

II. Unification des définitions et des notations

(Suite)

1. Mécanique

Mécanique du point matériel. — J'ai défini la mécanique : l'étude des conditions de repos et de mouvement des corps matériels. La mécanique rationnelle, la seule dont nous ayons à nous occuper en mathématiques, substitue aux corps naturels des systèmes de points matériels. Quel sens donnons-nous à ce mot *matériel* ?

Nous ne dirons pas que les objets matériels sont ceux qui tombent sous nos sens. L'image réelle ou virtuelle de la lune ou d'une étoile fournie par une lentille ou un miroir ne tombe guère moins sous nos sens que l'astre lui-même. Nous voyons l'image d'une étoile dans un miroir plan ; elle est en mouvement par rapport à un repère si l'étoile ou le miroir se meuvent par rapport à ce repère et nous pouvons déterminer, en grandeur, direction et sens, la vitesse et l'accélération de cette image. Cependant nous ne la considérons pas comme matérielle et H. Poincaré qui qualifiait de *lourde machine* la sphère céleste avec les étoiles qui y semblent attachées, n'aurait certainement pas appliqué la même épithète à l'image que donne de cette sphère un miroir agité par la main d'un enfant.

Nos sens perçoivent donc certains êtres qui ne sont pas matériels ; inversement, nous concevons fort bien l'existence d'êtres matériels que nos sens ne peuvent percevoir, par exemple les soleils noirs dont parlent quelques astronomes.

En mathématiques, me semble-t-il, nous avons l'habitude de créer, en quelque sorte, par les définitions que nous en donnons, les êtres sur lesquels nous faisons porter nos études. Sans demander de la matière une définition capable de satisfaire à la fois physiciens et philosophes, il me paraît nécessaire, au moment où nous abordons la mécanique devant des élèves bien familiarisés déjà avec les abstractions de la géométrie, de préciser quelle différence nous établissons entre les points matériels que nous allons considérer et qui, eux aussi, sont des figures abstraites, et les figures plus abstraites encore considérées jusque là en géométrie et en cinématique.

Cette différence, j'estime que ce sont les postulats de la mécanique qui la constituent et voici comment je crois pouvoir les présenter : Je dirai que des points sont *matériels* si, par rapport à certains repères que j'appellerai des *repères dynamiques*, ces points satisfont aux cinq conditions suivantes qui constituent les postulats ou principes fondamentaux de la mécanique.

I. — Principe de l'inertie : « pas d'accélération sans cause ». L'accélération d'un point matériel par rapport à un repère dynamique est

toujours due au moins à une cause actuelle et, généralement, à plusieurs causes simultanées.

Chacune de ces causes, quand on ne l'envisage qu'au point de vue de son effet sur un point matériel déterminé, se nomme une *force* appliquée à ce point.

II. — Principe de la composition des effets des forces appliquées simultanément à un même point matériel.

Quand un point matériel est soumis simultanément à plusieurs causes d'accélération, l'accélération prise par ce point par rapport à un repère dynamique est la somme géométrique des accélérations qu'il prendrait séparément sous l'action de chaque cause si toutes ces causes pouvaient être ainsi isolées.

Équilibre. — En particulier, si ces diverses accélérations ont une somme géométrique nulle, l'accélération du point par rapport au repère considéré est nulle. On dit alors que le point matériel est en équilibre ou que les forces qui agissent sur lui se font équilibre.

III. — Principe de la dualité des causes d'accélération.

Toute cause d'accélération agit toujours à la fois sur deux points matériels et leur imprime des accélérations de sens contraires le long de la droite qui joint ces deux points. Si l'accélération de chaque point est dirigée vers l'autre, la cause d'accélération s'appelle une *attraction entre les deux points*. Si l'accélération de chaque point est dirigée dans le sens opposé, la cause d'accélération considérée s'appelle une *répulsion entre les deux points*.

Le principe énoncé revient donc à dire qu'il n'y a pas d'autres causes d'accélération pour les points matériels, par rapport à un repère dynamique, que des attractions et des répulsions s'exerçant entre deux points matériels.

Action et réaction. — Attraction ou répulsion, toute cause d'accélération a toujours deux points d'application. Quand on l'envisage au point de vue de son effet sur l'un des deux points en négligeant son action sur l'autre, cette cause d'accélération est une première force qu'on nomme *action* ; au point de vue de son effet sur l'autre point, cette même cause est une deuxième force, on la nomme *réaction*.

Etant donné un système de points matériels, une force appliquée à un point A du système est dite intérieure ou extérieure au système suivant que le point matériel auquel est appliquée la réaction correspondante, fait, ou non, partie du système considéré.

IV. — Premier principe des masses. — Quelle que soit la cause d'accélération qui s'exerce entre deux points matériels A et B, le rapport arithmétique des accélérations prises respectivement par A et par B, sous l'action unique de cette cause, est, pour ce couple de points, un nombre constant. L'inverse de ce rapport se nomme rapport de la masse du point A à la masse du point B (j'ai trouvé ce principe ainsi énoncé dans une des dernières éditions de la mécanique d'Appel). En particulier, si les accélérations prises par A et par B sont égales, on dit que les masses de A et de B sont égales ou encore que A et B ont

toujours due au moins à une cause actuelle et, généralement, à plusieurs causes simultanées.

Chacune de ces causes, quand on ne l'envisage qu'au point de vue de son effet sur un point matériel déterminé, se nomme une *force* appliquée à ce point.

II. — Principe de la composition des effets des forces appliquées simultanément à un même point matériel.

Quand un point matériel est soumis simultanément à plusieurs causes d'accélération, l'accélération prise par ce point par rapport à un repère dynamique est la somme géométrique des accélérations qu'il prendrait séparément sous l'action de chaque cause si toutes ces causes pouvaient être ainsi isolées.

Équilibre. — En particulier, si ces diverses accélérations ont une somme géométrique nulle, l'accélération du point par rapport au repère considéré est nulle. On dit alors que le point matériel est en équilibre ou que les forces qui agissent sur lui se font équilibre.

III. — Principe de la dualité des causes d'accélération.

Toute cause d'accélération agit toujours à la fois sur deux points matériels et leur imprime des accélérations de sens contraires le long de la droite qui joint ces deux points. Si l'accélération de chaque point est dirigée vers l'autre, la cause d'accélération s'appelle une *attraction entre les deux points*. Si l'accélération de chaque point est dirigée dans le sens opposé, la cause d'accélération considérée s'appelle une *répulsion entre les deux points*.

Le principe énoncé revient donc à dire qu'il n'y a pas d'autres causes d'accélération pour les points matériels, par rapport à un repère dynamique, que des attractions et des répulsions s'exerçant entre deux points matériels.

Action et réaction. — Attraction ou répulsion, toute cause d'accélération a toujours deux points d'application. Quand on l'envisage au point de vue de son effet sur l'un des deux points en négligeant son action sur l'autre, cette cause d'accélération est une première force qu'on nomme *action* ; au point de vue de son effet sur l'autre point, cette même cause est une deuxième force, on la nomme *réaction*.

Étant donné un système de points matériels, une force appliquée à un point A du système est dite intérieure ou extérieure au système suivant que le point matériel auquel est appliquée la réaction correspondante, fait, ou non, partie du système considéré.

IV. — Premier principe des masses. — Quelle que soit la cause d'accélération qui s'exerce entre deux points matériels A et B, le rapport arithmétique des accélérations prises respectivement par A et par B, sous l'action unique de cette cause, est, pour ce couple de points, un nombre constant. L'inverse de ce rapport se nomme rapport de la masse du point A à la masse du point B (j'ai trouvé ce principe ainsi énoncé dans une des dernières éditions de la mécanique d'Appel). En particulier, si les accélérations prises par A et par B sont égales, on dit que les masses de A et de B sont égales ou encore que A et B ont

même masse. Si l'accélération prise par A est plus petite que celle que prend B, on dit que la masse de A est plus grande que celle de B. Plus généralement, suivant que le rapport de l'accélération de A à l'accélération de B est égal, supérieur ou inférieur à la fraction $\frac{n}{m}$, on dit que le rapport $\frac{\text{masse A}}{\text{masse B}}$ est égal, inférieur ou supérieur à la fraction $\frac{m}{n}$ ou encore que la masse de A est égale, inférieure ou supérieure aux $\frac{m}{n}$ de la masse de B.

On appelle mesure de la masse d'un point matériel A, le rapport de la masse de ce point A à la masse d'un certain point M qu'on choisit arbitrairement comme terme de comparaison et auquel on donne le nom d'unité de masse.

Dans le système CGS on prend pour unité le gramme masse, c'est-à-dire la masse du centimètre cube d'eau distillée, à la température qui correspond à son maximum de densité.

Souvent aussi on prend pour unité le kilogramme masse, c'est-à-dire la masse du litre d'eau. Plus rarement, la tonne masse, masse du mètre cube d'eau.

V. — Deuxième principe des masses. — Quels que soient trois points matériels A, B, C, on a toujours l'égalité $\frac{\text{masse A}}{\text{masse B}} \times \frac{\text{masse B}}{\text{masse C}} = \frac{\text{masse A}}{\text{masse C}}$.

Énoncés équivalents de la même proposition :

Quand on change l'unité de masse, les nouvelles mesures s'obtiennent en multipliant les mesures primitives par le rapport de l'ancienne unité à la nouvelle.

Le rapport des masses de deux points matériels est égal au rapport de leurs mesures quand on les rapporte à une même unité.

Nota. — C'est pour plus de facilité et pour éviter de charger le début de la mécanique d'une démonstration un peu longue, que j'énonce le cinquième postulat sous cette forme à mes élèves de mathématiques élémentaires. Il suffirait de poser, comme postulat, la proposition suivante :

Quand deux masses sont égales, toute masse égale, supérieure ou inférieure à l'une est aussi égale, supérieure ou inférieure à l'autre et quand deux masses sont inégales, toute masse supérieure à la plus grande est aussi supérieure à l'autre.

De cette proposition et des quatre postulats précédemment énoncés, on peut déduire l'égalité :

$$\frac{\text{masse A}}{\text{masse B}} \times \frac{\text{masse B}}{\text{masse C}} = \frac{\text{masse A}}{\text{masse C}}$$

Nous ne ferons pas ici cette démonstration qui est un peu longue.

Remarque générale sur les postulats de la mécanique. —

I. — Dans les énoncés de ces postulats, les accélérations seules interviennent. Il en résulte que, si un repère est dynamique, il en est de

même d'un autre repère quand le mouvement du premier par rapport au second (mouvement d'entraînement) est une translation rectiligne et uniforme. Dans ce cas, en effet, l'accélération de tout point par rapport au deuxième repère (accélération résultante) coïncide à chaque instant avec son accélération par rapport au premier (accélération relative). Par conséquent si des points satisfont aux postulats par rapport à l'un des repères, ils y satisfont également par rapport à l'autre. Mais si le mouvement d'entraînement n'est pas une translation, ou, si c'est une translation accélérée, l'accélération résultante d'un point M est la somme géométrique : 1° de l'accélération d'entraînement du point du premier repère avec lequel M coïncide à l'instant considéré ; 2° du vecteur du deuxième repère avec lequel coïncide, à l'instant considéré, l'accélération relative du point M ; 3° de l'accélération de Coriolis, qui n'existe que lorsque le mouvement d'entraînement n'est pas une translation, et qui dépend, à la fois, de la vitesse relative de M et de la vitesse angulaire du mouvement d'entraînement à l'instant considéré. On voit en conséquence que si des points satisfont aux postulats par rapport au premier repère, ils ne peuvent pas rigoureusement y satisfaire par rapport au deuxième. En d'autres termes, si le premier repère est dynamique, le deuxième ne peut pas être dynamique, du moins, rigoureusement.

II. — C'est en cherchant à interpréter les expériences répétées à la surface de la terre qu'on a été amené, par induction, à formuler les postulats ci-dessus.

Par rapport au repère terrestre, les corps naturels peuvent, au moins dans certaines limites de distances et de vitesses, être assimilés à des systèmes de points matériels.

En considérant le repère terrestre comme dynamique, dans les diverses expériences faites à la surface de la terre, on ne trouve les postulats en défaut que dans un petit nombre de cas : pendule et gyroscope de Foucault, déviation à l'est dans la chute des corps, variation de g avec la latitude, etc.

Ces expériences délicates, ainsi que les autres expériences, s'expliquent très bien au moyen des postulats si on considère comme dynamique le repère terre étoiles et non le repère terrestre qui, par rapport au repère terre étoiles subit la rotation diurne.

Les postulats n'expliquent pas du tout les mouvements des astres quand on rapporte ces mouvements au repère terrestre. Ils ne les expliquent pas rigoureusement si on rapporte ce mouvement au repère terre étoiles. Mais on explique toutes les particularités des mouvements des planètes et de leurs satellites en les considérant comme des systèmes de points matériels, et on explique en même temps les mouvements relatifs des corps naturels par rapport au repère terrestre, quand on rapporte tous ces mouvements au repère soleil étoiles regardé comme repère dynamique.

Représentation géométrique des forces. — Nous avons appelé *force* une cause d'accélération d'un point matériel par rapport à

un repère dynamique, lorsqu'on néglige l'effet de cette cause d'accélération sur son second point d'application.

Nous conviendrons de représenter une cause d'accélération ainsi envisagée par un vecteur ayant pour origine le point d'application considéré et équipollent à l'accélération que la force imprime à ce point quand elle est seule à agir sur lui, multipliée par la mesure de la masse du point d'application.

Ce vecteur représentatif d'une force dépend donc, comme l'accélération, du choix de l'unité de temps ; comme la mesure de la masse, il dépend du choix de l'unité de masse. La *mesure* du vecteur représentatif d'une force dépend évidemment, en outre, du choix de l'unité de longueur.

Convention générale. — Nous appliquerons aux forces tout le vocabulaire applicable aux vecteurs et tous les termes géométriques appliqués à une force s'entendront comme s'ils étaient appliqués au vecteur représentatif de cette force.

C'est ainsi que nous parlerons de la direction et du sens d'une force, de l'angle d'une force avec un axe ou avec un plan, de la distance d'une force à un point ou à un plan parallèle à la force, de la projection (orthogonale ou non) d'une force sur un axe ou sur un plan, du moment (arithmétique ou linéaire) d'une force par rapport à un axe, etc., etc.

Forces égales. — Deux forces sont dites égales ou inégales suivant que les vecteurs qui les représentent sont égaux ou inégaux.

Pour que deux forces soient égales, il faut et il suffit que le rapport des masses de leurs points d'application soit égal à l'inverse du rapport des accélérations que les deux forces leur impriment quand elles sont seules à agir sur eux.

L'action et la réaction dues à une même cause d'accélération sont donc deux forces égales et directement opposées. Elles ont, par suite, par rapport à tout centre, deux moments linéaires antiéquipollents. Il en résulte que si l'on considère les forces *intérieures* qui agissent sur un système de points matériels, la somme géométrique de ces forces est toujours nulle et la somme géométrique de leurs moments linéaires par rapport à un centre quelconque est, aussi toujours nulle.

Nouvel énoncé du deuxième postulat de la mécanique. — Sous l'action simultanée de plusieurs forces représentées par les vecteurs MF' , MF'' ... un point matériel prend, par rapport à un repère dynamique, la même accélération qu'il prendrait sous l'action d'une force unique représentée par le vecteur MF équipollent à la somme géométrique de MF' , MF'' ...

En conséquence, sans changer le mouvement d'un point matériel, on peut remplacer certaines des forces qui lui sont appliquées, par d'autres forces ayant une somme géométrique équipollente.

En particulier, on peut décomposer une force appliquée à un point matériel en mouvement soit en deux composantes, l'une tangente,

l'autre normale à la trajectoire ; soit en trois composantes respectivement parallèles aux arêtes d'un trièdre donné.

Mesure d'une force. — On appelle rapport de deux forces le rapport des vecteurs qui les représentent. Il est égal au rapport des accélérations que les deux forces impriment à leurs points d'application quand elles sont seules à agir sur eux, multiplié par le rapport des masses des deux points d'application. Ce rapport de deux forces est indépendant du choix des unités de temps, de masse et de longueur.

On appelle *mesure* d'une force le rapport de cette force à une force arbitrairement choisie comme unité.

Si l'on choisit pour unité une force représentée par un vecteur égal à l'unité de longueur (par exemple, une force imprimant à l'unité de masse une accélération égale à l'unité de longueur), la mesure d'une force quelconque est égale à la mesure du vecteur qui la représente.

L'unité CGS de force qu'on appelle *dyne*, imprime au gramme masse une accélération d'un centimètre quand on prend pour unité de temps la seconde de temps solaire moyen.

Le gramme force imprime au gramme masse une accélération égale à l'accélération g , de la chute des corps. Cette accélération, g , varie un peu d'un point à l'autre de la surface du globe ; elle est de 981 cm à Paris. Le gramme force varie donc un peu d'un point à l'autre de la terre. Le gramme force de Paris a pour mesure 981 quand on prend la dyne pour unité.

LEFRANÇOIS (Grenoble).

2. Vecteurs

Dans le *Bulletin de l'Association des Professeurs de Mathématiques* de décembre 1913, p. 35, je lis : « On a proposé de représenter les opérations sur les grandeurs géométriques par une déformation des signes d'égalité et d'opérations... Il semble préférable de faire porter la modification sur les éléments eux-mêmes et non sur les signes d'opérations. »

J'approuve pleinement la dernière phrase. En effet, les relations et les opérations sont définies par leurs propriétés (réciprocité, transitivité, commutativité, associativité, distributivité) qui sont indépendantes des objets auxquels elles s'appliquent. De ces propriétés on déduit des *règles de calcul* qui par suite, sont valables elles aussi, quels que soient les éléments auxquels on les applique.

Une *grandeur* ne peut pas en général se définir par une phrase qui commence par : un (ou une)... c'est... Une grandeur est définie quand on sait reconnaître si deux états sont ou ne sont pas les mêmes, c'est-à-dire quand on a défini l'égalité et la non-égalité, et quand on a déterminé les relations et les opérations que l'on effectuera sur ces divers états. Une grandeur déterminée sera représentée par une lettre capitale gothique telle que \mathfrak{G} , et divers états de cette grandeur \mathfrak{G} par des lettres capitales romaines A, B... Nous dirons donc : deux états A et B d'une même grandeur \mathfrak{G} et non deux grandeurs A et B de même espèce ; le rapport de deux états A et B d'une même grandeur \mathfrak{G} et non

le rapport de deux grandeurs de même espèce. Deux états A et A' dont la somme est l'état nul seront dits *opposés*, comme le propose MM. Vieillefond et Guitton.

Les divers états d'une même grandeur sont les éléments que l'on soumettra au calcul algébrique, les grandeurs qui interviennent en mathématiques étant nombreuses, il est difficile de désigner toujours leurs états par des symboles propres à chacune d'elles. Le plus simple est de définir soigneusement ces symboles ou notations, au commencement de chaque question que l'on traitera. Les notations les plus simples sont les lettres romaines minuscules a, b, \dots, x, y, \dots . Ainsi rien n'empêche de désigner par a un angle, une longueur, une surface, un vecteur, un nombre. Toutefois pour soulager la mémoire il est bon, dans les questions où il intervient à la fois plusieurs espèces de grandeurs d'employer autant que possible des notations propres à chacune d'elles. C'est ce que nous allons essayer de faire pour les segments, les vecteurs, etc.

Une *portion de droite* est l'ensemble des points d'une droite situés entre deux points donnés A et B qui sont ses *bouts* ou ses *bornes*.

La *longueur d'une portion de droite* est définie par une portion de droite à un déplacement près. Deux portions de droites ont même *longueur* si elles sont superposables par un déplacement quelconque. Nous désignerons la longueur de la portion de droite de bornes A et B par $|AB|$ ou simplement par AB quand il n'y aura pas d'ambiguïté possible.

Les mots *orientation et direction* n'ont pas un sens bien net. Pour faire une économie de mots, nous leur donnerons des sens différents.

Deux droites ou deux plans ont même *direction* si on peut les faire coïncider par une translation quelconque.

Un *axe* ou une *droite orientée* est une droite sur laquelle on a choisi un sens ou une *orientation*.

Un *cycle* ou un *cercle orienté* est un cercle sur lequel on a choisi un sens ou une orientation.

On définit de même un mouvement de *rotation orienté*, un *plan orienté*, une *courbe orientée*, une *portion de droite orientée*, un *angle* ou un *arc* ou un *dièdre orienté*. Le mot *orienté* est plus commode que l'expression *pourvu de sens*.

Deux axes ont même *orientation* si on peut les faire coïncider par une translation. Plus généralement, deux figures ont même *orientation* si on peut les faire coïncider par une homothétie positive et en particulier par une translation.

Un *segment* est défini à une translation près par une portion de droite orientée. Un segment a une *direction*, une *orientation* (ou un sens), et une *longueur*.

Deux segments qui peuvent être superposés par une translation sont *égaux*. Nous désignerons généralement un segment par une seule lettre surmontée d'un trait horizontal, par ex. : $\bar{A}_1, \dots, \bar{U}, \bar{V}$. Le segment déterminé par une portion de droite orientée d'origine A et

d'extrémité B sera représenté par \overline{AB} . Si deux segments \overline{AB} et $\overline{A'B'}$, ou \overline{V} et $\overline{V'}$ sont égaux, nous écrirons donc tout simplement $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, ou $\overline{V} = \overline{V'}$. La somme \overline{S} de plusieurs segments $\overline{V}_1 \overline{V}_2 \dots \overline{V}_n$ s'écrira :

$$\overline{S} = \overline{V}_1 + \overline{V}_2 + \dots + \overline{V}_n.$$

La somme est communicative et associative. Inutile de dire la somme *géométrique* puisqu'une somme de *segments* ne peut être qu'un *segment*. On mesure les portions de droites orientées appartenant à une même droite, et par suite aussi les segments de même direction, à l'aide d'une portion de droite orientée que l'on prend comme *unité de portion de droite*, ou d'un *segment-unité* de même direction. Un segment-unité détermine une orientation d'axe et inversement. On pourra le plus souvent les désigner tous deux par la même notation \overline{U} . La mesure d'un segment \overline{V} de même direction sera désignée par V et la mesure de sa longueur par $|V|$, comme la longueur elle-même. On écrira alors

$$V = \frac{\overline{V}}{\overline{U}} \text{ ou } \overline{V} = V \overline{U}. \text{ Le théorème de Thalès ou des projections s'é-}$$

$$\text{crira } \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}.$$

Le *produit scolaire* du segment \overline{V} par le segment $\overline{V'}$ est un nombre p et nous écrirons $p = \overline{V} \overline{V'}$ comme un produit ordinaire. Si \overline{V} et $\overline{V'}$ sont mesurés à l'aide des segments-unités \overline{U} et $\overline{U'}$, nous aurons par définition $p = V \cdot V' \cdot \cos(\overline{U}, \overline{U'})$. La distributivité de la *multiplication scolaire* par rapport à l'*addition segmentaire* donnera lieu à l'égalité

$$(\overline{V} + \overline{V'}) \overline{W} = \overline{V} \overline{W} + \overline{V'} \overline{W}.$$

Soient maintenant deux segments-unités \overline{U} et $\overline{U'}$ et $\overline{U''}$ un troisième segment-unité perpendiculaire aux deux premiers et tels qu'une rotation de moins d'un demi-tour dans le sens direct autour de $\overline{U''}$ amène \overline{U} sur $\overline{U'}$. Par définition le *segment-produit* de deux segments \overline{V} et $\overline{V'}$ de même direction que \overline{U} et $\overline{U'}$ respectivement est le segment $\overline{P} = \overline{U''} \cdot V \cdot V' \sin(\overline{U}, \overline{U'})$. La *multiplication segmentaire* est distributive par rapport à l'*addition segmentaire* mais si on permute deux facteurs le segment-produit est remplacé par le segment opposé ; nous dirons qu'il est *semi-commutatif*. Les propriétés de la multiplication segmentaire étant analogues à celles d'un produit ordinaire, surtout à cause de la distributivité, nous la représenterons par une notation différant aussi peu que possible de celle du produit ordinaire, de façon à ne pas trop changer l'aspect des égalités algébriques usuelles. Nous l'écrirons $\overline{P} = \overline{V} \cdot \overline{V'}$. Nous aurons donc :

$$(\overline{V} + \overline{V'}) \cdot \overline{W} = \overline{V} \cdot \overline{W} + \overline{V'} \cdot \overline{W}.$$

Le segment-produit d'un segment par lui-même s'écrira :

$$\overline{V} \cdot \overline{V} = \overline{V^2} = 0.$$

Un vecteur sera défini par une portion de droite orientée, à un glissement près sur la droite qui la porte et qu'on appelle la droite du vecteur.

Deux vecteurs seront égaux si on peut les faire coïncider par un tel glissement. Nous désignerons généralement un vecteur par une seule lettre surmontée d'une flèche, par ex. : \vec{A} , \vec{U} , \vec{V} , etc. Le segment déterminé par une portion de droite orientée d'origine A et d'extrémité B, sera désigné par \vec{AB} . Donc, si \vec{V} est un vecteur, \vec{V} est son segment, V la mesure de ce segment et $|V|$ sa longueur ou la mesure de sa longueur. Il est à remarquer qu'il n'y a pas lieu de distinguer en général par des notations différentes les longueurs et leurs mesures parce que, à chaque relation ou opération sur les longueurs correspond une relation ou opération sur leurs mesures ; au contraire, il faut distinguer les segments de leurs mesures par des notations différentes parce que la somme de plusieurs segments n'est pas en général la somme de leurs mesures et parce que le segment-produit de deux segments, n'a pas en général pour mesure le produit de leurs mesures.

Un système de vecteurs \vec{S} est un ensemble de vecteurs. La somme des segments d'un système \vec{S} s'appelle sa résultante générale ; on peut l'appeler simplement sa somme-segmentaire et la désigner par \vec{S} . Deux systèmes de vecteurs sont égaux si on peut passer de l'un à l'autre par les opérations élémentaires : 1° remplacer un vecteur par un vecteur égal ; 2° remplacer plusieurs vecteurs dont les droites sont concourantes en o par un vecteur dont le segment est la somme-segmentaire des vecteurs donnés et dont la droite passe par le même point o, et inversement. La somme de deux systèmes de vecteurs est le système formé par l'ensemble des vecteurs des deux systèmes donnés.

Le moment d'un vecteur \vec{A} par rapport à un point O est le segment $\vec{OI} \cdot \vec{A}$, I étant un point quelconque de la droite du vecteur. Nous le désignerons par $\overline{mom} (O, \vec{A})$ ou \vec{A}_o .

Si le vecteur est désigné par une seule lettre \vec{A} il est commode aussi de représenter son moment par rapport à un point O par la lettre grecque correspondante. De sorte que $\vec{z} = \vec{A}_o = \overline{mom} (O, \vec{A}) = \vec{OI} \cdot \vec{A}$. Si nous avons besoin de prendre le moment par rapport à un autre point nous le désignerons si possible par O' et nous écrirons $\vec{z}' = \vec{A}_{o'}$. Etant donné un système de vecteurs, $\vec{S} = \sum \vec{A}_i$ on écrira aussi, par définition : $\vec{z} = \vec{S}_o = \overline{mom} (O, \vec{S}) = \sum \vec{z}_i = \sum \vec{A}_{i_o} = \sum \overline{mom} (O, \vec{A}_i) \vec{U}$.

Le moment d'un vecteur-unité \vec{U} (c'est-à-dire d'un vecteur de longueur 1) porté une droite D par rapport à une droite Δ sera désigné par $\overline{mom} (\Delta, \vec{U})$. C'est la projection sur Δ du moment de \vec{U} par rapport à un point de Δ . On n'aura besoin de choisir une orientation sur Δ , que si on désire mesurer ce moment.

Le moment par rapport à Δ d'un vecteur quelconque \vec{V} porté par

une axe défini par le vecteur-unité \vec{U} sera $\overline{\text{mom}}(\Delta, \vec{V}) = V \overline{\text{mom}}(\Delta, \vec{U})$ sa mesure sera $\text{mom}(\Delta, \vec{V}) = V \text{mom}(\Delta, \vec{U})$.

Le *moment relatif de deux axes* \vec{U} et \vec{U}' sera la mesure du moment de \vec{U}' par rapport à l'axe \vec{U} . C'est donc un nombre que nous désignerons par $\text{mom}(\vec{U}, \vec{U}')$.

Le *moment relatif de deux vecteurs* \vec{V} et \vec{V}' est alors par définition $\text{mom}(\vec{V}, \vec{V}') = V V' \text{mom}(\vec{U}, \vec{U}')$. On voit l'analogie avec le produit scolaire ; $\text{mom}(\vec{U}, \vec{U}')$ remplace $\cos(\vec{U}, \vec{U}')$.

Par définition le *moment relatif de deux systèmes de vecteurs* $\vec{S} = \sum \vec{V}_i$ $\vec{S}' = \sum \vec{V}'_j$ est $\text{mom}(\vec{S}, \vec{S}') = \sum \vec{V}_i \vec{V}'_j$. Il ne change pas si on remplace un des systèmes par un système égal. Il est commutatif, et distributif par rapport à l'addition vectorielle. C'est donc un produit que l'on peut appeler *produit vectoriel* et que l'on peut écrire $\vec{S} \vec{S}' = \sum \vec{V}_i \vec{V}'_j$.

Le moment relatif d'un système \vec{S} par rapport à lui-même ou son *carré vectoriel* \vec{S}^2 s'appelle aussi son *auto-moment*.

Avec ces définitions et notations la condition nécessaire et suffisante pour qu'un système \vec{S} soit nul est que sa *somme-segmentaire* \bar{S} et que son moment $\bar{\sigma}$ par rapport à un point quelconque O soient nuls.

Un *couple* est un système de vecteurs \vec{C} dont la somme segmentaire \bar{C} est nulle. Son moment est $\bar{\gamma}$ (et non son axe). Si on le réduit à un *couple de deux vecteurs*, ces vecteurs ont des segments opposés.

On voit, par ce qui précède, l'avantage qu'il y a pour le langage, et pour le calcul symbolique à supprimer les locutions, *vecteurs équipolents*, *vecteurs équivalents*, et à faire porter les définitions non pas sur les relations et les opérations, mais sur les éléments eux-mêmes, en distinguant nettement les grandeurs suivantes : portion de droite orientée, vecteur, segment, longueur, d'après leur degré de liberté, comme on dit en cinématique.

TH. ROUSSEAU (Dijon).

3. Propositions diverses

Arithmétique

Diviser un nombre a par un nombre b , c'est trouver combien de fois b est contenu dans a .

Quel nom donner au nombre ainsi obtenu ? Des auteurs l'appellent *quotient approché à une unité près*, d'autres *quotient par défaut à une unité près* ; mais tous sont d'accord pour abandonner ces expressions trop compliquées et pour dire simplement le *quotient*. Ce dernier mot est d'ailleurs employé plus loin pour désigner tout autre chose.

Ne pourrait-on lever la difficulté en adoptant un mot nouveau, par exemple le *quoties* ?

Abandonner le signe : qu'on n'emploie guère en mathématiques ou

le conserver pour représenter le quoties, écrire $31 : 7 = 4$. La notation $\frac{31}{7}$ représente le quotient de 31 par 7. Tannery représente par $\frac{a}{b}$ le quotient de a par b et ne signale pas la notation $a : b$; il ajoute plus tard que si la fraction est ausssi représentée par $\frac{a}{b}$, les 2 notations sont concordantes.

Puisqu'une fraction qui ne peut être simplifiée est appelée *irréductible*, les deux problèmes de la simplification d'une fraction devraient s'énoncer : 1) réduire une fraction, 2) réduire complètement une fraction.

ISAY (Carnot).

L'expression $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ est un *quotient*, de même que l'expression $(a-b) - (c-d)$ est une différence.

Système métrique. — Dans le second cycle, adopter le kilogramme comme *unité de masse* et non comme *unité de force*, l'unité de force étant une unité dérivée suivant les règles habituelles.

Divers collègues ont demandé si un usage est établi pour placer la virgule lorsqu'on utilise les puissances de 10 dans la mesure des grandeurs physiques. M. Guillaume dit à ce sujet (*Revue générale des Sciences*, octobre 1912) : « Beaucoup de physiciens emploient indifféremment toutes les puissances de 10 et donnent comme règle la meilleure celle qui consiste à écrire toujours devant la virgule un chiffre significatif, l'ordre étant établi par l'exposant de la puissance de 10. Il est plus satisfaisant pour l'esprit d'acquérir la notion des grandeurs progressant par puissances de 1000 et de n'utiliser que les puissances de 10 progressant de 3 en 3. Tel est du moins le sentiment de tous ceux qui ont beaucoup pratiqué le système décimal... »

Algèbre

L'algèbre comprend le calcul des nombres imaginaires ou complexes ; un nombre complexe est donc un nombre algébrique. Du reste l'expression : *forme algébrique* s'emploie dans le cas où il y entre des nombres complexes. Les nombres non-complexes pourraient s'appeler *réels* ou *relatifs*.

L'expression somme algébrique pourrait être remplacée par *somme généralisée*.

Au lieu de moyenne arithmétique, moyenne géométrique, moyenne harmonique de plusieurs nombres, on pourrait dire : *moyenne somme*, *moyen produit*, *moyen inverse*.

Une expression algébrique étant définie (p. 37), nous dirons que deux expressions algébriques sont *identiques* lorsqu'elles indiquent les

mêmes opérations à faire sur les mêmes nombres et dans le même ordre.

Une expression algébrique définit une *fonction* des lettres qui y entrent. Deux expressions sont *équivalentes* ou deux fonctions sont *égales* lorsqu'elles ont des valeurs numériques égales pour tous les systèmes de valeurs des lettres qui y figurent.

Une *équation* est une égalité entre deux fonctions non égales. Une *inéquation* est une inégalité entre deux fonctions non égales.

On dit que y est *fonction* de x si y n'est pas arbitraire quand x est choisi. La fonction est *bien déterminée* si y est bien déterminé quand x est choisi ; elle est à n *déterminations* si y a n valeurs quand x est choisi.

Dire : « y a pour limite y_0 quand x a pour limite x_0 » et ne pas dire « y a pour limite y_0 quand x égale x_0 ».

Une fonction y est *continue* pour $x = x_0$ quand sa valeur pour $x = x_0$ est égale à sa limite lorsque x a pour limite x_0 .

Lorsqu'une fonction y est le quotient de deux fonctions $f(x)$, $g(x)$ qui ont toutes deux pour limites 0 quand x a pour limite x_0 , il ne faut pas dire : y se présente sous une forme indéterminée $\frac{0}{0}$, ou je cherche la vraie valeur de y ou je lève l'indétermination, il faut dire : je cherche la *limite* de y lorsque x a pour limite x_0 .

ROUSSEAU (Dijon).

À la définition donnée précédemment (p. 37) : « *éliminer* x entre les équations d'un système, c'est former un nouveau système ne contenant pas x et vérifié par toutes ses solutions », on oppose une autre définition : « *L'élimination* a pour objet de substituer à un système de relations un système de relations *équivalent*, mieux approprié au but qu'on se propose d'atteindre » (Cf. *Revue de l'Enseignement des sciences*, n° 56, juin 1912).

On dit ordinairement que deux équations sont *équivalentes* lorsqu'elles ont exactement les mêmes racines. Cette définition est-elle entièrement satisfaisante et peut-on l'appliquer aux équations $x - 1 = 0$ $(x - 1)^3 = 0$?

Appeler *nombres algébriques* les nombres positifs, nuls ou négatifs, c'est appeler nombres algébriques les nombres $+\pi$ et $-\pi$, qui, précisément, ne sont pas des nombres algébriques.

Géométrie

Le mot *solide* en géométrie peut-être remplacé par *figure invariable*, c'est-à-dire figure définie à un déplacement près. La *forme* d'une figure est définie à une similitude près. Lorsqu'un triangle est constamment semblable à un triangle donné, dire qu'il est *variable* et de *forme constante*.

Dire *cercle* et non *circonférence* ; on comprendra fort bien les expressions : tangente au cercle, longueur du cercle, aire du cercle, cercles tangents, etc.,.

Parler du *point double* de l'homothétie et du *pôle* de l'inversion, car dans ce dernier cas c'est l'homologue des points à l'infini.

• Conserver le mot *symétrie* pour les symétries par rapport à un point ou un plan et dire *transposition* pour la symétrie par rapport à une droite ; ex. : le transposé d'un point, la transposée d'une figure.

ROUSSEAU (Dijon).

L'expression « périmètre d'un cercle » explique naturellement le choix de la lettre π pour représenter le rapport du périmètre au diamètre.

Le mot « parallèle » ne suffit pas pour désigner le résultat d'une translation si on lui conserve le sens habituel de non-rencontre ; il faut un autre mot. Le mot « équipollent » serait employé pour désigner le résultat d'une translation, de même que le mot « homothétique » s'applique à l'homothétie, etc...

Vecteurs. — L'usage de la langue veut qu'une droite ait toujours une direction et que toutes les droites parallèles aient la même direction. Dès lors : 1) l'expression *droite dirigée* employée pour désigner une droite pourvue d'un sens est fautive ; 2) il ne faut pas confondre la *direction* d'un vecteur et le *support* d'un vecteur.

Le *vecteur* est un être géométrique qui comporte une direction, un sens sur cette direction, et une grandeur ; dans certaines questions, on lui impose un support ou une origine déterminés.

L'usage des *segments* revient purement et simplement à l'emploi des nombres relatifs en géométrie. On rencontre le segment comme cas particulier du vecteur, lorsque l'élément essentiel du vecteur, la direction, disparaît. Les relations segmentaires sont ordinairement des relations d'*abscisses* et elles s'appliquent tout aussi bien à des abscisses curvilignes.

Dire le *support* d'un vecteur et non sa ligne d'action. Définir le moment d'un vecteur par rapport à une *droite* et non par rapport à un axe ; on n'utilise les axes dans les problèmes que pour les calculs.

Descriptive

Lorsqu'on emploie deux plans de projection, le premier s'appelle plan *horizontal* et le deuxième plan *vertical*. Les droites parallèles au premier sont des *horizontales*, les droites parallèles au second sont des *frontales* ; les plans parallèles sont *horizontaux* ou *frontaux*. Ne serait-il pas plus naturel de désigner par plan *frontal* de projection le second plan de projection ?

ROCQUEMONT (Rouen)

Un plan donné par ses traces est souvent désigné par $P \times Q$; la notation est mauvaise. Employer la notation $p \times q'$, en plaçant p' et q sur la ligne de terre.
