Une activité de résolution de problèmes en quatrième

Angelo Laplace(*) & Guillaume Chilini(**)

Introduction à l'article (par le comité de rédaction du Bulletin)

La publication d'un article relatant une expérimentation en classe se heurte à une double difficulté :

– l'expérimentation ayant eu lieu, il n'est pas possible de la modifier (si on ne veut pas mettre à mal le principe d'honnêteté) ;
– le comité de rédaction qui l'examine *a priori*, imagine mille suggestions pour l'améliorer, en modifier l'ordre, contester la place et l'importance des technologies (a-t-on vraiment besoin d'un tableur dans ce genre d'exercices ?). La richesse des débats en son sein montre que plusieurs autres articles équivalents auraient pu être proposés par des auteurs qui auraient privilégié d'autres pistes de travail.

Certes, mais les collègues qui s'exposent en proposant leur texte, ont travaillé avec des élèves dont ils connaissent les capacités réelles, dont ils mesurent les forces et les lacunes, et qu'ils aimeraient mener vers de nouvelles connaissances. La progression qu'ils proposent, les outils qu'ils intègrent à la démarche, la formulation qu'ils choisissent tiennent compte de ces données impalpables, qu'il est bien difficile de traduire dans l'article. Dans un autre contexte, la place du tableur aurait été réduite, les questions moins détaillées, les problèmes plus franchement ouverts.

Après de longs et riches débats au sein du comité de rédaction du BV, l'article a été publié avec de simples retouches de forme, et le souhait que cette expérimentation en suscite d'autres pour étoffer la rubrique « Dans nos classes », si difficile à nourrir...
Que des collègues s'en inspirent, s'en emparent, la modifient, la récrivent pour d'autres contextes, puis en fassent le bilan dans de nouveaux articles, créant ainsi une dynamique créative.

Ce serait, pour les auteurs de l'article, la meilleure reconnaissance de leur travail.

Dans cet article, nous allons présenter une séquence de travail réalisée dans nos classes de quatrième et intitulée « résolution de problèmes ». Celle-ci s'étale sur une durée d'environ 10 h de cours. Les énoncés d'exercices que nous avons proposés aux

(*) Enseignant certifié de mathématiques au collège Emile Roux du Cannet (06). Membre du comité de rédaction de la revue MathémaTICE. laplace.math@laposte.net
(**) Enseignant certifié de mathématiques au collège Emile Roux du Cannet (06). Guillaume.chilini@gmail.com

élèves ne sont pas forcément originaux même s'ils ont été particulièrement travaillés. En fait, la richesse de notre travail vient surtout de notre démarche qui met de côté l'enseignement par chapitres et place **la démarche d'investigation au cœur de notre pédagogie**. Suivre une telle démarche, c'est permettre aux élèves d'émettre des hypothèses, de les formuler, de les tester, de les valider ou de les rejeter. C'est donc être particulièrement attentif aux instructions officielles, notamment au décret relatif au socle commun du 11/7/2006. Si cette séquence joue un rôle central dans notre progression annuelle, c'est précisément parce qu'elle donne aux élèves de nouvelles méthodes pour continuer l'investigation dans d'autres cadres (notamment algébriques). En un sens, la trajectoire que nous suivons, c'est celle qui cherche **« à apprendre à chercher »** ! Celle-ci s'appuie sur des outils mathématiques variés et sur les TICE mais sans jamais porter de jugement de valeur quant à l'efficience des méthodes les unes par rapport aux autres. Nous considérons que le fait de trouver et de savoir communiquer les grandes lignes d'une démarche est suffisant.

Nos deux premiers problèmes sont basés sur des propriétés géométriques de niveau inférieur à la quatrième pour permettre à tous les élèves de s'impliquer dans une démarche d'investigation active. Il semble en effet illusoire de proposer un problème de recherche à niveau N qui utilise exclusivement des concepts de niveau N. Il est donc nécessaire de faire reposer les fondements de l'activité sur des notions de niveau N–1 ou N–2. Ceci est d'autant plus vrai lorsque l'objectif de la situation-problème est de découvrir un nouveau formalisme ou une nouvelle propriété. Dès lors que les objectifs de présentation de l'usage du tableur et des équations du premier degré (ce que permet le troisième problème) sont atteints, nous présentons divers problèmes de consolidation des stratégies engagées sans privilégier une méthode particulière. Nous partons en effet du principe qu'à ce stade de la scolarité (socle commun), plusieurs stratégies de résolution peuvent coexister dans la classe. Par exemple :

- Stratégie essai-erreur à l'aide d'un papier et d'une calculatrice ;
- Stratégie tableur qui automatise les calculs mais qu'il convient de programmer correctement ;
- Stratégie par résolution d'une équation du premier degré.

1. Le problème des 3 angles du triangle

Enoncé :
On souhaite construire un triangle ABC tel que

- La mesure de l'angle $\widehat{ABC}$ mesure le double de la mesure de l'angle $\widehat{BCA}$;
- La mesure de l'angle $\widehat{BCA}$ mesure 14° de plus que la mesure de l'angle $\widehat{BAC}$.

Déterminer la mesure des trois angles de ce triangle. Justifier la réponse.

Ce problème présente l'avantage d'avoir un énoncé facile à s'approprier avec une figure à main levée. Nous avons pris soin de choisir les valeurs numériques de manière à ce qu'une solution ne soit pas particulièrement évidente à trouver. Le fait que les deux autres mesures d'angles puissent s'exprimer en fonction de celle de $\widehat{BCA}$ permet également de rendre la recherche plus consistante et cela induit donc une stratégie par tâtonnement. Un auto-contrôle est encouragé lorsque les groupes commencent à proposer leur résultat. Il suffit de demander aux élèves de tracer à l'aide d'un rapporteur le triangle et de pratiquer le contrôle des mesures d'angles. Les élèves qui ont oublié de tenir compte de la condition implicite de la somme des angles s'aperçoivent alors de leur erreur et peuvent repartir dans une nouvelle démarche.

En fin d'activité, l'accent est mis sur le **protocole de résolution par essai-erreur**. Nous pouvons montrer que lors de leurs tests, les élèves formulent une **hypothèse** lorsqu'ils choisissent par exemple $\widehat{BCA} = 40°$. Ils doivent ensuite **valider ou invalider cette hypothèse** de travail en **testant l'égalité** $\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \widehat{BAC} = 180°$ connue depuis la cinquième. Nous sommes pleinement dans une **démarche d'investigation**.

L'enseignant présente alors une démarche d'investigation assistée du **tableur**. Celui-ci permet de saisir un grand nombre d'hypothèses quant à la valeur de $\widehat{BCA}$ dans la colonne A. La saisie des bonnes formules (objectif du programme) permet d'obtenir la mesure des deux autres angles et bien sûr de calculer la somme des trois mesures. **L'échange argumenté entre pairs permet une structuration des connaissances** dans le cahier de leçons.

La **stratégie essai-erreur** n'est pas modifiée par l'apport de l'outil numérique, elle est simplement automatisée et accélérée. Les notions mathématiques ne sont pas travesties et cela permet même d'en acquérir de nouvelles concernant le programme de niveau N.

2. Le problème du périmètre du quadrilatère

Enoncé :

ABCD est un quadrilatère tel que :

- la longueur BC est le quadruple de la longueur AB ;
- la longueur CD est égale à la longueur AB ;
- la longueur DA est supérieure de 15 cm à la longueur BC ;
- le périmètre du quadrilatère ABCD est 437 cm.

Quelle est la longueur de chacun des côtés du quadrilatère ABCD ?

Le deuxième problème utilise la notion de périmètre et il est donc très similaire au précédent puisque le **contrôle du résultat** s'effectue de nouveau grâce à une somme. Démarche et choix des variables appellent les mêmes commentaires que ci-dessus. Ce travail est proposé pour que les élèves **mobilisent leurs nouvelles capacités** vis-à-vis du tableur. La séance de travail commence par la rédaction d'un plan de travail sur papier. On y demande de réfléchir aux titres des colonnes, au contenu numérique de la colonne A et à l'établissement des formules nécessaires dans les cellules qu'il convient de programmer.

Lorsque ce plan est prêt, les élèves utilisent un ordinateur afin de résoudre explicitement le problème posé. Ils nous remettent leur plan de travail, une copie d'écran et une conclusion manuscrite à l'exercice.

3. Le problème du match de rugby

Enoncé :

Au rugby, un essai transformé rapporte 7 points, un essai non-transformé 5 points et une pénalité ou un drop vaut 3 points.
Le 4/6/1995, la Nouvelle-Zélande a rencontré le Japon. La Nouvelle-Zélande a marqué 8 essais transformés, 13 essais non transformés et des pénalités. La Nouvelle-Zélande a marqué 145 points lors de ce match.

Combien de pénalités a-t-elle réussies ?

Le troisième problème est utilisé pour introduire en douceur les techniques de résolution d'une équation du premier degré. Son énoncé est volontairement simple pour que tous les élèves puissent se l'approprier rapidement et se lancer dans une **procédure personnelle de résolution**. L'enseignant reprend les productions calculatoires et doit reformuler en adoptant le formalisme de l'équation. Nous le présentons ainsi, en s'appuyant sur les structures algébriques et le principe des opérations « symétriques » :

$$8 \times 7 + 13 \times 5 + 3x = 145$$
$$121 + 3x = 145$$
$$121 + 3x - 121 = 145 - 121$$
$$3x = 24$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{24}{3}$$
$$x = 8$$

Le bilan du professeur s'attache à montrer que pour résoudre un problème une quantité inconnue jouera le rôle de variable et sera notée x. Ensuite, le procédé de manipulation des équations obtenues est donc basé sur la règle :
« Une égalité vraie est préservée lorsqu'on effectue les mêmes opérations simultanément dans les deux membres. »

L'intérêt de la notion d'équation n'est pas évident *a priori* sur un problème aussi simple, il appartient à l'enseignant de prouver que cette technique est transposable à un grand nombre de situations dont certaines qui résisteraient à des techniques artisanales. D'autre part, le gain de temps par rapport à une stratégie essai-erreur est mis en évidence.

Nous considérons alors que les élèves peuvent faire leur choix quant à la méthode employée pour s'engager dans la résolution de problèmes par la suite (la notion de résolution d'une équation reste d'ailleurs hors-socle). Néanmoins, nous proposons alors à tout le monde de raffermir la manipulation des équations grâce au logiciel **Thot** qui est installé sur les ordinateurs de notre réseau informatique. Celui-ci permet de s'affranchir des difficultés liées au calcul, pour se concentrer sur les stratégies d'élimination des termes gênants dans la résolution. En deux séances, la plupart des élèves deviennent performants aussi bien sur machine qu'à l'écrit pour des équations du type $ax + b = cx + d$.

La fin de la séquence de travail propose divers problèmes (nous ne présentons que leurs spécificités). Les élèves peuvent les gérer à leur rythme en groupes ou individuellement. Deux **pôles de travail** ont été mis en place afin de procéder à une **véritable différenciation pédagogique** dans la classe :

- certains choisissent de travailler avec un PC pour développer leurs **investigations à l'aide du tableur ou de Thot** (Le logiciel gratuit THOT est un programme de calcul littéral traitant des équations du premier degré à une inconnue. Il peut être téléchargé à l'adresse http://www.emmanuelmorand.net/thot/presentation.php).
- d'autres choisissent les tables de travail classiques où ils tentent de **mettre les problèmes proposés en équation avant de les résoudre à la main**.

4. Le problème des températures

Enoncé :

En France, on mesure la température en degrés Celsius et aux Etats-Unis en degrés Fahrenheit. La température F en degrés Fahrenheit peut être calculée quand on connaît la température C en degrés Celsius à l'aide de la formule suivante :

$$F = 1{,}8 \times C + 32$$

Je suis invité à New-York pour recevoir le prix « du professeur de maths de l'année ». Avant de faire ma valise, j'ai vu sur une chaîne de télévision américaine qu'une température de 77 degrés Fahrenheit est prévue à New-York.

Une seule question : short ou doudoune ? Justifier.

Si nous traitons ce problème très classique, c'est d'abord parce que nous croyons au bien-fondé d'étudier les mathématiques à travers les **grandeurs**. Cet énoncé enrichit la culture des élèves et permet de travailler la **prise d'informations**. La méthode de l'équation semble la plus adéquate pour ce type d'exercices puisque la « mise en équation » est ici évidente lorsqu'on remplace F par 77. Pourtant beaucoup d'élèves s'engagent dans d'autres voies, certains allant même jusqu'à dire qu'on ne peut pas faire une équation parce qu'il n'y a pas de x. La stratégie par essai-erreur, même menée à la calculatrice, est très efficace ce qui va renforcer la confiance des élèves habituellement en difficulté.

5. Le problème du halfpipe

Enoncé : (Extrait)

Lors des compétitions de halfpipe, les concurrents doivent effectuer deux manches appelées « run » où ils exécutent des figures. Lors des J.O de Sotchi, ils sont notés par cinq juges. Chaque juge donne une note allant de 1 à 100 points maximum. Pour établir le score du run, on calcule la moyenne des notes données par les juges.

1) Voici les notes des cinq juges lors du premier run du français Kévin Rolland.

A l'aide du tableur, calculer le score obtenu par ce compétiteur.

2) Lors du deuxième run de la finale, le canadien Mike Riddle, seulement 6ème du premier run, a obtenu un score de 90,6 et a soufflé la médaille d'argent à Kévin Rolland.
Voici les notes attribuées par 4 des juges : 91 ; 90 ; 91 ; 91

Suite à un problème informatique, la note du juge suédois Simon Tjernstroem n'a pas été communiquée. Quelle est cette note ?

Ce problème est un autre classique : il s'agit de déterminer la note manquante pour obtenir une moyenne prédéterminée. Néanmoins, nous y sommes particulièrement attachés car il permet un réinvestissement de la notion de moyenne arithmétique (vue en amont), tout en **l'implémentant dans une feuille de calcul**. Quant à la deuxième question, elle ouvre en effet une **différenciation effective des méthodes dans la classe** : certains complètent leur feuille de calcul de la question 1) pour trouver la note manquante par tâtonnement jusqu'à voir la moyenne s'établir à 90,6 tandis que d'autres tentent de résoudre l'équation $\frac{363+x}{5}=90{,}6$. Ici, la « mise en équation » du problème n'est pas évidente mais elle s'appuie sur la compréhension de la notion de moyenne arithmétique, bien connue des élèves.

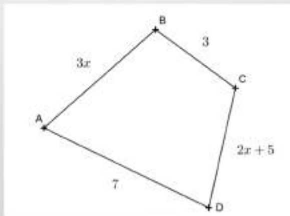
Ce problème basé sur l'actualité récente permet de stimuler les élèves grâce à son côté « réel » et au défi qu'il engendre. Il s'agit véritablement d'un exercice où la

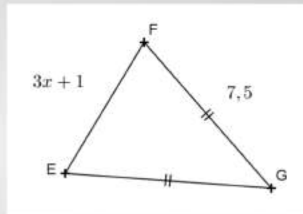
démarche d'investigation est mise en valeur et différenciée.

6. Le problème de l'égalité de deux périmètres

Enoncé :

L'unité de mesure utilisée est le centimètre.





Trouver la valeur de x pour que ces deux polygones aient le même périmètre. Justifier.

Pour cet exercice, nous envisageons pour la première fois, **dans un problème**, une équation de la forme $ax + b = cx + d$, c'est-à-dire avec des termes en x dans les deux membres. La difficulté progressive est réfléchie. Il est aussi important de faire comprendre en fin de travail que la solution numérique trouvée doit encore engendrer une réalité géométrique : longueurs toutes positives mais aussi quadrilatère et triangle constructibles. Ce sera donc l'occasion de **réinvestir** une propriété de cinquième mais aussi d'avoir un regard critique sur les solutions issues du calcul. Une phase de **vérification** est aussi conseillée.

7. Le problème des deux calculatrices (Extrait du vade-mecum du socle commun)

Enoncé :

Emma et Zoé ont chacune une calculatrice. Elles ont « tapé » le même nombre.
Ensuite, Emma a appuyé sur les touches :

$\boxed{\times}$ $\boxed{2}$ $\boxed{+}$ $\boxed{3}$ $\boxed{=}$

et, Zoé a appuyé sur les touches :

$\boxed{-}$ $\boxed{2}$ $\boxed{=}$ $\boxed{\times}$ $\boxed{4}$ $\boxed{+}$ $\boxed{8}$ $\boxed{=}$

Surprise ! Elles obtiennent le même résultat ! Quel nombre ont-elles bien pu choisir ?

Pour cet exercice, calculatrice et tableur sont souvent plus efficaces que la mise en équation car l'utilisation des parenthèses voire de la simple distributivité rendent celle-ci délicate.

8. Le problème des comètes (issu des énigmes proposées lors de la semaine des mathématiques 2014)

Enoncé :
Nous sommes en 2014. Dans le ciel :

- Une comète C_1 est apparue il y a 1 an ; elle n'apparait que tous les 6 ans.
- Une comète C_2 est apparue il y a 7 ans ; elle n'apparait que tous les 9 ans.
- Une comète C_3 est apparue il y a 12 ans ; elle n'apparait que tous les 19 ans.

En quelle année nos descendants verront-ils les trois comètes C_1, C_2 et C_3 la même année dans le ciel ?

Nous avons achevé ce parcours avec un problème qui ne peut pas se mettre en équation avec des outils de niveau collège. Ici, seule l'utilisation d'une stratégie basée sur l'écriture des nombres de 6 en 6 à partir de 2013 etc. permet d'aboutir. L'avantage, c'est que celle-ci s'implémente très bien dans un tableur.

Conclusion

La trajectoire de travail que nous envisageons dans cet article prévoit une **gradation** régulière qui permet aux élèves de **s'approprier la résolution de problèmes par des techniques efficaces**. Que ce soit à l'aide d'un tableur ou d'une équation, nos élèves ont résolu un grand nombre de ces questions. L'histoire ne s'arrête pas là. Après avoir appris « à apprendre à chercher », nous devons consolider leurs acquis par un retour régulier sur d'autres énigmes, d'autres problèmes, d'autres situations qui appellent de nouvelles investigations. Notre **progression spiralée** nous y conduit naturellement.