Énigmes carolingiennes

Pierre Legrand[(*)]

Un article récent du Bulletin[(1)] évoquait le premier recueil connu de récréations mathématiques, le livre 14 de l'*Anthologie grecque*. Il sera question ici d'un recueil presque aussi ancien, écrit cette fois en latin et non en grec, les *Propositiones ad acuendos juvenes* (Propositions pour stimuler l'esprit des jeunes gens[(2)]).

On ne saurait imaginer plus différents que ces deux textes. Ils témoignent de la coupure radicale entre l'Empire byzantin, héritier quelque peu décadent de la Grèce antique, et l'Empire de Charlemagne, où se reconstruisait peu à peu une civilisation qui se voulait romaine (Charlemagne alla à Rome en l'an 800 se faire sacrer empereur par le pape et porta le titre d'*Imperator Romanorum*).

Les problèmes de l'Anthologie sont rédigés en vers, avec un souci certain d'élégance littéraire. Ce sont de jolies devinettes faites pour le plaisir de l'esprit ; la réponse n'est jamais donnée et parfois la question posée n'est même pas explicitement formulée. Dans les *Propositiones* prime au contraire le souci pédagogique ; l'énoncé, donné sans fioritures, se termine par une question en forme de défi (*Dicat, qui potest* : Que celui qui le peut dise) suivie d'une solution.

Le domaine balayé par l'*Anthologie* se réduit à l'arithmétique élémentaire : calcul des fractions, problèmes du premier degré. Les *Propositiones* sont plus ambitieuses : à côté d'énoncés simplissimes, on trouve de la géométrie, de l'analyse diophantienne et quelques énigmes ardues où l'on peut voir une première approche de l'algorithmique et de l'optimisation.

Les *Propositiones ad acuendos juvenes*

L'auteur

Le manuscrit le plus ancien des *Propositiones* est de la fin du IX^{e} siècle, mais on s'accorde à estimer qu'elles furent écrites vers l'an 800 par le moine anglais Alcuin (735 ? - 804).

La vie de ce dernier mérite qu'en on dise deux mots. Directeur de l'école associée à la cathédrale d'York, il fut en 781 envoyé à Rome par son évêque pour faire confirmer l'élévation d'York au rang d'archevêché. En chemin il rencontra Charlemagne, qui n'était pas encore empereur, mais seulement roi des Francs et des Lombards. C'est pour une bonne part de cette rencontre que naquit ce qu'on appelle la *Renaissance carolingienne*.

(*) p.m.legrand@sfr.fr
(1) « Vingt problèmes antiques pour le collège », B.V. n° 510, pages 429 à 438.
(2) Toutes les traductions sont de l'auteur du présent article.

Alcuin devint l'ami du roi et fut à son côté l'élément moteur d'une ambitieuse politique culturelle : création, auprès des évêchés et des monastères, d'écoles largement ouvertes, réforme de l'enseignement (déjà…) pour y introduire systématiquement, en sus du *trivium* habituel (grammaire, rhétorique, dialectique), le *quadrivium* (arithmétique, géométrie, astronomie, musique). Il prit sa retraite en 796 (avant, donc, que Charlemagne ne fût sacré empereur) pour venir diriger l'abbaye de Saint Martin de Tours, où il entreprit de recueillir et de faire copier de nombreux manuscrits latins.

L'ouvrage

Les *Propositiones* sont un bref recueil (moins de vingt pages d'un livre actuel) de cinquante-trois problèmes. Pour chacun d'eux, Alcuin se contente de donner une solution. Il justifie souvent qu'elle convient, il en détaille si nécessaire la construction, mais jamais il ne cherche si elle est la seule et jamais il n'explique comment il y est arrivé.

Le niveau est très inégal : des exercices à la portée d'élèves de CM1 et d'autres qui peuvent donner du fil à retordre à de bons bacheliers scientifiques. Certaines de ces énigmes sont devenues des classiques abondamment copiés.

On ne parlera pas ici des exercices de géométrie (numéros 22 à 25 et 27 à 30). Ils montrent surtout, en effet, le piètre niveau de l'époque dans ce domaine : Alcuin utilise (n° 24) une formule fausse pour l'aire d'un triangle, prend 4 au lieu de π dans le calcul de l'aire d'un disque (n° 25), etc.

Un choix de problèmes

Sont présentés ci-après quinze problèmes, classés par genre et par ordre approximatif de difficulté. Pour la commodité de la lecture, les énoncés d'Alcuin sont parfois simplifiés ou précisés. Ses titres, qui commencent rituellement par « *Propositio de…* » ont été abrégés ; ainsi « *Propositio de duobus hominibus boves ducentibus* » (Proposition de deux hommes conduisant des bœufs) est devenu « Les bœufs ». Les solutions sont modernes, mais à l'occasion quelques indications sont données sur la solution originelle, qui d'ailleurs n'est pas une solution au sens où nous l'entendons maintenant mais, comme il a été dit plus haut, l'énoncé d'un résultat.

Les quatre opérations

Dans un certain nombre d'exercices (numéros 1, 9, 10, 21, 30, 31, 49), il suffit pour avoir la solution de faire une ou plusieurs multiplications ou divisions évidentes, ce qui peut paraître puéril. Mais il faut se rappeler que la numération décimale n'a fait une timide apparition dans l'Europe chrétienne que vers l'an mille ; elle n'y est devenue d'usage courant qu'à partir du XIIIe siècle. Avec les chiffres romains, le moindre calcul était un casse-tête. Essayez donc, pour voir, de multiplier XXIV par XLI…

49. Les charpentiers

Sept charpentiers ont chacun fait 7 roues. Que celui qui peut dise combien de chariots [à 4 roues] on pourra équiper.

Solution d'Alcuin : « *Duc septies VII fiunt XLVIIII, tot rotas fecerunt*[3]. *XII vero quater ducti XLVIII reddunt. Super XL et VIIII rotas XII carra sunt erecta et una superfuit rota.* » (7 fois 7 font 49, ce qui donne le nombre de roues. 4 fois 12 font 48. Avec 49 roues on monte 12 chariots et il reste une roue).

9. Les manteaux

J'ai une coupe de tissu de 100 coudées de long sur 80 de large. Je veux en faire des manteaux, sachant qu'il faut un coupon de 5 coudées de long sur 4 de large pour chaque manteau. Dis-moi, je te le demande, homme sage, combien je pourrai en faire.

Solution d'Alcuin : « En 400 il y a 5 fois 80 et 4 fois 100. Que l'on prenne 5 fois 80 ou 4 fois 100, on trouve toujours 400. C'est le nombre de manteaux. »

N.B. : Le nº 10 et le nº 21 sont calqués sur le même modèle. Seules les données numériques changent.

30. La basilique

Le toit plat d'une basilique [au sens de bâtiment rectangulaire] *a 240 pieds de long et 120 de large. On veut le recouvrir de briques*[4] *de 23 pouces* [le pied vaut 12 pouces] *de long sur 12 de large. Combien en faudra-t-il ?*

Solution : Deux méthodes sont possibles :

• Poser les briques de sorte que le sens de leur longueur soit celui de la basilique. Un rang de 120 briques suffit alors à couvrir la largeur ; en longueur il faut un nombre de rangs égal au plus petit entier supérieur à $(240 \times 12)/23$, soit 126 rangs. Au total, cela donne 126×120, soit 15120. C'est la solution d'Alcuin.

▪ Poser les briques de sorte que le sens de leur longueur soit celui de la largeur de la basilique. Pour couvrir la longueur, un rang de 240 briques suffit ; pour couvrir la largeur, il faut un nombre de rangs égal au plus petit entier supérieur à $(120 \times 12)/23$, soit 63 rangs. Au total, cela donne 240×63, soit 15120, seconde solution équivalente à la première.

N.B. 1 : L'énoncé néglige l'épaisseur des joints.

N.B. 2 : Si on prend 115 pieds pour largeur de la basilique, le reste des données étant inchangé, la solution d'Alcuin donne 126×115, soit 14490 briques, et l'autre 240×60, soit 14400 briques.

(3) On notera qu'Alcuin écrit VIIII et non IX pour 9.
(4) Il s'agit bien de briques (*laterculae*) et non de tuiles (*tegulae*).

1. L'escargot

Un escargot fut invité à dîner en un endroit distant d'une lieue. Mais en un jour il ne pouvait avancer que d'un pouce. Au bout de combien de temps est-il arrivé ?

La solution d'Alcuin : « En 1 lieue il y a 1500 pas, 7500 pieds, 90000 pouces. Autant de jours que de pouces, ce qui fait 246 ans et 210 jours. »

N.B.1 : La lieue de l'époque n'est pas notre lieue métrique de 4 km, mais fait 1500 pas. Le pas est un double pas, le passus romain d'environ 1,50 m, ce qui fait 5 pieds d'environ 30 cm. Le pied vaut 12 pouces.

N.B.2 : La solution d'Alcuin est inexacte : on a bien $90000 = 365 \times 246 + 210$ mais, dans le calendrier julien alors en vigueur, un intervalle de 246 ans contenait 61 années bissextiles. La bonne réponse est 246 ans et 149 jours $(210 - 61)$ … si toutefois l'escargot a vécu assez longtemps.

Remarque

Aux sept exercices d'arithmétique élémentaire il faut ajouter les numéros 13, 41 et 42. Les deux premiers sont des calculs de puissances de 2. Le dernier mérite qu'on en dise deux mots.

42. Les colombes

Une échelle a cent barreaux. Sur le premier est perchée une colombe, sur le second il y a deux colombes, sur le troisième trois colombes et ainsi de suite jusqu'au centième. Que celui qui le peut dise combien il y a de colombes en tout !

Alcuin regroupe 1 et 99, 2 et 98, … 49 et 51, ce qui donne 49×100. Reste à ajouter 50 et 100, et l'on a 5050. Mille ans avant l'exploit attribué à Gauss écolier et par une méthode proche de la sienne !

Équations du premier degré

Cette catégorie est particulièrement bien représentée : treize énoncés, soit les numéros 2, 3, 4, 7, 8, 16, 26, 36, 37, 40, 44, 45, 48 parmi lesquels trois problèmes de partage proportionnel (7, 8, 37). Sauf le n° 16, ce sont tous des problèmes à une seule inconnue, qui ressemblent beaucoup (en plus simple) à ceux de l'*Anthologie grecque*. Pour cette raison, on n'en trouvera ici que quatre.

7. Le disque

Un disque pesant 30 livres est composé d'or, d'argent, de laiton et d'étain. Il y a 3 fois plus d'argent que d'or, 3 fois plus de laiton que d'argent et 3 fois plus d'étain que de laiton. Que celui qui peut dise combien il y a de chaque métal.

Solution : Si x est le poids d'or, les poids respectifs de chaque métal sont x, $3x$, $9x$, $27x$. Le poids total est donc $40x$, ce qui donne $x = \frac{3}{4}$. En considérant qu'une livre vaut 12 onces, on obtient respectivement 9 onces, 2 livres 3 onces, 6 livres 9 onces, 20 livres 3 onces, ce que donne Alcuin.

36. Une vie

« Puisses-tu, mon garçon, vivre encore trois fois autant de temps que tu as déjà vécu, puis encore le double de ce total, et encore une année. Ainsi tu atteindras 100 ans. ». Quel est l'âge du garçon ?

Solution : Soit x son âge en années. On a $x + 3x + 2 \times 4\,x + 1 = 100$, soit $12x = 99$. L'enfant a 8 ans 3 mois.

48. Les écoliers

Un homme rencontre des écoliers et leur demande : « Combien êtes-vous dans cette école ? » Un d'eux répond : « Je ne te le dirai pas. Mais compte-nous, double ce nombre, puis triple le résultat, prends-en le quart et ajoute-moi ; ainsi tu auras 100. » Combien d'enfants l'homme a-t-il rencontrés ?

Solution : Soit x leur nombre. On a $\dfrac{3\times 2x}{4}+1=100$, c'est-à-dire $x = 66$.

16. Les bœufs

Deux hommes conduisaient des bœufs sur la route. L'un dit à l'autre : « Donne-moi deux de tes bœufs et j'en aurai autant que toi. » L'autre répondit : « Donne-moi deux des tiens et j'en aurai deux fois plus que toi. » Combien de bœufs avait chacun ?

Solution : Soit x et y le nombre de bœufs de chacun. On a : $\begin{cases} x+2=y-2 \\ 2(x-2)=y+2 \end{cases}$, dont on tire $\begin{cases} x=10 \\ y=14 \end{cases}$. À noter qu'Alcuin donne la solution fausse $\begin{cases} x=4 \\ y=8 \end{cases}$.

Systèmes linéaires diophantiens

Sept énoncés (numéros 5, 32, 33, 34, 38, 39, 47) mènent à des systèmes de deux équations linéaires à trois inconnues. Mais un jeu d'inégalités, dû au fait que coefficients et inconnues sont entiers et que les inconnues sont strictement positives, limite le nombre de solutions. Ces exercices sont nettement plus amusants et plus difficiles que les précédents. En voici trois.

5. Les cochons

Un acquéreur dit : « Je veux acheter 100 porcs pour 100 deniers. Un verrat coûte 10 deniers, une truie 5 deniers et on a 2 porcelets pour 1 denier. » Comment a-t-il fait ?

Solution : Soit x, y, $2z$ les nombres respectifs de verrats, truies et porcelets achetés. On a : $\begin{cases} 10x+5y+z=100 \\ x+y+2z=100 \end{cases}$. On en tire $z = 9x + 4y$. En reportant dans l'une ou l'autre des deux équations précédentes, on trouve $19\,x + 9y = 100$. On a donc $0 < x \leq 5$; mais $100 - 19x$ doit être divisible par 9, donc aussi $x - 1$. La seule valeur qui convienne est donc $x = 1$, d'où $y = 9$. Finalement il a acheté 1 verrat, 9 truies et 90 porcelets.

38. La foire au bétail

Un homme veut acheter pour cent sous(5) *cent animaux de différentes espèces. Un cheval coûte trois sous, un bœuf un sou et vingt-quatre brebis un sou. Que celui qui le peut dise combien il aura de chevaux, de bœufs et de brebis !*

Solution : Le nombre de brebis sera forcément multiple de 24, car la somme à payer pour un groupe de bœufs et de chevaux est entière, donc aussi la somme à payer pour les brebis. Soit alors x le nombre de chevaux, y celui de bœufs, $24z$ celui de brebis. On a le système $\begin{cases} x + y + 24z = 100 \\ 3x + y + z = 100 \end{cases}$ où les inconnues sont des entiers naturels. En soustrayant membre à membre, il vient $2x = 23z$, ce qui prouve que z est pair. De $24z \leq 100$ on déduit que z ne peut valoir que 0, 2 ou 4. Mais $z = 4$ donnerait $x = 46$, donc y serait négatif.
Si on écarte la solution qui consiste à prendre 100 bœufs pour 100 sous (l'énoncé parle de *différentes* espèces), il reste $z = 2$, qui donne 23 chevaux, 29 bœufs et 48 brebis.

La solution d'Alcuin : « Trois fois 23 font 69. Et deux fois 24 font 48. On a donc 23 chevaux pour 69 sous, 48 moutons pour 2 sous et 29 bœufs pour 29 sous. On additionne 23, 48 et 29, ce qui donne 100 animaux. On additionne ensuite 69, 2 et 29, ce qui donne 100 sous. On a bien eu ainsi 100 animaux pour 100 sous. »

47. Les miches de l'évêque

Un évêque commande douze miches de pain pour son clergé. Il ordonne que chaque prêtre reçoive deux pains, chaque diacre un demi-pain et chaque lecteur(6) *un quart de pain, de telle sorte qu'il y ait autant de pains que d'individus. Que celui qui le veut dise combien il y a de prêtres, de diacres et de lecteurs !*

Solution : Soit x le nombre des prêtres, y celui des diacres, z celui des lecteurs. On a le système $\begin{cases} x + y + z = 12 \\ 2x + \frac{1}{2}y + \frac{1}{4}z = 12 \end{cases}$. En éliminant x, il vient $6y + 7z = 48$ ou mieux $7z = 6(8 - y)$, ce qui prouve que z est multiple de 6. Posons $z = 6u$; on a $y + 7u = 8$. Donc u ne peut valoir que 0 ou 1. Mais l'énoncé implique qu'il y a au moins un lecteur. Il en résulte $u = 1$, puis $z = 6$, $y = 1$, $x = 5$.

(5) Le *sou* en question est un sou d'or, ou *solidus*. Rien à voir avec le sens actuel du mot.
(6) Le mot *lecteur* désigne ici un grade ecclésiastique inférieur à celui de diacre.

Neuf inconnues et pourtant c'est simple !

Ce problème est un des plus remarquables d'Alcuin. Il a été régulièrement repris avec des variantes jusqu'à nos jours (les vases d'huile étant le plus souvent remplacés par des tonneaux de vin) et débouche sur d'inattendues considérations géométriques.

12. Les trente vases

Un père en mourant laisse en héritage à ses trois fils trente vases de verre, dont dix pleins d'huile, dix remplis d'huile à moitié et dix vides. Que celui qui le peut fasse le partage de sorte que chacun des fils ait une quantité égale de vases et d'huile !

Solution : Prenons carrément le cas général : on a 3N récipients, dont N pleins, N emplis à moitié, N vides, qu'on veut répartir équitablement (quant aux contenants et aux contenus) entre trois frères.

1) *La part de chacun* : Considérons d'abord un frère F et (x,y,z) sa part : x récipients pleins, y récipients à moitié pleins, z récipients vides. Pour qu'il soit équitablement traité, il faut et il suffit qu'il ait N récipients et le contenu de N/2 récipients, soit $\begin{cases} x+y+z=\mathrm{N} \\ 2x+y=\mathrm{N} \end{cases}$, ou encore $\begin{cases} z=x \\ y=\mathrm{N}-2x \end{cases}$. Il doit donc avoir la répartition $(x,\mathrm{N}-2x,x)$ avec $0 \le x \le \mathrm{N}/2$.

2) *La répartition des parts* : Considérons maintenant les trois frères F, F′, F″. Leurs trois parts sont :

$$(x,\mathrm{N}-2x,x),\ (x',\mathrm{N}-2x',x'),\ (x'',\mathrm{N}-2x'',x'')$$

avec $0 \le x \le \mathrm{N}/2$, $0 \le x' \le \mathrm{N}/2$, $0 \le x'' \le \mathrm{N}/2$.

Dire qu'ils se partagent les N récipients pleins revient à $x + x' + x'' = \mathrm{N}$, ce qui assure aussi qu'ils se partagent les N récipients vides. Ils se partagent les N récipients emplis à moitié si et seulement si l'on a $(\mathrm{N} - 2x) + (\mathrm{N} - 2x') + (\mathrm{N} - 2x'') = \mathrm{N}$, soit à nouveau $x + x' + x'' = \mathrm{N}$.

Les conditions sur x, x', x'' sont donc

$$\boxed{\begin{array}{c} x+x'+x''=\mathrm{N} \\ 0\le x\le \mathrm{N}/2,\ 0\le x'\le \mathrm{N}/2,\ 0\le x''\le \mathrm{N}/2 \end{array}} \qquad \text{(C)}$$

Interprétation géométrique :

Les relations $\begin{cases} x+x'+x''=\mathrm{N} \\ 0\le x\le \mathrm{N}/2 \end{cases}$ équivalent à $\begin{cases} x+x'+x''=\mathrm{N} \\ 0\le x\le x'+x'' \end{cases}$. Les conditions (C) signifient donc que les entiers naturels x, x', x'' sont les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre N, à condition d'admettre les triangles aplatis et les triangles ayant deux sommets confondus.

Le décompte des solutions : Si l'on ne considère pas comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par une permutation des frères, le nombre de solutions

pour N donné est donc aussi le nombre u_N de triangles de périmètre N à côtés de longueur entière[7] (en ne distinguant pas deux triangles isométriques).
Il est intéressant d'observer que u_N est évidemment aussi le nombre de solutions du système diophantien

$$\begin{cases} x + x' + x'' = N \\ 0 \le x \le x' \le x'' \le N/2 \end{cases}, \qquad \text{(D)}$$

ce qui permet un calcul aisé de u_N pour les premières valeurs de N. Le tableau ci-dessous montre que les cas les plus agréables à traiter avec une classe sont ceux où N vaut 4, 5 ou 7.

N	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_N	2	1	3	2	4	3	5	4	7	5	8	7

Les cinq solutions du cas N = 10 (la première est la seule donnée par Alcuin) sont représentées par les cinq matrices ci-dessous, dont les lignes correspondent aux fils et les colonnes aux types de récipients (plein, empli à moitié, vide) :

$$\begin{pmatrix} 0 & 10 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 8 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 6 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

Les deux matrices ci-après[8] sont les solutions pour N = 7 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Les algorithmes de traversée

Alcuin en donne quatre exemples (numéros 17, 18, 19 et 52). L'intérêt d'en traiter un avec des lycéens est de leur montrer qu'un algorithme n'est pas seulement un moyen de mécaniser un long calcul, mais aussi plus généralement la description étape par étape d'une procédure. Sont donnés ici les deux plus célèbres, qui ont été repris tant de fois qu'on hésite un peu à les mentionner.

18. Le loup, la chèvre et le chou

PROPOSITION DE L'HOMME, DE LA CHÈVRE ET DU LOUP
Un homme devait faire traverser un fleuve à un loup, une chèvre et un paquet de choux. Il ne put pas trouver de bateau qui puisse en transporter deux à la fois [avec lui]. Mais il avait ordre de les faire passer tous, intacts, de l'autre côté. Que celui qui le peut dise comment il a pu le faire !

(7) Pour cette raison, la suite des u_N est souvent appelée suite d'Alcuin.
(8) La valeur N = 7 a été utilisée notamment par Tartaglia, puis par Bachet, qui traite aussi le cas N = 9.

Solution : La marche à suivre est pratiquement imposée, étant entendu que l'on exclut les traversées qui ramènent à un état antérieur.

Le tableau ci-contre donne une des solutions: H désigne l'homme, L le loup, P le paquet de choux, C la chèvre. La première ligne donne l'état initial ; aux suivantes, les deux colonnes extrêmes donnent le résultat ***après*** la traversée et la colonne centrale le sens et les passagers de cette traversée.

	Rive 1	fleuve	Rive 2
État initial	H L C P		vide
Aller 1	L P	H C →	H C
Retour 1	H L P	← H	C
Aller 2*	P	H L →	H L C
Retour 2*	H C P	← H C	L
Aller 3*	C	H P →	H L P
Retour 3	H C	← H	L P
Aller 4	vide	H C →	H L C P

On n'a que deux solutions, déduites l'une de l'autre par échange du loup et du paquet de choux, qui jouent des rôles symétriques : chacun d'eux peut rester seul avec l'autre, mais pas avec la chèvre. La solution non représentée s'obtient en permutant dans les lignes marquées d'un astérisque les symboles L et P.

17. Frères et sœurs

Il y avait trois frères [ils ne sont pas frères entre eux] *ayant chacun une sœur, qui devaient traverser un fleuve (et chacun désirait*(9) *les sœurs des autres). En arrivant au fleuve, ils ne trouvèrent qu'un petit bateau qui ne pouvait pas faire traverser plus de deux personnes à la fois. Que celui qui le peut dise comment tous ont pu traverser sans qu'aucune des sœurs ne soit déshonorée*(10) *!*

Commentaire : Ce problème, plus difficile que le précédent, a été repris par Bachet, puis par bien d'autres, sous le nom de « Trois maris jaloux(11) ». La règle du jeu est qu'aucune des femmes ne doit se trouver sans son frère en présence d'un autre homme. La résolution par tâtonnements est grandement facilitée si l'on matérialise les personnages par des cartes à jouer : trois rois et trois reines de couleurs assorties.

Solution : Chacun des tableaux ci-dessous donne, avec les mêmes conventions que pour « Le loup, la chèvre et le chou », le schéma d'une solution ; A, B, C désignent les trois hommes, a, b, c leurs sœurs.

---

(9) *Concupiscientia* dans le texte.
(10) *Maculata* dans le texte.
(11) Un sociologue pourrait gloser sur le changement de moeurs qu'implique ce passage des frères aux maris.

	Tableau G	Rive 1	fleuve	Rive 2
	État initial	ABCabc		vide
Phase I	Aller 1*	ABCc	ab →	ab
	Retour 1*	ABCbc	← b	a
	Aller 2	*ABC*	*bc →*	*abc*
Phase II	Retour 2	ABCc	← c	ab
	Aller 3	Cc	AB →	ABab
	Retour 3	ACac	← Aa	Bb
	Aller 4	ac	AC →	ABCb
	Retour 4	*abc*	*← b*	*ABC*
Phase III	Aller 5	a	bc →	ABCbc
	Retour 5*	Aa	← A	BCbc
	*Aller 6**	*vide*	*Aa →*	*ABCabc*

Tableau D	Rive 1	fleuve	Rive 2
État initial	ABCabc		vide
Aller 1*	BCbc	Aa →	Aa
Retour 1*	ABCbc	← A	a
Aller 2	*ABC*	*bc →*	*abc*
Retour 2	ABCc	← c	ab
Aller 3	Cc	AB →	ABab
Retour 3	ACac	← Aa	Bb
Aller 4	ac	AC →	ABCb
Retour 4	*abc*	*← b*	*ABC*
Aller 5	a	bc →	ABCbc
Retour 5*	ab	← b	ABCc
*Aller 6**	*vide*	*ab→*	*ABCabc*

Discussion

▪ ***Phase I*** : Au premier aller, si une seule personne traversait, elle serait obligée de revenir et on serait ramené à l'état initial ; donc deux personnes traversent, qui ne peuvent être que deux femmes (tableau G) ou un couple frère-sœur (tableau D), disons ab ou Aa. Mais dans le second cas c'est A qui doit revenir et on retrouve à l'arrivée du second aller *la même situation dans les deux tableaux*, situation qui de plus fait jouer un rôle symétrique aux trois couples : *tous les hommes sur la rive 1, toutes les femmes sur la rive 2*.

▪ ***Phase II*** : Ensuite, étant entendu que l'on exclut les traversées qui ramènent à un état antérieur, le jeu est à carte forcée (aux permutations près des trois couples). À l'issue du retour 4, situation symétrique pour les couples : *toutes les femmes sur la rive 1, tous les hommes sur la rive 2*.

▪ ***Phase III*** : Supposons qu'à l'aller 5 une seule femme traverse, mettons c ; ce sont forcément A et B qui doivent ensuite revenir sur la rive 1 où on trouve donc ABab ; à l'aller suivant, un couple, mettons Bb, doit traverser ; à l'arrivée on a la situation suivante : Cc sur la rive 1, ABab sur la rive 2, situation bloquée. À l'aller 5, ce sont donc deux femmes qui doivent quitter la rive 1, mettons b et c. Au cinquième retour, on a le choix entre faire revenir A (tableau G) ou une des deux femmes b et c, mettons b, (tableau D). Le dernier aller en résulte.

Finalement : la phase II est commune aux deux tableaux, les phases I et III ont mêmes points de départ et d'arrivée dans G que dans D, mais sont différentes. On a donc trouvé quatre solutions (2×2) aux permutations entre couples près.

Remarque

On peut se demander combien de solutions cela donne en tout si l'on considère comme distinctes deux solutions qui ne diffèrent que par une permutation sur les couples. À première vue, on pourrait croire la réponse évidente : 4 solutions aux permutations près, 6 permutations, donc 24 en tout. En fait la situation n'est pas si simple, car il faut considérer les trois phases indépendamment les unes des autres. Le calcul est laissé aux bons soins du lecteur (résultat : $9 \times 6 \times 9 = 486$).

52. Le problème du chameau

Moins célèbre que les deux précédents, ce problème est sans doute, de tous les énoncés d'Alcuin, le plus instructif et le plus en avance sur son temps. Il a fait l'objet d'un article de Philippe Langlois dans le Bulletin numéro 511, intitulé « Les trois voyages du chameau ».

Références

- http://www.recreomath.qc.ca/art_alcuin.htm
  donne la traduction des cinquante-trois *Propositions* avec les solutions d'Alcuin.
- http://la.wikisource.org/wiki/Propositiones_ad_acuendos_iuuenes
  donne le texte latin originel.