que ce sujet ne me semble pas utilisable dans d'autres niveaux car les propriétés de la bissectrice d'un angle seront peu utilisées par la suite dans les études de nos élèves et peu d'entre eux en conserveront le souvenir.

Il s'agit donc d'un travail mettant en œuvre des outils modernes mais sur un sujet qui aura peut-être bientôt sa place dans des livres d'histoire mathématique ! Ainsi, pour conclure, méditons tout de même cette phrase d'un de nos confrères belges sur la disparition programmée de la géométrie dans nos programmes :

« *Il existe actuellement dans notre société un paradoxe important entre le souhait de former tout citoyen pour qu'il comprenne les réalités du monde qui l'entourent, et d'autre part, le refus de la société à inclure dans l'enseignement obligatoire les outils géométriques nécessaires à la compréhension de ces réalités scientifiques et technologiques*."

Michel DEMAL, chef de travaux en maths à la HEH. (Haute École en Hainaut)

À la suite de la publication du premier article dans le petit vert de l'APMEP Lorraine, j'ai reçu par l'intermédiaire d'un collègue, une photo d'un objet réalisé il y a quelques années par un enseignant de mathématiques de l'ESPE de Nancy, Walter Nurdin, (qui recommandait également à ses étudiants le livre de G. Huvent). Il avait donné comme travail la démonstration de ce sangaku à ses futurs professeurs des écoles, et y avait associé un petit jeu de piste dans le parc du site de Maxéville où était accroché cet objet.
Je vous propose la photo de son œuvre originale !