Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Je remercie les lecteurs, en particulier Pierre Campet, qui m'ont adressé des courriers chaleureux. Raymond Heitz demande si un corrigé au problème 495-1 verra le jour. Je n'ai pu trouver qu'une réponse partielle pour le moment, et les lecteurs semblent être dans le même cas. Un état des lieux sera publié dans le numéro 512, c'est promis.

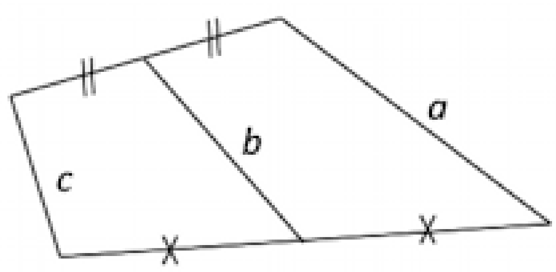
Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 511–1

Trouver tous les polynômes scindés sur $\mathbb{R}$ et à coefficients dans $\{-1,0,1\}$.

Problème 511–2 (Michel Lafond (Dijon))

Soit Q un quadrilatere convexe non aplati. Deux côtes opposés de Q mesurent a et c. La médiane joignant les milieux des deux autres côtés mesure b. Démontrer que si $b^2 = \frac{a^2}{3} + c^2$, alors Q est un trapèze.



Problème 511–3

Une application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ transformant tout segment en segment est-elle automatiquement continue ?

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 499–1 (Michel Lafond, Dijon)

On pose $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et pour $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n} = a_n$ et $a_{2n+1} = a_n + a_{n+1}$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n^{0,695}$. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers naturels $n \in \mathbb{N}$ tels que $a_n \geq n^{0,694}$.

Solutions de Maurice Bauval (Versailles), Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orque),

La solution qui suit est due à Pierre Renfer. On cherche un réel α, le plus petit possible, compris au sens strict entre 0 et 1, tel que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n \leq n^\alpha$.
On procède par récurrence forte. Pour $n = 0$ ou $n = 1$, le choix de α importe peu puisque

$$a_0 = 0 \leq 0^\alpha \; ; \; a_1 = 1 \leq 1^\alpha.$$

On suppose qu'il existe un réel $\alpha \in \,]0, 1[$ pour lequel l'inégalité $a_n \leq n^\alpha$ est établie jusqu'à un certain rang $\mathrm{N} - 1$ et l'on veut montrer que $a_\mathrm{N} \leq \mathrm{N}^\alpha$.
Si N est pair, disons $\mathrm{N} = 2n$, c'est facile puisque

$$a_{2n} = a_n \leq n^\alpha \leq (2n)^\alpha.$$

Si $\mathrm{N} = 2n + 1$, on distingue différents cas.
Si n est impair, on écrit

$$a_{2n+1} = a_n + a_{n+1} = a_n + a_{\frac{n+1}{2}}.$$

Si n est un multiple de 4,

$$a_{2n+1} = a_n + a_{n+1} = a_{\frac{n}{4}} + a_{n+1}.$$

Si enfin $n \equiv 2 \bmod 4$, on écrit

$$a_{2n+1} = a_n + a_{n+1} = a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1} = 2a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n+2}{4}}.$$

La démonstration serait terminée si l'on avait pour les trois cas les inégalités

$$n^\alpha + \left(\frac{n+1}{2}\right)^\alpha \leq (2n+1)^\alpha. \tag{1}$$

$$\left(\frac{n}{4}\right)^\alpha + (n+1)^\alpha \leq (2n+1)^\alpha. \tag{2}$$

$$2\left(\frac{n}{2}\right)^\alpha + \left(\frac{n+2}{4}\right)^\alpha \leq (2n+1)^\alpha. \tag{3}$$

Pour établir ces trois inégalités, on étudie le signe des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$f_1(x)=x^\alpha+\left(\frac{x+1}{2}\right)^\alpha-(2x+1)^\alpha,$$

$$f_2(x)=\left(\frac{x}{4}\right)^\alpha+(x+1)^\alpha-(2x+1)^\alpha,$$

et

$$f_3(x)=2\left(\frac{x}{2}\right)^\alpha+\left(\frac{x+2}{4}\right)^\alpha-(2x+1)^\alpha.$$

Pour $x>0$

$$f_1(x)=x^\alpha g_1(x),$$

où l'on a posé

$$g_1(x)=1+\left(\frac{x+1}{2x}\right)^\alpha-\left(\frac{2x+1}{x}\right)^\alpha.$$

Un calcul donne

$$\frac{x^{\alpha+1}}{2}g_1'(x)=(2x+1)^{\alpha-1}-\frac{1}{2}\left(\frac{x+1}{2}\right)^\alpha=\left(\frac{x+1}{2}\right)^{\alpha-1}\left(\left(\frac{4x+2}{x+1}\right)^{\alpha-1}-\frac{1}{2}\right).$$

Pour $x>0$ et $\alpha\geq\frac{1}{2}$, on a, puisque l'exposant $\alpha-1$ est négatif,

$$\left(\frac{4x+2}{x+1}\right)^{\alpha-1}\geq 4^{\alpha-1}\geq\frac{1}{2},$$

donc $g_1'(x)\geq 0$. L'application g_1 est croissante sur $]0,+\infty[$. De plus,

$$\lim_{x\to+\infty}(g_1(x))=1+\frac{1}{2^\alpha}-2^\alpha=\frac{2^\alpha+1-2^{2\alpha}}{2^\alpha},$$

et cette expression est nulle si

$$2^\alpha=\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2},$$

c'est-à-dire si

$$\alpha=\frac{\ln(\varphi)}{\ln(2)}.$$

Toujours pour $x>0$,

$$f_2(x)=x^\alpha g_2(x),$$

avec

$$g_2(x) = \frac{1}{4^\alpha} + \left(\frac{x+1}{x}\right)^\alpha - \left(\frac{2x+1}{x}\right)^\alpha.$$

Or

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} g_2{}'(x) = (2x+1)^{\alpha-1} - (x+1)^{\alpha-1} < 0.$$

L'application g_2 est décroissante sur $]0,+\infty[$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} g_2(x) = 0$. Donc g_2 est négative et f_2 aussi.
Enfin, pour $x > 0$,

$$f_3(x) = x^\alpha g_3(x),$$

avec

$$g_3(x) = \frac{2}{2^\alpha} + \left(\frac{x+2}{4x}\right)^\alpha - \left(\frac{2x+1}{x}\right)^\alpha$$

et

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} g_3{}'(x) = (2x+1)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\left(\frac{x+2}{4}\right)^{\alpha-1},$$

soit

$$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha} g_3{}'(x) = \left(\frac{x+2}{4}\right)^{\alpha-1}\left(\left(\frac{8x+4}{x+2}\right)^{\alpha-1} - \frac{1}{2}\right).$$

Pour $x > 0$ et $1 \geq \alpha \geq \frac{2}{3}$,

$$\left(\frac{8x+4}{x+2}\right)^{\alpha-1} \geq \left(\frac{8x+16}{x+2}\right)^{\alpha-1} \geq 8^{\alpha-1} \geq \frac{1}{2}.$$

L'application g_3 est croissante pour $\alpha \geq \frac{2}{3}$ et

$$\lim_{x\to+\infty}\left(g_3(x)\right) = \frac{2}{2^\alpha} + \frac{1}{4^\alpha} - 2^\alpha = \frac{2\cdot 2^\alpha + 1 - 2^{2\alpha}}{2^{2\alpha}},$$

expression nulle si $2^\alpha = \varphi$, c'est-à-dire si $\alpha = \frac{\ln(\varphi)}{\ln(2)} \geq \frac{2}{3}$. Et pour cette valeur de α, la fonction g_3 donc la fonction f_3 est négative, comme souhaité.
En conclusion, en choisissant

$$\alpha = \frac{\ln(\varphi)}{\ln(2)} \simeq 0{,}694242,$$

les fonctions f_1, f_2, f_3 sont négatives sur $[1,+\infty[$, donc les inégalités (1, 2, 3) sont vraies. Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n \leq n^{\frac{\ln(\varphi)}{\ln(2)}} \leq n^{0{,}695}.$$

Pour la seconde partie de l'énoncé, on va construire une suite extraite de la suite (a_n) à l'aide de la suite d'indices (u_n) donnée par

$$u_0 = 1;\ u_1 = 3;\ u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n.$$

Puisque la suite u est définie par une récurrence linéaire double, on trouve classiquement

$$u_n = \frac{2^{n+2} - (-1)^n}{3}.$$

Les entiers u_{n+1} et $2\ u_n$ sont consécutifs puisque

$$u_{n+1} - 2u_n = \frac{2^{n+3} + (-1)^n}{3} - \frac{2^{n+3} - 2(-1)^n}{3} = (-1)^n.$$

Ce bel argument permet d'affirmer que la suite $b = a \circ u = \left(a_{u_n}\right)$ vérifie la relation

$$b_{n+2} = a_{u_{n+2}} = a_{u_{n+1}} + a_{2u_n} = a_{u_{n+1}} + a_{u_n} = b_{n+1} + b_n.$$

Avec les conditions initiales $b_0 = a_1 = 1$ et $b_1 = a_3 = 2$, on trouve

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+2} - \psi^{n+2}\right)$$

avec

$$\psi = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}.$$

Noter que (b_n) est la suite de Fibonacci décalée de deux rangs. On a alors les équivalents suivants en $+\infty$:

$$u_n \sim \frac{2^{n+2}}{3}, \quad u_n^{\alpha} \sim \frac{\varphi^{n+2}}{3^{\alpha}}, \quad b_n \sim \frac{\varphi^{n+2}}{\sqrt{5}}.$$

Ainsi,

$$\frac{a_{u_n}}{u_n^{\alpha}} = \frac{b_n}{u_n^{\alpha}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{3^{\alpha}}{\sqrt{5}}.$$

Pour tout $\beta < \alpha$, (dans l'énoncé, **Michel Lafond** choisit $\beta = 0{,}694$), posons $\beta = \alpha - \varepsilon$ avec $\varepsilon > 0$. Alors

$$\frac{a_{u_n}}{u_n^{\beta}} \sim \frac{3^{\alpha}}{\sqrt{5}} u_n^{\varepsilon} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Il existe un rang n_0 à partir duquel $\dfrac{a_{u_n}}{u_n^{\beta}} > 1$, c'est-à-dire que $a_{u_n} > u_n^{\beta}$, ce qui répond à la seconde partie de la question.

Problème 499–3 (Francois Duc, Orange)

On pose $u_1 = 1$, $u_2 = 2$. Pour $n \geq 2$, u_{n+1} est le plus petit entier naturel strictement positif, différent de $u_1, u_2, \ldots, u_n$, non premier avec u_n. Montrer que la suite u est une permutation de $\mathbb{N}^*$. Étudier son comportement en $+\infty$.

Solutions de Francois Duc (Orange) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

Cette suite s'appelle la suite de l'électrocardiogramme (« the EKG sequence » en anglais). **Francois Duc** précise que cet exercice a été publié dans le journal Le Monde par **Élisabeth Busser** et **Gilles Cohen**.

D'après l'énoncé, la suite u est injective, puisque pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_{n+1} est différent de $u_1, \ldots, u_n$. **Pierre Renfer** en déduit alors que u diverge vers $+\infty$. Soit $A \in \mathbb{N}^*$. L'ensemble des antécédents des entiers de $[1,A]$ est fini et admet donc un élément maximal n_0. Pour tout $n > n_0$, on a donc $u_n > A$.

Montrons par l'absurde que u prend une infinité de valeurs paires. Si tel n'est pas le cas, il existe un entier M tel que u ne prenne aucune valeur paire supérieure ou égale à 2M. Il existe un entier n_0 tel que $u_n > 2M^2$ pour tout $n > n_0$.
Fixons un entier $n > n_0$. Alors u_n est un nombre impair et $u_n = kp$ où p est un facteur premier de u_{n-1}.
Si $k > 2M$, on a $u_n > 2Mp$ alors que $2Mp$ est non premier avec u_{n-1} et qu'il est une valeur non prise par la suite.

Si $3 \leq k \leq 2M$, alors $p > \dfrac{2M^2}{k} \geq M$ et $u_n > 2p$ alors que $2p$ est non premier avec u_{n-1} et qu'il est une valeur non prise par la suite.
Reste le cas $k = 1$. Alors $u_n = p > 2M^2$ et $u_{n+1} = k'p > 2p$ alors que $2p$ est non premier avec u_n et qu'il est une valeur non prise par la suite.
On a dans tous les cas une contradication.
On montre maintenant que u prend toutes les valeurs paires. Par l'absurde, si une valeur $2m$ n'est pas prise, il existe un entier n_0 tel que pour tout $n > n_0$, $u_n > 2m$. D'après le point précédent, il existe un entier $n > n_0$ tel que u_n soit pair. Alors $u_{n+1} > 2m$ alors que $2m$ est non premier avec u_n et qu'il est une valeur non prise par la suite, d'où la contradition.
Enfin, montrons que la suite est surjective. Supposons qu'une valeur m ne soit pas prise. Il existe un entier n_0 tel que, pour tout $n > n_0$, $u_n > m$. On fixe $n > n_0$ tel que u_n soit un multiple de $2m$, ce qui est possible d'après l'étude précédente. Alors

$u_{n+1} > m$ et de nouveau, m est non premier avec u_n et est une valeur non prise par la suite. C'est une contradiction. Ainsi, la suite u est une permutation de $\mathbb{N}$.

Problème 503–3

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$, un nombre premier $p > 3$ et un sous-groupe fini G du groupe GL$n(\mathbb{Z})$ des matrices inversibles de taille n à coefficients entiers. Enfin, F_p est le corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Montrer que l'application naturelle

$$\begin{cases} \mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n\left(\mathrm{F}_p\right) \\ \mathrm{A} \mapsto \mathrm{A} \bmod p \end{cases}$$

est injective.

Réponses de Michel Bataille (Rouen), Pierre Campet (Paris), Georges Lion (Wallis) qui signale avoir été aidé par un anonyme, Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques)

Michel Bataille me signale que cet énoncé a éte donné à l'oral des ENS et précise qu'on en trouve un corrigé dans l'excellent livre de **Serge Francinou**, **Hervé Gianella**, **Serge Nicolas**, *Exercices de mathématiques, Oraux X-ENS, algèbre 2*, publié par les éditions Cassini. À ma connaissance, ce résultat est un lemme dû à **Jean-Pierre Serre** et qui permet entre autre de borner le cardinal d'un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z})$.

Voici une solution possible. Soit A une matrice dans le noyau de l'application $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_p)$. On va montrer que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n$ en prouvant que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et que sa seule valeur propre est 1.

• Tout élément de G est d'ordre fini (d'ordre divisant le cardinal de G d'après le théorème de Lagrange) donc est diagonalisable sur $\mathbb{C}$ et a des valeurs propres complexes de module 1. Le problème revient donc à montrer que les valeurs propres de la matrice A valent 1, autrement dit que le polynôme caractéristique de A est $(\mathrm{X} - 1)^n$.

Dire que A est dans le noyau de $\mathrm{G} \to \mathrm{GL}_n(\mathrm{F}_p)$ signifie qu'il existe une matrice M à coefficients dans $\mathbb{Z}$ telle que $\mathrm{A} = \mathrm{I}_n + p\mathrm{M}$. Le polynôme caractéristique χ_A de la matrice A vérifie

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = \det(\mathrm{XI}_n - \mathrm{A}) = \det\big((\mathrm{X}-1)\mathrm{I}_n - p\mathrm{M}\big)$$

et par multilinéarité,

$$\chi_\mathrm{A}(\mathrm{X}) = p^n \det\left(\frac{\mathrm{X}-1}{p} - \mathrm{M}\right) = p^n \chi_\mathrm{M}\left(\frac{\mathrm{X}-1}{p}\right).$$

On pose $\mathrm{P}_n = \chi_\mathrm{A}$ et $\mathrm{Q}_n = \mathrm{M}$. On va prouver que $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X} - 1)^n$, ce qui permettra de conclure.

• Les polynômes P_n et Q_n sont unitaires, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, les racines complexes $z_1, \ldots, z_n$ de P_n sont de modules 1 et l'on a la relation

$$\chi_A(X) = p^n \det\left(\frac{X-1}{p} - M\right) = p^n \chi_M\left(\frac{X-1}{p}\right). \tag{4}$$

Donc

$$\left|p^n Q_n(0)\right| = \left|P_n(1)\right| = \prod_{k=1}^{n} |1 - z_k| \leq 2^n.$$

Puisque $p \geq 3$, l'entier $Q_n(0)$ est nul et donc l'entier $P_n(1)$ aussi. Ainsi, il existe deux polynômes unitaires P_{n-1} et Q_{n-1} dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que

$$P_n(X) = (X-1)P_{n-1}(X) \quad \text{et} \quad Q_n(X) = XQ_{n-1}(X).$$

La relation (4) donne alors

$$(X-1)P_{n-1}(X) = p^n\left(\frac{X-1}{p}\right)Q_{n-1}\left(\frac{X-1}{p}\right),$$

soit

$$P_{n-1}(X) = p^{n-1}Q_{n-1}\left(\frac{X-1}{p}\right).$$

En itérant le processus, on obtient le resultat souhaité :

$$P_n(X) = (X-1)^n.$$

• Comme mentionné en introduction, ce lemme permet de borner en fonction de n le cardinal de tout sous-groupe fini de $GL_n(\mathbb{Z})$. En effet, en prenant $p = 3$ dans l'énoncé, le cardinal d'un tel sous-groupe G est inférieur au cardinal de $GL_n(F_3)$, à savoir

$$|G| \leq \prod_{k=0}^{n-1}\left(3^n - 3^k\right) < 3^{n^2}.$$