Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Bruno Alaplantive
Bordeneuve
chemin de Tardibail
09100 Saint Jean du Falga

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 511–1 Daniel Reisz–Auxerre *Un exercice des Olympiades Internationales de 2012.*

Soit $n \geq 3$ un entier et soit $a_2, a_3, a_4, \ldots, a_n$ des nombres réels strictement positifs tels que $a_2a_3a_4, \ldots\, a_n = 1$.
Montrer que

$$\left(1+a_2\right)^2\left(1+a_3\right)^2\left(1+a_4\right)^2\cdots\left(1+a_n\right)^2 > n^n.$$

Il est exceptionnel de pouvoir aborder dans cette modeste rubrique un exercice des Olympiades Internationales. Ces exercices sont en général difficiles, même pour des solveurs avertis. Voici pourtant une exception, en trichant un petit peu avec l'aide fournie à la fin de cette rubrique.
Solveurs avertis, ne lisez pas cette aide !

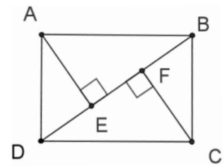
Exercice 511–2 *pour nos élèves*

A. Le périmètre d'un secteur de cercle est 12 (le périmètre inclut les deux rayons et l'arc). Déterminer le rayon du cercle qui maximise l'aire de ce secteur.

B. Montrer que tout nombre palindrome de 4 chiffres est un multiple de 11.

C. ABCD est un rectangle avec AD = 1 ;

(AE) et (CF) sont perpendiculaires à (BD)
et DE = EF = FB.
Calculer AB.



Exercice 511–3 *pioché de-ci, de-là*

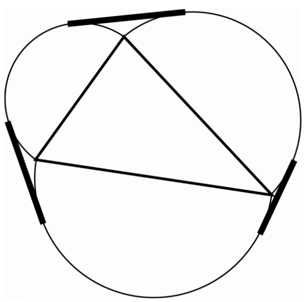
Quatre nombres entiers naturels a, b, c et d sont tels que

$$(a+b+c)d = 420$$
$$(a+c+d)b = 403$$
$$(a+b+d)c = 363$$
$$(b+c+d)a = 228$$

Trouver ces quatre nombres.

Exercice 511–4 Michel Lafond – Dijon

Un triangle ABC a pour périmètre 6 m. On construit les trois demi-cercles de diamètres [A,B], [B,C], [C,A] à l'extérieur de ABC, puis les trois segments tangents communs à ces demi-cercles pris deux à deux. Démontrer que le produit des longueurs de ces trois segments est inférieur ou égal à 1 m^3.



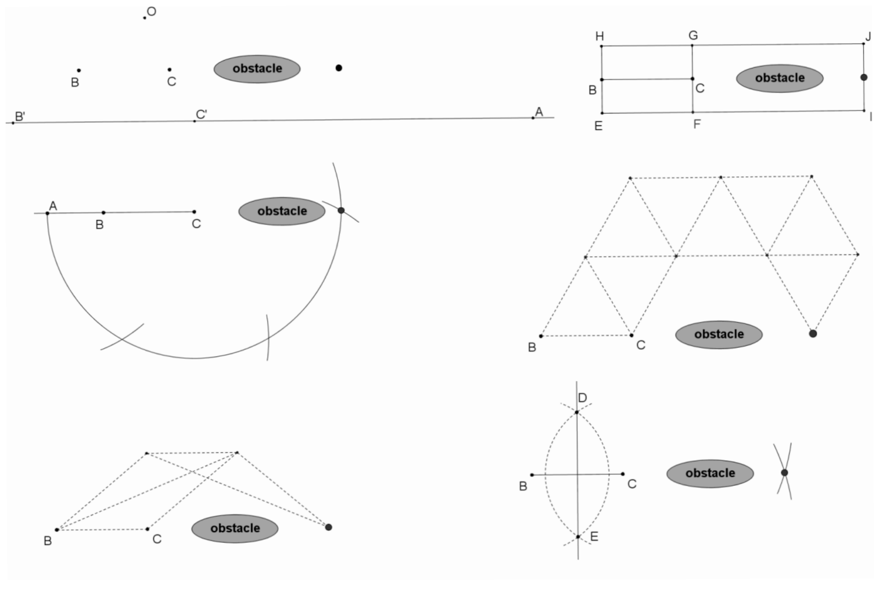
Solutions

Exercice 509–1 Amahl Servois – Besançon

Les points B et C sont du même côté d'un obstacle. On veut déterminer de l'autre côté de l'obstacle un point qui sera sur la droite (BC).

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Michel Lafond (Dijon), Fabrice Laurent (Bayon),Georges Lion (Wallis).

• Avare de précisions, la consigne a laissé libre cours à l'inventivité ! Voici sans commentaire quelques unes des propositions.

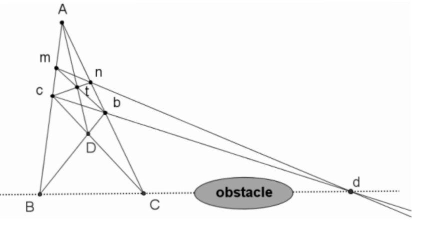


Remarque. Dans le cas où le problème serait posé dans un espace affine, L.G Vidiani, lecteur attentif et assidu du BV, renvoie à l'Avis de recherche 76 du BV n° 407, solutionné dans le n° 417 (pages 498-501).

Nota. Amahl Servois regroupe trois personnes : Anne-Marie Aebischer et Hombeline Languereau de l'IREM de Franche-Comté qui ont signé le livre « SERVOIS OU la géométrie à l'école d'artillerie »(1).

• Voici le texte du problème posé par François-Joseph Servois et la première des solutions qu'il propose.

Problème : Prolonger une ligne au-delà d'un obstacle qui ne permet pas que, placé dans la direction de la ligne, on puisse en appercevoir(2) deux points.



BC est la ligne dont on cherche le prolongement ; au point A, hors de la ligne, et d'où l'on peut voir B et C, placez un Jalon. Placez en un second sur AB en *c*, puis un troisième en *b* sur AC, tels que l'alignement *bc* passe devant la face de l'obstacle O qui masque les points B et C : placez un quatrième Jalon en D à l'intersection des deux alignements *b*B, *c*C : placez un cinquième Jalon en *t* sur AD, puis un sixième en *m* sur *bt* et A*c*, ensuite un septième en *n* sur *ct* et A*b*, enfin, placez un huitième Jalon au concours des deux alignements *bc* et *mn* en *d* : ce dernier Jalon sera dans le prolongement de BC.

(1) Paru aux Presses universitaires de Franche-Comté, ISBN 978-2-84867-299-1
(2) En 1805, on apercevait avec deux p !!!

Exercice 509–2 *pour nos élèves*

A. a est un réel positif tel que $a^2+\dfrac{1}{a^2}=5$. Déterminer la valeur de $a^3+\dfrac{1}{a^3}$.

B. On écrit au tableau les entiers naturels de 1 à n. Un des nombres est effacé. La moyenne des $n-1$ entiers restants est égale à $46+20/23$. Déterminer la valeur de n ainsi que le nombre effacé.

C. On considère deux nombres réels x et y tels que $0<y<x\leq 1$. Montrer que

$$\frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y}>\ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Jean Couzineau (Massy), Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Pierre Lapôtre (Calais), Jean Gounon (Chardonnay), L.G Vidiani (Fontaine les Dijon), Michel Lafond (Dijon), Georges Lion (Wallis), Jean-Paul Thabaret (Grenoble).

• A. Voici la solution de Michel Lafond.
Si a est un réel positif, posons pour tout entier naturel n :

$$S_n=a^n+\frac{1}{a^n}.$$

On a :

$$S_{n-1}S_1=\left(a^{n-1}+\frac{1}{a^{n-1}}\right)\left(a+\frac{1}{a}\right)=a^n+a^{n-2}+\frac{1}{a^{n-2}}+\frac{1}{a^n}=S_n+S_{n-2}.$$

Donc on a la récurrence

$$S_n=S_1S_{n-1}-S_{n-2}$$

et en particulier pour $n=2$:

$$S_2=S_1^2-2.$$

.

Puisque par hypothèse $S_2=5$, on en déduit $S_1=\sqrt{7}$ et la récurrence :

$$S_n=\sqrt{7}S_{n-1}+S_{n-2}.$$

On peut donc calculer :

n	0	1	2	**3**	4	5	6	7	8
S_n	2	$\sqrt{7}$	5	$\mathbf{4\sqrt{7}}$	23	$19\sqrt{7}$	110	$91\sqrt{7}$	527

• B. Voici la solution de Pierre Renfer.
Notons a le nombre effacé. Alors

$$46+\frac{20}{23}=\frac{1+2+\cdots+n-a}{n-1}=\frac{n(n+1)-2a}{2(n-1)}.$$

En doublant,

$$93+\frac{7}{23}=\frac{n^2+n-2a}{n-1}=\frac{(n-1)(n+2)+2(1-a)}{n-1}=n+2+\frac{2(1-a)}{n-1},$$

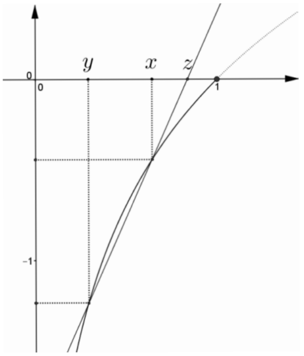
d'où

$$n=91+\frac{7}{23}+\frac{2(a-1)}{n-1}.$$

Comme $0\leq\frac{a-1}{n-1}\leq 1$, on obtient : $92\leq n\leq 93$. Pour $n=92$, on aurait : $a-1=\frac{273}{23}$ qui n'est pas entier. Donc : $n=93$ et $a=59$.

• C. Voici la solution de Georges Lion.

Dans $]0\ ;\ 1[$ la fonction $t\mapsto \ln t$ est croissante, concave et vaut 0 pour $t=1$.
Donc la droite joignant les points $(y;\ln(y))$ et $(x;\ln(x))$ coupe l'axe des abscisses en $z\in\,]x;1[$.
D'où l'on déduit $0<z-y<1$.
Le coefficient directeur de cette droite est



$$\frac{\ln(x)-\ln(y)}{x-y}=\frac{-\ln(y)}{z-y}.$$

$$\frac{-\ln(y)}{z-y}>-\ln(y)\quad\left(\text{ou }\ln\left(\frac{1}{y}\right)\right).$$

Exercice 509 - 3 A. Benoit – Paris

Trouver le lieu géométrique du point de contact entre un plan donné et une sphère variable, tangente à ce plan et passant par deux points B et C donnés, extérieurs au plan et situés d'un même côté de celui-ci.

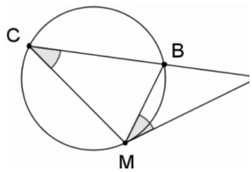
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Georges Lion (Wallis), Michel Lafond (Dijon).

• Voici la solution de Georges Lion.

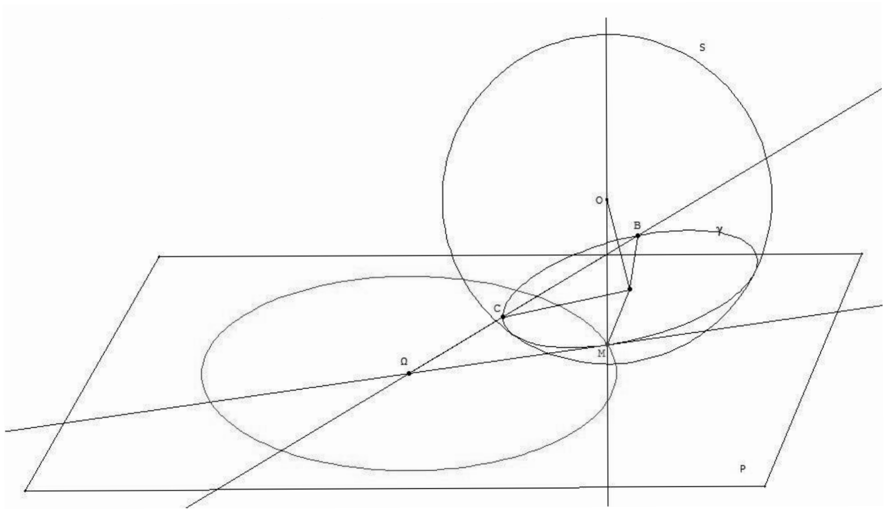
On doit distinguer deux cas :

1) La droite (BC) est parallèle au plan donné .
Le plan Q médiateur de [BC] est plan de symétrie de la figure et le centre O de la sphère tangente à P appartient à ce plan, donc le point de contact appartient à $P \cap Q$.
Réciproquement, soit M un point de $P \cap Q$. La perpendiculaire à P menée par M coupe en O le plan médiateur de [MB].
La sphère de centre O passant par B et C est bien tangente à P en M.
Le lieu cherché est la droite $P \cap Q$.

2) La droite (BC) coupe P en un point Ω en dehors de [BC].
Énonçons d'abord un résultat préliminaire dans le plan, conséquence du théorème de l'angle inscrit sous sa forme la plus simple.
Soient B et C deux points d'un cercle γ et $\Omega \in (BC) \setminus [BC]$, alors pour $M \in \gamma$, on a :



(ΩM)est tangente à $\gamma \Leftrightarrow \widehat{\Omega MB} = \widehat{\Omega CM}$
$\Leftrightarrow$ les triangles ΩMB et ΩCM sont semblables
$\Leftrightarrow$ ΩMest la moyenne géométrique de ΩB et ΩC.
Retour au problème posé : soit S une sphère passant par B et C et C tangente à P en un point M. On note γ le cercle d'intersection de S et du plan MBC. Alors (ΩM) est tangente à γ; donc ΩM est la moyenne géométrique de ΩB et ΩC.



Réciproquement, soit M dans P tel que $\Omega M = \sqrt{\Omega B \times \Omega C}$; alors (ΩM) est tangente au cercle γ circonscrit au triangle MBC. Le plan Q perpendiculaire à (ΩM) en M contient l'axe de γ et la perpendiculaire à P menée par M. Ces deux droites sont donc sécantes en O et la sphère de centre O et de rayon OM passe par B et C et est tangente à P en M.

Dans P, le lieu cherché est le cercle de centre Ω et de rayon $\sqrt{\Omega B \times \Omega C}$..

Nota. L'exercice est issu de « Géométrie, Trigonométrie et Algèbre », Classe de

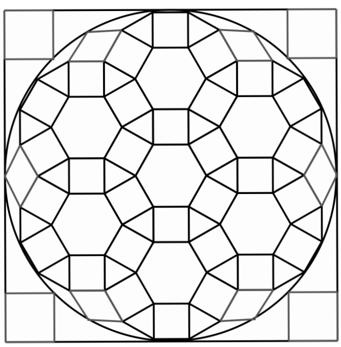
Première classique C et Classe de Première moderne, Programmes du 23 décembre 1941, par A. Benoit, professeur agrégé au lycée Condorcet, édité par la librairie Vuibert en 1943. (premier fascicule, exercice n° 219 p. 126)

L'exercice est proposé comme application du résultat suivant :
Par un point A situé à l'extérieur d'une sphère on mène une droite rencontrant la sphère en deux points B et C et une droite tangente à la sphère en un point T. Établir que la distance AT est moyenne proportionnelle entre AB et AC.

Remarque. Georges Lion précise avoir été élève d'André Benoit qui, à ses yeux, réalisa la perfection du métier ; et rappelle que de 1946 à 1949 André Benoit a accompli un mandat de président de notre association bien aimée !

Exercice 509–4 Rose Hasse–Nîmes *transmis par Bernard Parzysz*

Dans la figure ci-dessous, on considère les cercles circonscrits aux dodécagones. Calculer le rapport du rayon du cercle extérieur à celui des sept cercles intérieurs.



Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Pierre Lapôtre (Calais), Fabrice Laurent (Bayon),Georges Lion (Wallis), Michel Sarrouy (Mende), Maurice Bauval (Versailles).

La figure n'étant décrite que très sommairement, prête à deux interprétations possibles…

- Voici la solution de l'école n° 1 :

Les « deux sommets des carrés extérieurs » de chaque décagone sont sur le cercle extérieur (les six « losanges » qui joignent les dodécagones ne sont en fait pas des losanges).
Les calculs montrent que dans ce cas

$$\frac{R^2}{r^2} = \frac{11+6\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \left(11+6\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 4+\sqrt{3}$$

d'où

$$\frac{R}{r} = \sqrt{4+\sqrt{3}}.$$

- Voici la solution de l'école n° 2 :

Les quadrilatères qui joignent les dodécagones sont des losanges (tous les polygones de la figure sont réguliers).

$$\frac{R^2}{r^2}=\frac{\left(3+\sqrt{3}\right)^2}{2+\sqrt{3}}=\left(3+\sqrt{3}\right)^2\left(2-\sqrt{3}\right)=6$$

d'où

$$\frac{R}{r}=\sqrt{6}.$$

Remarques. Bernard Parzysz a étudié cette configuration de la rosace du temple de Diane à Nîmes et son résultat est … $1+\sqrt{2}$, une troisième école !!!
Pan sur le bec ! Pour ne pas m'être suffisamment penché dessus et avoir voulu économiser du texte, j'ai complètement saboté cette petite étude. Elle est disponible sur le site de l'association.
Cette rosace a également fait l'objet d'un atelier animé par Martine et Roger Allet lors des journées nationales des 18 au 21 octobre 2014 à Toulouse.

Exercice 508–2 Michel Lafond – Dijon *Calcul de minimum*

Soit le polynôme $P(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + 199810x^2 - 272672x + 93026$, $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que $P(x)$ est strictement positif pour tout x réel et calculer le minimum à 10^{-10} près.
Calculatrice interdite.

Solutions : Louis-Marie Bonneval (Poitiers), Michel Lafond (Dijon).

- Voici la solution de Michel Lafond.

On considère $P(x)$ comme le début d'un carré puisque

$$\left(x^3+x-1\right)^2=x^6+2x^4-2x^3+x^2-2x+1.$$

Ainsi

$$P(x)=\left(x^3+x-1\right)^2+199809x^2-272670x+$$

Vu la question on se doute que $199809x^2-272670x+93025$ est un carré exact.

C'est le cas. $P(x)=\left(x^3+x-1\right)^2+\left(447x-305\right)^2$ est strictement positif. En effet :

$\alpha=\dfrac{305}{447}$ n'est pas racine de P (x) puisque :

$$P(\alpha)=\left(\alpha^3+\alpha-1\right)^2=\left(\frac{305^3+305\times447^2-447^3}{447^3}\right)^2=\left(-\frac{253}{447^3}\right)^2\neq0.$$

De plus

$$P(\alpha)=\frac{253^2}{447^6}<\frac{256^2}{400^6}=\frac{2^{16}}{2^{12}10^{12}}=\frac{16}{10^{12}}<10^{-10}.$$

Donc le minimum de P est compris entre 0 et 10^{-10}.

Remarque. Michel Lafond indique que les logiciels ne manquent pas pour trouver que le minimum de P vaut environ $8{,}02 \times 10^{-12}$.
Le voir graphiquement est possible à condition de zoomer et de pouvoir travailler avec beaucoup de chiffres significatifs.
Dans le même genre, est positif pour tout x réel et le minimum est entre 0 et 7×10^{-17}.

Coup de pouce pour l'exercice De-ci, de-là 511–1.

Sur l'ensemble des réels positifs, étudier les minima des fonctions :

$$x \mapsto \frac{(1+x)^k}{x}, k \geq 2.$$