II. Unification des définitions et des notations

(Suite)

Cinématique (1)

La *Mécanique*, dans ses deux parties, *Statique* et *Dynamique*, est l'étude des conditions de repos et de mouvement des corps matériels.

On a l'habitude, depuis plus d'un demi-siècle, de la faire précéder de la *Cinématique* qui est l'étude du mouvement des figures immatérielles. J'entends par là les figures géométriques ou encore les corps naturels quand nous faisons abstraction de leur masse.

Dans l'examen que je me propose de faire des définitions et notations, je commencerai donc par la Cinématique.

En géométrie même, on ne se fait pas faute de faire appel à la notion de mouvement ; mais, dans le mouvement géométrique, on n'étudie que les positions successivement occupées par les figures mobiles sans tenir compte de la grandeur des *durées* qui séparent les instants où les figures occupent ces diverses positions.

Dualité du mouvement. — En géométrie comme en cinématique, il me paraît bon de remarquer, en insistant là-dessus peut-être un peu plus que nous le faisons d'habitude, que les mots : position d'une figure, repos ou mouvement d'une figure, ont une signification essentiellement relative, je dirai même *bilatérale*, au sens juridique du mot.

De même qu'il n'y a pas de créancier sans un débiteur ni de débiteur sans un créancier, une figure ne saurait, à soi toute seule, occuper une certaine position ni être en repos ou en mouvement. Une figure occupe une certaine position par rapport à une deuxième figure qui occupe par rapport à la première une position corrélative. C'est ainsi, par exemple, que lorsque M. Y est à table, à droite de Mme X, Mme X est à gauche de M. Y.

Une figure A est en repos par rapport à une figure B quand A occupe constamment la même position par rapport à B. Dans ce cas, B est évidemment en repos par rapport à A. Si la position de A par rapport à B change d'un instant à l'autre, on dit que A est en mouvement par rapport à B. Dans ce cas B a, par rapport à A, un mouvement corrélatif. C'est ainsi que lorsque par rapport au solide terrestre

(1) L'importante communication que nous publions forme la première partie d'une étude générale sur les définitions en Mécanique. En nous l'adressant, M. Lefrançois a défini de la manière la plus heureuse le rôle que notre Association doit jouer dans l'enquête permanente qu'elle entreprend pour l'unification en Mathématiques. « Tout d'abord et une fois pour toutes, dit-il, qu'il soit bien entendu qu'en soumettant à mes collègues certaines manières de voir et de dire auxquelles je me suis peu à peu laissé amener dans mon enseignement, ce n'est pas seulement mon avis que je propose, mais c'est surtout le leur que je sollicite. Plus nous serons nombreux à collaborer en critiquant mutuellement notre langage avec une courtoisie et amicale rigueur, plus nous introduirons de clarté et de logique dans nos notations écrites ou parlées. »

un manège tourne de gauche à droite autour d'un axe fixe, le solide terrestre tourne, par rapport au manège, de droite à gauche autour du même axe qui est fixe par rapport aux deux figures.

La cinématique doit donc, comme une bonne comptabilité, être tenue en partie double.

Quand Untel reçoit, le comptable se demande qui paie. Quand il est question de repos ou de mouvement d'une figure, nous devons nous demander quel est le repère.

Repères. — Une figure est dite *invariable* quand tous ses éléments conservent, les uns par rapport aux autres, les mêmes positions. En particulier les distances mutuelles des différents points de la figure demeurent constantes.

Une figure invariable qui comprend au moins trois points non en ligne droite, s'appelle une figure *solide*. A une figure solide nous pouvons associer par la pensée une infinité de points en repos par rapport à la figure et constituant un espace illimité, continu et à trois dimensions. Un pareil espace se nomme un *repère*. La trajectoire d'un point par rapport à un repère est le lieu des points du repère avec lesquels le point mobile vient successivement coïncider.

Quand deux figures solides sont en repos l'une par rapport à l'autre, leur ensemble constitue aussi une figure solide. Tout point en repos par rapport à l'une des figures est en repos par rapport à l'autre et aussi par rapport à l'ensemble. C'est ce que j'exprime en disant que les deux figures définissent le même repère et que leur ensemble définit encore le même repère.

On peut lier à un repère un trièdre trirectangle ox, oy, oz ; la position, à un instant donné, d'un point par rapport à ce repère est alors déterminée par les trois coordonnées x, y, z, du point, lesquelles varient d'un instant à l'autre si le point est en mouvement par rapport au repère considéré.

Remarquons que trois points O, A, B, même quand leurs distances mutuelles sont variables, permettent, tant qu'ils ne sont pas en ligne droite, de déterminer un triède trirectangle et par suite de définir un repère. Nous concevons, en effet, un trièdre trirectangle ox, oy, oz, ayant pour sommet le point o, le premier nommé des trois points ; l'arête ox passe par le point A, 2me point nommé ; la deuxième arête, oy, est perpendiculaire à ox dans le demi plan déterminé par ox et le point B ; la troisième arête, oz, est perpendiculaire au plan oxy et à droite de oxy c'est-à-dire à droite d'un observateur ayant les pieds en o, la tête sur ox et regardant oy. Par rapport à ce trièdre et au repère qu'il définit, le point o est évidemment en repos : A peut être mobile mais son mouvement est rectiligne sur ox. Si B est mobile, sa trajectoire est une ligne du plan oxy.

Quand nous négligeons les dimensions du globe terrestre et que nous le réduisons par la pensée à un point T, ce point et deux étoiles A et B arbitrairement choisies définissent un repère par rapport auquel les autres étoiles sont sensiblement en repos. C'est le repère *terre étoiles*.

Le centre de gravité S du système solaire et deux étoiles arbitrairement choisies définissent un deuxième repère, *soleil étoiles*.

On pourrait également définir un repère en choisissant arbitrairement trois étoiles A, B, C.

Dans le langage courant, quand on parle de repos ou de mouvement sans spécifier un autre repère, il s'agit toujours du *repère terrestre*, c'est-à-dire du repère défini par le solide terrestre.

On peut aussi envisager les positions successives d'une figure par rapport à un repère en mouvement relativement au repère terrestre. Nous pouvons, par exemple, étudier le mouvement d'une figure par rapport au repère défini par un wagon de chemin de fer ou par un manège de chevaux de bois.

En Cosmographie on rapporte le plus souvent les positions des astres soit au repère *terre étoiles*, soit au répère *soleil étoiles*.

Quand, pour simplifier, on néglige les phénomènes de précession et de nutation, le mouvement du repère Terre Etoiles par rapport au repère terrestre est une rotation de gauche à droite autour d'un axe fixe appelé axe du monde. Il revient au même de dire que le mouvement du repère terrestre par rapport au repère terre étoiles est une rotation de droite à gauche autour du même axe. C'est le mouvement diurne.

Par rapport au repère Terre Etoiles, le mouvement du repère Soleil Etoiles est une translation elliptique. C'est le mouvement annuel.

Egalité de deux durées. — La première difficulté, quand on veut mesurer les durées, est la définition de l'égalité de deux durées qui ne commencent pas au même instant. Je ne suis guère satisfait de la définition ordinairement donnée qui se réduit à peu près à ceci : « deux « durées sont dites égales quand elles séparent le commencement et la « fin d'un phénomène qui se reproduit dans des conditions identiques. »

Est-ce que, par le fait seul que l'instant initial n'est pas le même, il n'y a pas toujours et nécessairement quelque chose de changé dans les conditions dans lesquelles se produit le phénomène ? Outre les autres modifications qui peuvent résulter du changement de l'instant initial, le solide terrestre et les divers astres n'ont jamais dans les deux cas exactement les mêmes positions relatives. Or, sans exagérer, comme les astrologues, l'influence des conjonctions planétaires sur les divers événements, sans aller même jusqu'à affirmer l'importance des phases de la lune au point de vue de la coupe des cheveux ou de la mise du vin en bouteilles, l'observation des phénomènes des marées nous interdit, me semble-t-il, de nier absolument et *a priori* l'influence de la hauteur de la lune au-dessus de l'horizon et de la distance angulaire du soleil et de la lune sur les nombreux phénomènes dans lesquels intervient la pesanteur, en particulier sur les oscillations du pendule et l'écoulement des liquides.

Que ces influences soient négligeables et que nous puissions, au moins dans certaines limites, affirmer l'isochronisme des oscillations pendulaires de même amplitude, en un même lieu, et l'uniformité de l'écoulement dans la clepsydre, je le veux bien : mais c'est un fait dont la constatation et même le simple énoncé supposent la possesion d'une horloge. Cette horloge me paraît fournie par le mouvement diurne. Je crois que M. ANDRADE dit quelque part à peu près ceci : « C'est par définition que le mouvement de rotation diurne est uniforme. » Cela ne revient-il pas à dire que deux durées sont qualifiées d'égales quand elles correspondent à des rotations de même amplitude du solide terrestre par rapport au repère terre étoiles ? La mesure d'une durée se réduit dès lors à la mesure de cette rotation et cette dernière mesure peut elle-même, en vertu du fait ci-dessus indiqué, se remplacer par l'évaluation du nombre des oscillations d'un pendule ou par la mesure du volume de liquide écoulé dans la clepsydre.

Définition de la vitesse. — Je crois que nous ne sommes pas tous d'accord sur la signification du mot *vitesse*.

J'ai lu, en effet, il y a quelques années, dans la Revue de l'Enseignement des Sciences, un extrait d'un rapport officiel d'un membre de l'enseignement supérieur sur les baccalauréats. L'auteur de ce rapport (je crois me souvenir que c'était M. Charve de Marseille) blamait un candidat qui, ayant à définir la vitesse d'un point, avait dit que c'est un vecteur. Je n'ai pas compris la portée de ce reproche.

Sans doute, si le candidat s'est borné à dire « la vitesse est un vecteur » sans définir ce vecteur, la réponse est insuffisante de même qu'il serait insuffisant, pour définir le rapport de deux grandeurs de même espèce, de dire simplement : « c'est un nombre ». Mais si ces réponses sont insuffisantes, je ne saurais les trouver inexactes.

Pour moi, la vitesse linéaire d'un point par rapport à un repère est bien un vecteur lié à ce repère de même que sa vitesse angulaire est un angle et que sa vitesse aréolaire est une aire.

En effet, pour définir la vitesse linéaire à un instant donné, on commence par définir la vitesse moyenne entre cet instant et un instant postérieur et pour cela, on définit d'abord le déplacement linéaire entre ces deux instants. C'est le vecteur AA' qui a pour origine la position A du mobile à l'instant initial et pour extrémité, sa position A' à l'instant final. (Je veux dire les points A et A' du repère avec lesquels le mobile coïncide respectivement à ces deux instants).

La vitesse linéaire moyenne est le produit du déplacement AA' par l'inverse $\frac{1}{\theta}$ de la mesure θ de la durée qui sépare ces deux instants. Ce produit d'un vecteur par un nombre arithmétique est bien un vecteur parallèle au multiplicande et de même sens. Ce vecteur dépend, comme le multiplicateur $\frac{1}{\theta}$, de l'unité de temps choisie. Il est indépendant de l'unité de longueur. Celle-ci n'aura à intervenir que lorsqu'on voudra mesurer la vitesse moyenne.

Si, lorsque θ tend vers zéro, la vitesse moyenne entre les deux instants tend, en grandeur, direction et sens, vers un vecteur limite, ce vecteur limite est appelé vitesse linéaire du mobile à l'instant considéré. Ce vecteur limite, quand il existe, est évidemment tangent à la trajectoire et, si, sur cette dernière, on a choisi un sens positif de parcours, la vitesse est dirigée suivant la demi-tangente positive ou suivant la demi-tangente négative suivant que le mobile décrit la trajectoire dans le sens positif choisi ou dans le sens contraire. Outre sa mesure arithmétique, la vitesse a donc alors une valeur algébrique : positive dans le premier cas, négative dans le deuxième.

De même que la position d'un point sur la trajectoire est déterminée par un nombre algébrique s qui est son abscisse curviligne, un instant est déterminé par la date. J'appelle ainsi le nombre algébrique t qui a pour valeur absolue la mesure arithmétique, θ, de la durée qui sépare l'instant considéré d'un instant arbitrairement choisi et appelé l'instant zéro, ce nombre t étant positif ou négatif suivant que l'instant considéré est postérieur ou antérieur à l'instant zéro.

L'abscisse curviligne s d'un point en mouvement est une fonction de la date t de l'instant considéré. Il suffit de savoir que le rapport de la longueur d'un arc à la longueur de sa corde tend vers 1 lorsque l'arc tend vers zéro, pour voir aisément que la mesure algébrique, v, du vecteur vitesse est égale à la dérivée $\frac{ds}{dt}$ de l'abscisse curviligne du point mobile par rapport à la date. Ce nombre algébrique, v, est, en général, lui-même, une nouvelle fonction de la date qui en général admet une dérrivée $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{d^2s}{dt^2}$.

M. Guillaume, dans un très intéressant petit volume de la collection Laisant intitulé *Initiation à la mécanique*, préconise une définition de la vitesse que j'ai souvent lue ou entendue, mais qui me choque toujours. Il demande qu'on dise : « la vitesse est le rapport du chemin « parcouru au temps employé à le parcourir ».

Dans l'impossibilité de concevoir quelque commune mesure entre une longueur et une durée, je me vois obligé, pour trouver un sens à cette définition, de substituer leurs mesures au chemin parcouru et à la durée. J'ai alors affaire au rapport de deux nombres, ce qui ne peut être qu'un nombre. En conséquence, à moins d'admettre que la vitesse n'est qu'un nombre abstrait, ce langage ne saurait définir que la mesure de la vitesse moyenne. La limite vers laquelle tend ce nombre quand la durée tend vers zéro, est la mesure de la vitesse à l'instant considéré.

Pour M. Guillaume, la vitesse d'un point serait donc une certaine qualité du mouvement du point à laquelle on donne pour mesure la limite du rapport de la mesure du chemin parcouru à la mesure de la durée. On convient ensuite de représenter cette qualité du mouvement par un vecteur porté à partir du point, tangentiellement à la trajectoire, dans le sens du mouvement du mobile, la longueur de ce vecteur ayant même mesure que la vitesse.

Cette conception de la vitesse me paraît moins simple que la première et je ne vois pas de raison pour la préférer.

Accélération. — La vitesse d'un point par rapport à un repère, à un instant donné, étant un vecteur lié au repère, l'accroissement géométrique de vitesse entre deux instants est également un vecteur lié au repère. Il en est de même pour le produit de cet accroissement par l'inverse de la mesure de la durée qui sépare les deux instants, c'est-à-dire pour l'accélération moyenne entre ces deux instants et enfin pour l'accélération à un instant donné qui est la limite vers laquelle tend l'accélération moyenne entre cet instant et un instant postérieur infiniment voisin.

L'accélération ainsi définie est évidemment dans le plan de la trajectoire, si elle est plane ; sinon, elle est dans son plan osculateur mené par le point. On peut la regarder comme la somme géométrique de deux vecteurs : l'un, tangent à la trajectoire et nommé accélération tangentielle, l'autre, normal, appelé accélération normale.

On voit aisément que ce dernier est dirigé vers le centre de courbure de la trajectoire. Sa mesure arithmétique est $\frac{V^2}{R}$, en appelant R le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré. L'accélération du point mobile n'est donc jamais tangente à la trajectoire si ce n'est quand la vitesse est nulle ou bien quand le rayon de courbure de la trajectoire au point considéré est infini. Dans le mouvement rectiligne, l'accélération est toujours dirigée suivant la tangente à la trajectoire.

L'accélération tangentielle a pour mesure algébrique $\frac{dv}{dt}$ ou $\frac{d^2 s}{dt^2}$. Elle est nulle quand la grandeur de la vitesse est constante, ce qui caractérise le mouvement uniforme rectiligne ou curviligne.

La mesure de l'accélération dépend évidemment du choix de l'unité de longueur mais ce choix n'intervient en rien dans la définition de l'accélération comme vecteur. Le choix de l'unité de durée est seul à y intervenir mais il y intervient doublement car, dans le produit qui constitue l'accélération moyenne entre deux instants le vecteur multiplicande, qui est l'accroissement de vitesse, dépend, comme la vitesse elle-même, de l'unité de durée et le multiplicateur, qui est l'inverse de la mesure de la durée, varie aussi avec cette unité et dans le même sens.

A deux unités de temps u et u' correspondent pour un même mouvement deux vecteurs vitesses dont le rapport est $\frac{u}{u'}$ et deux vecteurs accélérations dont le rapport est $\left(\frac{u}{u'}\right)^2$.

Point hodographe d'un point donné. — On ramène fréquemment la notion d'accélération à celle de vitesse par la considération de l'hodographe. On appelle généralement ainsi la *ligne* lieu géométrique de l'extrémité M d'un vecteur variable O M, d'origine fixe, constamment équipollent à la vitesse du point mobile M.

Il me semble qu'il y aurait quelque avantage, au point de vue de la simplicité du langage à appeler ce point M le point *hodographe* du point M. Nous pourrions dire alors que la ligne hodographe du point M est la trajectoire de son point hodographe M et que l'accélération du point M est équipollente à la vitesse du point hodographe au même instant.

Changement de repère. — Tel est le nouveau texte d'un alinéa de notre programme. J'aime mieux ce texte que le titre : « Composition des mouvements » sous lequel se cachait naguère la même question.

Quand on connait le mouvement d'une figure F par rapport à un repère A (mouvement relatif) et le mouvement du repère A par rapport à un deuxième repère B (mouvement d'entraînement), le mouvement de F par rapport à B (mouvement résultant) est évidemment déterminé et on se propose d'étudier les diverses circonstances de ce mouvement résultant.

On formule d'ordinaire la proposition suivante : la vitesse résultante d'un point M est la somme géométrique de sa vitesse d'entraînement et de sa vitesse relative.

Cet énoncé, qui a pour lui sa brièveté, me parait défectueux en deux points.

1° L'expression « vitesse d'entraînement du point M » pour désigner la vitesse d'entraînement du point de repère A avec lequel le point M se trouve en coïncidence à l'instant considéré, me parait une abréviation fâcheuse puisque, précisément, la vitesse dont il s'agit n'est pas une vitesse du point M. Le point M n'a, dans la question, que deux vitesses : une vitesse relative par rapport au repère A et une vitesse résultante par rapport au repère B. L'abréviation ci-dessus avec laquelle on se familiarise trop aisément, arrive à faire considérer le mouvement d'entraînement comme un mouvement de la figure F. C'est ainsi qu'en Cosmographie élémentaire on parle couramment du double mouvement de rotation et de translation du solide terrestre *par rapport au repère soleil étoiles* comme si une figure pouvait avoir plusieurs mouvements à la fois par rapport à un même repère.

2° La vitesse relative du point M est un vecteur lié au repère A et la vitesse d'entraînement du point du repère A avec lequel M coïncide à l'instant considéré, est un vecteur lié au repère B. Or, la définition de la somme géométrique de deux vecteurs les suppose liés au même repère et je ne sais ce qu'est la somme géométrique de deux vecteurs liés à deux repères différents. Je crois donc qu'au risque d'allonger l'énoncé, il faut dire : « la vitesse résultante de M est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement du point du repère A avec lequel M coïncide à l'instant considéré et du vecteur du repère B avec lequel coïncide à l'instant considéré la vitesse relative de M. »

Je me souviens que lorsque j'ai abordé pour la première fois le théorème de Coriolis (il y a de cela bien des années, hélas), j'y ai trouvé certaines difficultés. Elles ont été aplanies lorsqu'après avoir repris avec soin la démonstration du théorème de la composition des vitesses, j'ai bien compris la portée de ce dernier théorème qu'une trop grande simplification de son énoncé expose à être quelquefois mal interprété.

LEFRANÇOIS (Grenoble).

Le Gérant : A. COUESLANT.

CAHORS & ALENÇON, IMPRIMERIES A. COUESLANT. — 16.195