Le problème de l'abbesse aveugle

ou les avatars d'un énoncé

Julien Moreau(*)

Le problème qui fait l'objet de cet article est celui par lequel débutent les *Récréations mathématiques et physiques* de Jacques Ozanam. Pour apprécier ce que cet énoncé pouvait avoir de scandaleux, il faut songer que le livre parut en 1694, à une époque où sévissait la censure royale[1] et où Louis XIV vieillissant était sous la coupe de la très austère madame de Maintenon.

1. L'énoncé originel[2] et sa solution

1.1. Le problème

« *Une abbesse aveugle visitant ses religieuses, qui sont dispersées également* [autrement dit : il y en a le même nombre dans chaque cellule] *dans huit cellules construites aux quatre angles d'un carré et au milieu de chaque côté, trouve partout un nombre égal de personnes dans chaque rang, qui est composé de trois cellules ; et en les visitant une seconde fois, elle trouve dans chaque rang le même nombre de personnes, quoiqu'il y soit entré quatre hommes ; et en les visitant une troisième fois, elle trouve encore dans chaque rang le même nombre de personnes, quoique les quatre hommes soient sortis chacun avec une religieuse ; on demande comment cela se peut et se doit faire.* »

cell.	cell.	cell.
cell.	jardin	cell.
cell.	cell.	cell.

plan du cloître

1.2. Commentaire

Ce texte impie est d'autant plus surprenant qu'Ozanam était bon catholique, voire dévot. L'explication la plus logique est donnée dans l'édition posthume du même ouvrage sortie en 1778 : « Feu M. Ozanam propose ce problème de manière assez indécente, et commence même par là ses *Récréations mathématiques*, apparemment pour piquer la curiosité de ses lecteurs. »

Cet avis est fort vraisemblable, car Ozanam, qui gagnait sa vie en enseignant les mathématiques à de riches élèves, était bien placé pour savoir à quel point il faut

(*) julien.e.moreau@gmail.com

(1) Jusqu'à la Révolution, un livre ne pouvait paraître en France sans avoir reçu l'aval de la censure… ce qui faisait bien l'affaire des éditeurs des pays voisins et des diffuseurs clandestins.

(2) Le plan ci-joint n'est pas d'Ozanam.

parfois user d'artifices pour retenir l'attention de ceux que l'on a entrepris d'instruire.

1.3. La solution d'Ozanam

L'énoncé ne précise pas le nombre initial de nonnes dans chaque cellule, mais ce nombre n est sans importance, car le changer revient à ajouter une constante à tous les termes des tableaux ci-contre, qui correspondent à $n = 3$. La solution d'Ozanam est formée de ces tableaux et d'un texte explicatif dont voici le début.

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

État 1 *État 2* *État 3*

« Pour résoudre le premier cas, auquel les quatre hommes sont entrés dans les cellules, il faut qu'un homme se mette dans la cellule de chaque angle, et que deux religieuses en sortent pour se mettre dans chaque cellule du milieu ; en sorte que chaque cellule des angles contienne une personne [de] moins qu'auparavant, et que chaque cellule du milieu en contienne deux de plus.… ».

Ozanam, donc, exhibe une solution et montre qu'elle marche, mais il ne dit comment il y est arrivé ni si c'est la seule (ce qui n'est pas le cas).

2. Un siècle plus tard : une version expurgée

2.1. Le travail de monsieur de C.G.F

Jacques Ozanam est mort en 1718. Soixante ans après sa mort parut une nouvelle édition de ses *Récréations*, que la page de titre annonçait comme « totalement refondue et considérablement augmentée ». L'auteur, « monsieur de C.G.F. », était en réalité Jean Étienne Montucla, savant notoire qui écrivit plus tard une célèbre histoire des mathématiques.

Le problème de l'abbesse, qui faisait au livre originel une ouverture fracassante, se trouve dans cette nouvelle mouture relégué en milieu d'ouvrage, noyé dans la masse. Et les religieuses de petite vertu sont devenues d'innocents jetons.

Cela ne heurte plus les âmes saintes, mais évidemment c'est moins drôle. Le plus curieux est que cette remise dans le droit chemin eut lieu alors que fleurissait en cette fin du XVIIIe siècle la littérature libertine(3). Plus curieux encore, Montucla exerçait la fonction de censeur royal. En tant que tel, il lui revenait de donner le feu vert pour la parution du livre. Il n'aurait donc eu aucun mal à conserver l'énoncé sous sa forme initiale.

On est cependant tenté de voir dans ce retour à la bienséance un je ne sais quoi d'hypocrite, car après avoir formulé sa version asexuée du texte et blâmé Ozanam, monsieur de C.G.F. reproduit en son entier le damnable problème et le commente longuement.

(3) *Les Liaisons dangereuses*, par exemple, sont de 1782.

2.2. L'énoncé expurgé

« Comment peut-on disposer dans les huit cases extérieures d'un carré divisé en 9 des jetons, en sorte qu'il y en ait toujours 9 dans chaque bande de l'enceinte et que cependant ce nombre [le nombre total de jetons] puisse varier depuis 20 jusqu'à 32 ? »

2.3. La solution de monsieur de C.G.F.

« La solution se trouvera facilement par l'inspection des quatre tableaux qui suivent […]. Il est clair qu'il y en a [des jetons] toujours 9 dans chaque bande d'enceinte, et cependant, dans le premier cas, il y a en tout 24, dans le second 20, dans le troisième 28, et dans le quatrième 32. »

$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & & 1 \\ 4 & 1 & 4 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2 & 5 & 2 \\ 5 & & 5 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 & 7 & 1 \\ 7 & & 7 \\ 1 & 7 & 1 \end{bmatrix}$
I	II	III	IV

$\begin{bmatrix} 0 & 9 & 0 \\ 9 & & 9 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & & 0 \\ 4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
V	VI

Remarque : Si *monsieur de C.G.F* précise l'énoncé d'Ozanam, améliore nettement ses explications et complète sa solution (les tableaux V et VI donnent un total de 36 et 18 respectivement), il ne s'aperçoit pas que le tableau VI n'est pas de même nature que les autres : il n'a plus en effet toutes les symétries (horizontale, verticale et par rapport aux diagonales) que possèdent ceux-ci.

3. Encore un siècle plus tard : la version du professeur Labosne

L'histoire ne s'arrête pas là. Les *Problèmes plaisants et délectables* de Bachet (1612, puis 1624) connurent en 1884 une « cinquième édition revue, simplifiée et augmentée par A. Labosne, Professeur de Mathématiques ». Elle comportait à la fin du livre un supplément de quinze problèmes ajoutés à ceux de Bachet, dont celui-ci, manifestement inspiré du problème de l'abbesse :

3.1. L'énoncé

« Un bon bourgeois fit faire dans sa cave un casier de neuf cases disposées en carré ; la case du milieu était destinée à recevoir les bouteilles vides provenant de la consommation de 60 bouteilles pleines qu'il disposa dans les 8 autres cases en mettant 6 bouteilles dans chaque case des angles et 9 dans chacune des autres cases. Son domestique enleva d'abord 4 bouteilles qu'il vendit, et il disposa les bouteilles restantes de manière qu'il y eût toujours 21 bouteilles sur chaque côté du carré. Le maître, trompé par cette disposition, pensa que son domestique n'avait fait qu'une transposition de bouteilles, et qu'il y en avait toujours le même nombre. Le domestique profita de la simplicité de son maître pour enlever de nouveau 4 bouteilles, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'il ne fût plus possible d'enlever 4 sans que le nombre 21 cessât de se trouver sur chaque côté du carré. On demande comment il s'y prit à chaque fois, et de combien de bouteilles il fit tort à son maître. »

À partir du même thème (seuls les chiffres ont changé), passer en deux siècles des nonnes dévergondées aux domestiques indélicats, n'est-ce pas un bel exemple de ces « progrès de l'esprit humain » chers au cœur de Condorcet ?

3.2. La solution

Comme Ozanam, Labosne suppose, au moins au début de son étude, que les cases de coin ont toutes un nombre identique de bouteilles et qu'il en est de même pour les cases du milieu.

Mais dès les premières lignes une nouveauté apparaît :

« En désignant par a le nombre de bouteilles mises dans chacun des angles, et par b le nombre de celles qui se trouvent dans chacune des autres cases, on voit que… ». La suite du raisonnement revient à dire que si $2a + b$, nombre de bouteilles de chaque rangée, reste fixe, alors chaque fois que b diminue de 2, a augmente de 1, donc $a + b$ diminue de 1 et le nombre total de bouteilles, $4(a + b)$, diminue de 4.

La différence avec les deux solutions précédentes saute aux yeux : l'intervention de la **notation algébrique**, qui au XIX^{e} siècle est enfin devenue un instrument d'usage courant. Le changement est d'autant plus frappant qu'Ozanam et Montucla, savants très estimés de leurs contemporains, n'utilisent aucun calcul littéral dans leur solution, alors que Labosne, professeur de mathématiques notoire sans plus, s'en sert comme d'un outil naturel.

En outre, à la fin de l'étude, il examine le cas d'une répartition quelconque pour arriver à la conclusion suivante :

« Pour une somme s assignée [s étant la somme des termes d'un côté du carré], le nombre maximum de bouteilles a lieu quand on n'en met pas dans les cases angulaires : ce maximum est $4s$; et le minimum a lieu quand on n'en met pas dans les cases du milieu ; ce minimum est $2s$. »

3.3. Moralité

On peut pour finir résumer ainsi l'évolution du problème et de sa résolution :

- d'abord une amusette, assortie d'une solution bricolée ;
- puis une version mathématisée mais non algébrisée, où l'idée essentielle —distinguer le rôle des quatre coins de celui des quatre milieux — sert de guide à la solution ;
- enfin une version aux données plus complexes, traitée de façon approfondie par l'algèbre.

4. Exploiter ces énoncés avec une classe

- Il faut hélas écarter la version originelle : morale et laïcité obligent. Mais la version avec jetons est parfaitement faisable par tâtonnements avec de jeunes élèves, à condition de donner au départ le tableau de l'état initial comportant des 3 dans les huit cases du bord du carré.

▪ En troisième ou en seconde, on peut rechercher pour le *problème des jetons* les solutions « symétriques », c'est-à-dire du type $\begin{bmatrix} x & y & x \\ y & & y \\ x & y & x \end{bmatrix}$, à partir du point de départ $\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Cela revient à chercher les couples (x,y) tels que : $\begin{cases} 2x+y=9 \\ x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N} \end{cases}$.

On trouve aisément (0,9), (1,7), (2,5), (3,3) et (4,1) ; reste à examiner pour chacun la valeur du total des 8 cases, soit $4(x + y)$ et à la comparer à 24, total initial.

▪ La résolution du *problème des bouteilles* dans le cas « symétrique » se fait de façon analogue. On a cette fois la condition $2x + y = 21$, à laquelle il faut ajouter la décroissance de la fonction $4(x + y)$ exprimant le nombre des bouteilles. Mais, $x + (x + y)$ étant constant, la décroissance de $x + y$ équivaut à la croissance de x. La valeur initiale de x étant 6, on a donc à résoudre : $\begin{cases} 2x+y=21 \\ x>6 \\ x\in\mathbb{N}, y\in\mathbb{N} \end{cases}$.

Les couples (x,y) qui conviennent sont donc, dans l'ordre : (7,7), (8,5), (9,3), (10,1), permettant au sommelier malhonnête de voler respectivement 4, 8, 12 ou 16 bouteilles.

▪ L'étude des solutions non symétriques est plus délicate (il faut surtout éviter d'introduire comme inconnues les huit nombres inscrits dans le carré, ce qu'a très bien vu A. Labosne). Appelons s la somme des nombres inscrits le long d'un côté, qui est une donnée, c la somme des nombres inscrits aux quatre coins, m la somme des nombres correspondant aux milieux des côtés, t le total des huit nombres.

Les trois inconnues sont liées par les deux relations : $\begin{cases} 2c+m=4s \\ c+m=t \end{cases}$. Le total t est déterminé dès que sont choisies les sommes c et m, quelle que soit par ailleurs la répartition.

Des deux équations on tire $c + t = 4s$. Le minimum de t correspond donc au maximum de c, qui est $2s$, obtenu pour $m = 0$; ce minimum est donc $2s$, obtenu quand les nombres inscrits aux milieux des côtés sont nuls tous les quatre.

Si l'on reprend le cas des bouteilles ($s = 21$), le minimum est 42, ce qui correspond au vol de 18 bouteilles (le soin de trouver une distribution qui convienne est laissé au lecteur), alors que les distributions symétriques ne permettent, on l'a vu, que d'en voler 16. De façon générale, observons que, dans les distributions symétriques, c et m sont multiples de 4, donc aussi $c + m$. Elles ne permettent donc d'atteindre que les valeurs de t multiples de 4.

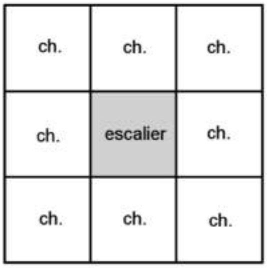
5. Une postérité anglaise

On aurait pu croire l'histoire terminée, mais elle a rebondi en 1907. L'énoncé numéro 42 des *Canterbury Puzzles*(4) de Henry Dudeney, ouvrage célèbre en Angleterre, est une variante du problème de l'abbesse. Pour s'en apercevoir, il faut y regarder de près car l'auteur a compliqué à plaisir l'énigme initiale. Il a transformé l'abbesse en abbé et le cloître en hôtellerie, ce qui ne change pas grand-chose, mais il a ajouté un étage, ce qui est une tout autre affaire.

Voici une traduction simplifiée du texte :

5.1. Le problème

L'hôtellerie d'un monastère avait deux étages, chacun avec huit chambres disposées en carré autour d'un escalier central comme ci-contre. On annonça un jour l'arrivée d'un groupe de pèlerins. « Vous les répartirez, dit le père abbé, de telle sorte qu'il y en ait onze sur la façade avant, autant sur la façade arrière et autant sur chacun des deux côtés. Toutes les chambres doivent être occupées et aucune ne doit accueillir plus de trois personnes. Enfin je veux qu'à l'étage du haut il y ait deux fois plus de monde qu'à celui du bas. »
Un arrangement satisfaisant à ces règles fut donc programmé. Mais quand les pèlerins arrivèrent, il y en avait trois de plus que prévu. Et pourtant les moines réussirent à respecter les instructions de leur abbé. Combien de pèlerins sont arrivés ?



plan d'un étage

5.2. La filiation cachée

Pour bien voir le lien du problème de l'abbé avec celui de l'abbesse, il faut au départ considérer deux chambres situées l'une au-dessus de l'autre comme un bloc. Appelons (comme à la fin du § 4) c le total des personnes logées dans les blocs de coin, m le total des personnes logées dans les blocs de milieu, t le nombre total des pèlerins. Procédons d'abord par conditions nécessaires.

Nous avons $\begin{cases} 2c+m=44 \\ c+m=t \end{cases}$ (donc $c + t = 44$) à quoi il faut adjoindre

$$\begin{cases} 8 \leq c \leq 24 \\ 8 \leq m \leq 24 \\ t \text{ est multiple de } 3 \end{cases}.$$

On retrouve les deux équations du problème des bouteilles, assorties de conditions supplémentaires.

(4) Ne pas oublier qu'en anglais *puzzle* signifie *énigme*. Le titre est une allusion aux *Contes de Canterbury*, de Chaucer, qui sont un classique de la littérature anglaise médiévale.

5.3. La solution[5]

■ De $8 \leq m \leq 24$ on tire $44 - 24 \leq 2c \leq 44 - 8$, d'où $10 \leq c \leq 18$. Mais $c + t = 44$ prouve, puisque t est multiple de 3, que c a même reste dans la division par 3 que 44, c'est-à-dire 2. Les seules valeurs possibles pour c sont donc 11, 14 et 17, ce qui donne trois triplets :

$$c = 11, m = 22, t = 33\ ; \quad c = 14, m = 16, t = 30\ ; \quad c = 17, m = 10, t = 27.$$

■ Montrons que le premier ne saurait convenir : $t = 33$ donne 22 pèlerins dans les 8 chambres du haut, dont aucune ne doit avoir plus de 3 occupants. Soit p le nombre de chambres à 1 ou 2 personnes situées à l'étage supérieur. On aurait $2p + 3(8 - p) \geq 22$, soit $p \leq 2$, ce qui veut dire que deux au plus des chambres du haut auraient moins de 3 hôtes. Les quatre chambres de coin situées à l'étage recevraient donc en tout au moins $3 + 3 + 1 + 1$, soit au moins 8 personnes ; les quatre chambres de coin situées en bas en recevant en tout au moins 4, cela ferait $c \geq 12$ alors que par hypothèse $c = 11$.

■ *Le nombre de pèlerins annoncé est donc forcément la plus basse des valeurs de t qui nous restent, soit 27, et le nombre d'arrivées est de 30.*

5.4. La vérification

Nous n'avons fait qu'exclure une des trois éventualités. Encore faut-il montrer que les deux autres sont réalisables. Dudeney le fait en parachutant une solution pour chacune :

$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&&1\\1&1&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}3&1&3\\1&&2\\3&2&3\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}1&1&1\\1&&2\\1&2&1\end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix}2&3&3\\3&&2\\3&2&2\end{bmatrix}$
Étage du bas	*Étage du haut*	*Étage du bas*	*Étage du haut*
27 pèlerins		30 pèlerins	

Il est facile de vérifier qu'elles conviennent. Il n'est pas évident pour autant que ce soient les seules.

Cas de 27 pèlerins ($c = 17$, $m = 10$)

L'étage inférieur en accueille 9, soit donc 1 par chambre, sauf une qui en reçoit 2. À une symétrie près, la répartition du rez-de-chaussée est $\begin{bmatrix}2&1&1\\1&&1\\1&1&1\end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix}1&2&1\\1&&1\\1&1&1\end{bmatrix}$.

Plaçons-nous dans le second cas ; il y a dans les chambres de coin 4 personnes au rez-de-chaussée. Ce qui implique à l'étage 13 personnes pour 4 chambres dont chacune ne peut accueillir que 3 hôtes.

(5) Ce n'est pas celle de Dudeney, qui est assez avare d'explications et n'utilise pas le calcul littéral.

La répartition en bas est donc $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. De $c = 17$, on déduit que les chambres de coin de l'étage supérieur accueillent 12 personnes, donc 3 par chambre. La répartition en haut est du type $\begin{bmatrix} 3 & x & 3 \\ y & & z \\ 3 & u & 3 \end{bmatrix}$. Sur l'avant on doit avoir 11 personnes, d'où $(2 + 1 + 1) + (3 + x + 3) = 11$, soit $x = 1$. La « règle des 11 » impose de même $y = 1$, $z = u = 2$. La solution de Dudeney est donc la seule (à une symétrie près).

Cas de 30 pèlerins ($c = 14$, $m = 16$)
Ici la solution de Dudeney n'est pas la seule, tant s'en faut. Nous n'allons pas les chercher toutes, mais montrer qu'il y en a plusieurs et pour cela étudier complètement une situation, celle où *au rez-de-chaussée il y a une seule personne dans chacune des chambres du milieu*.

La répartition du rez-de-chaussée est, à une symétrie près, $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ ou $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Dans l'un et l'autre cas, de $m = 16$, on en déduit que les chambres du milieu, à l'étage, doivent accueillir 12 pélerins, soit 3 par chambre. La répartition de l'étage est donc du type $\begin{bmatrix} x & 3 & y \\ 3 & & 3 \\ z & 3 & u \end{bmatrix}$.

- Si le rez-de-chaussée est du type $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, la « règle des 11 » impose $\begin{cases} x+y=4 \\ x+z=4 \\ y+u=4 \\ z+u=4 \end{cases}$, soit $\begin{cases} x+y=4 \\ x=u \\ y=z \end{cases}$. On en tire $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$ ou $\begin{cases} x=2 \\ y=2 \end{cases}$, la solution $\begin{cases} x=3 \\ y=1 \end{cases}$ se ramenant à la première par symétrie. On arrive donc aux deux schémas $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 3 & & 3 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, qui conviennent.

▪ Si le rez-de-chaussée est du type $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, il vient $\left\{\begin{array}{l} x+y=3 \\ x+z=3 \\ y+u=5 \\ z+u=5 \end{array}\right.$, soit $\left\{\begin{array}{c} x+y=3 \\ y+u=5 \\ y=z \end{array}\right.$.

La condition $y+u=5$ donne $\left\{\begin{array}{l} y=2 \\ u=3 \end{array}\right.$ ou $\left\{\begin{array}{l} y=3 \\ u=2 \end{array}\right.$; mais $y=3$ donnerait $x=0$, qui est exclu. Reste donc pour l'étage la solution $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, dont il est immédiat qu'elle convient.

Remarque : Ces solutions et celle de Dudeney ne sont pas les seules. Nous laissons au lecteur le plaisir de découvrir les deux solutions correspondant au rez-de-chaussée $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Références

▪ Les textes [1], [2] et [3] sont accessibles sur le site **gallica.bnf.fr** de la Bibliothèque nationale.

[1] J. OZANAM : *Récréations mathématiques et physiques*, 1694, pages 1 à 3.

[2] J. OZANAM : *Récréations mathématiques et physiques*, 1784, pages 172 à 175.

[3] C. G. BACHET : *Problèmes plaisants et délectables*, revus par A. Labosne, 1884, pages 189 à 192.

[4] P. CRÉPEL et N. PELAY : « Récréations mathématiques d'Ozanam », article instructif et amusant (seul reproche : il attribue indûment à Bachet la paternité du problème). Sur images.math.cnrs.fr

[5] H. E. DUDENEY : *The Canterbury Puzzles*, gutenberg.org/files/27635/27635-h/27635-h.htm pages 71 et 195.