Les trois voyages du chameau

Philippe Langlois

Le moine anglais Alcuin (735 ? - 804), qui fut l'ami de Charlemagne et son conseiller très écouté en matière d'enseignement, est l'auteur d'un bref recueil d'énigmes mathématiques, les *Propositions pour aiguiser l'esprit des jeunes gens*(1), dont certaines sont devenues des classiques.
Curieusement, le plus original de ses énoncés et peut-être le plus difficile, le « problème du chameau », est resté longtemps assez méconnu. Il est bien moins célèbre que, par exemple, « le loup, la chèvre et le chou » qui figure dans le même recueil. Il a fallu attendre le milieu du XX^e siècle pour que les nécessités de la logistique militaire le ramènent au premier plan, par le biais des problèmes de ravitaillement des véhicules.

1. Le chameau d'Alcuin

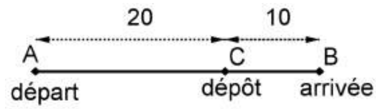
1.1. L'énoncé

PROPOSITIO DE HOMINE PATERFAMILIAS

Quidam paterfamilias jussit XC modia frumenti de una domo sua ad alteram deportari ; quae distabat leucas XXX : ea vero ratione, ut uno camelo totum illud frumentum deportaretur in tribus subvectionibus, et in unaquaque subvectione XXX modia portarentur : camelus quoque in unaquaque leuca comedat modium unum. Dicat, qui velit, quot modii residui fuissent ?	Un père de famille a ordonné de transporter 90 boisseaux de blé de sa maison à une autre éloignée de 30 lieues, en utilisant un chameau qui ferait trois voyages. Mais à chaque lieue parcourue, le chameau, qui ne pouvait porter plus de 30 boisseaux(2), en mangeait un. Que celui qui le veut dise combien de boisseaux sont arrivés à bon port !

1.2. La solution originelle

Traduction : « Dans le premier voyage, le chameau a transporté 30 boisseaux pendant 20 lieues et mangé un boisseau à chaque lieue, soit 20 boisseaux ; il en est resté [*en un lieu* C *situé à 20 lieues du point de départ*] 10.



Au deuxième voyage il a de même porté 30 boisseaux et en a mangé 20 ; il en est resté [*en* C] 10.

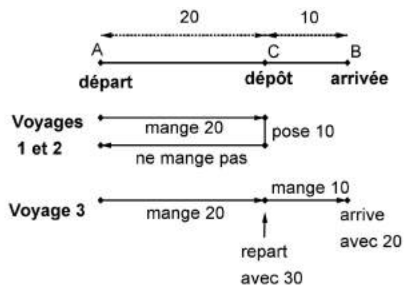
(1) Propositiones ad acuendos juvenes.
(2) Il s'agit ici du boisseau romain (*modius*), qui vaut environ 8,7 litres. La lieue (*leuca*), qui semble héritée des Gaulois, valait à peu près 2,2 km. Alcuin attribue donc au chameau une consommation de 4 litres au kilomètre, peu compatible avec la proverbiale sobriété de l'animal.

Au troisième voyage, il a encore fait de même : porter 30 boisseaux et en manger 2 ; il en est resté [*en* C] 10. Il restait donc [*en* C] au total 30 boisseaux et 10 lieues à parcourir.
Dans un quatrième voyage, il a transporté ces 30 boisseaux jusqu'au bout, mangeant en chemin 10 boisseaux. Il est donc resté 20 boisseaux. »

1.3. Analyse de la solution d'Alcuin

▪ Dans sa solution, Alcuin parle de quatre voyages alors que son énoncé en prévoit trois. Il s'agit d'une simple maladresse de formulation : ses deux derniers voyages sont la première phase (de A en C) et la seconde phase (de C en B) d'un même troisième voyage.

▪ Regardons les deux premiers. Selon Alcuin, lors de chacun des deux, « le chameau a transporté 30 boisseaux pendant 20 lieues et mangé un boisseau à chaque lieue, soit 20 boisseaux ; il en est resté [*en* C] 10 ». Il n'a donc rien pu manger pendant le trajet de retour de C en A.



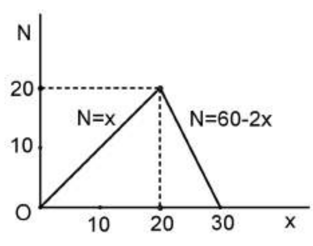
▪ Le raisonnement de l'auteur n'est donc valide que sous une condition expresse qu'il ne formule pas : **lorsque le chameau n'est pas chargé, il n'a pas besoin de manger**. À cette réserve près, il est parfaitement correct et conforme au schéma ci-contre.

Remarque
Alcuin ne justifie pas le choix du point relais où il effectue ses dépôts. Mais, on le verra, aucun autre emplacement ne permet de faire aussi bien. On peut donc estimer qu'il a résolu empiriquement, plus de mille ans avant que la notion ne soit mise en forme, le premier problème d'optimisation linéaire.

1.4. La solution d'Alcuin est optimale

Plaçons un relais C *entre le domicile* A *et l'autre maison* B, *et soit x la distance* AC.

Au premier et au second voyage, le chameau emporte 30 boisseaux mais ne va que jusqu'en C ; il consomme x boisseaux, en dépose $30 - x$ et revient à vide. Au troisième voyage, il arrive en C avec $30 - x$ boisseaux et retrouve les $60 - 2x$ déposés au cours des précédents voyages ; il en a donc $90 - 3x$.



▪ Si $x \leq 20$, on a $90 - 3x \geq 30$; il repart de C avec 30 boisseaux, maximum qu'il puisse porter, en mange $30 - x$ en route et arrive en B avec x boisseaux.

▪ Si $x \geq 20$, on a $90 - 3x \leq 30$; il repart de C avec $90 - 3x$ boisseaux, en mange $30 - x$ en route et arrive en B avec $60 - 2x$ boisseaux.

▪ Si N(x) désigne le nombre de boisseaux à l'arrivée en B, il s'agit de maximiser cette fonction affine par morceaux. Le maximum est obtenu pour $x = 20$: le chameau arrive en B avec 20 boisseaux. La solution que donne Alcuin est donc bien la meilleure.

2. Le chameau vorace

La sobriété du chameau d'Alcuin lors des trajets de retour laisse évidemment un peu rêveur. Il est assez naturel de modifier l'énoncé pour avoir un chameau qui mange un boisseau par lieue, **qu'il soit chargé ou non**. Nous l'appellerons le chameau vorace.

2.1. Le nouvel énoncé

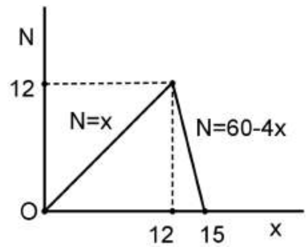
Une réserve de 90 *boisseaux de blé entreposée en un endroit* A *doit être transportée en trois voyages jusqu'à un endroit* B*, situé à 30 lieues de* A*, par un chameau qui ne peut porter plus de* 30 *boisseaux à la fois et qui (chargé ou non) mange* 1 *boisseau de blé par lieue. On dispose d'un relais* C *situé entre A et B, à la distance x de* A*. Comment choisir x pour que la quantité maximum de blé arrive à bon port ?*

2.2. La solution optimale

Observons que l'on a forcément $x \leq 15$, car l'aller-retour entre A et C consomme $2x$ boisseaux.

Au premier et au second voyage, le chameau emporte 30 boisseaux et va jusqu'en C où il ne peut déposer que $30 - 2x$ boisseaux (sinon il ne pourrait pas revenir en A).

Au troisième voyage, il arrive en C avec $30 - x$ boisseaux et retrouve les $60 - 4x$ déposés au cours des précédents voyages ; il en a donc $90 - 5x$.



- Si $x \leq 12$, on a $90 - 5x \geq 30$; il repart de C avec 30 boisseaux, maximum qu'il puisse porter, en mange $30 - x$ en route et arrive en B avec x boisseaux.
- Si $x \geq 12$, on a $90 - 5x \leq 30$; il repart de C avec $90 - 5x$ boisseaux, en mange $30 - x$ en route et arrive en B avec $60 - 4x$ boisseaux.
- On désigne encore par N(x) le nombre de boisseaux à l'arrivée en B ; il s'agit de maximiser cette fonction affine par morceaux. La réponse se lit sur le graphique : le maximum est atteint pour $x = 12$, le chameau arrivant alors en B avec 12 boisseaux.

3. Peut-on faire mieux ?

3.1. Le principe

Ce qui vient d'être trouvé, aussi bien dans le cas du « chameau d'Alcuin», celui qui à vide ne mange pas, que du « chameau vorace », qui mange tout le temps, c'est la meilleure solution possible *si l'on utilise un seul dépôt*.

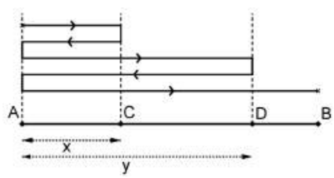
Utilisons maintenant, toujours en trois voyages, deux dépôts différents, C et D, situés aux distances x et y de A, avec $x < y$. Au premier voyage, le chameau emporte 30 boisseaux et ne va que jusqu'en C où il dépose les $30 - x$ qui lui restent ; puis il retourne en A. Au second voyage, il emporte 30 boisseaux et va en D après s'être rechargé *dans la mesure du possible* lors du passage en C ; en D, il dépose ce qui lui reste et repart vers A. Au troisième voyage, il se rechargera en C *dans la mesure du possible*, puis en D *dans la mesure du possible* avant d'aller en B où il dépose la charge qui lui reste, soit N(x,y).

La situation est plus souple que dans le cas d'un seul dépôt. Elle est aussi plus complexe : les « *dans la mesure du possible* » de l'alinéa précédent montrent trois choix binaires successifs, donc en tout *a priori* huit cas possibles. C'est encore un problème d'optimisation linéaire, mais nettement plus ardu. Une étude au cas par cas, le long des trajets successifs du chameau, serait longue et pénible. Un raisonnement plus global est préférable.
La procédure est en trois temps : trouver empiriquement un couple (x,y) qui semble donner à N(x,y) la plus grande valeur possible, vérifier qu'il permet bien d'arriver en B avec plus de 20 boisseaux, montrer que c'est le meilleur possible. Elle s'appuie sur la remarque suivante.

Remarque : Qu'il s'agisse du chameau d'Alcuin ou du chameau vorace, le maximum qu'il puisse emporter au-delà de D est de 30 boisseaux. En outre, sur l'ensemble des voyages, le maximum qu'il puisse emporter au-delà de C est de 60 boisseaux, *car il ne traverse* C *dans le sens aller que* 2 *fois, avec une charge qui ne peut dépasser* 30.

3.2. Le cas du chameau d'Alcuin

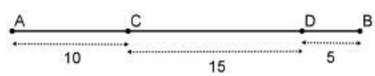
3.2.1. *Recherche empirique*



▪ L'idéal serait donc une série de trois voyages réalisant les conditions suivantes :
- on emporte exactement 30 boisseaux au-delà de D et 60 au-delà de C ;
- il ne reste rien à la fin ni en C ni en D.

Supposons qu'il en soit ainsi. Sur [AC] et sur [CD] la consommation est donc de 30.
Or, entre A et C, le chameau consomme $3x$ en 3 voyages ; donc $3x = 30$, soit $x = 10$.
Entre C et D, il consomme $2(y - x)$ en 2 voyages, donc $2(y - x) = 30$, qui donne $y - x = 15$, soit $y = 25$.

3.2.2. *Le cas* (x = 10, y = 25)



Voyage 1 : On va jusqu'en C, on y pose les 20 boisseaux restants sur les 30 emportés et on revient.
Voyage 2 : On va jusqu'en C, on y pose les 20 boisseaux restants sur les 30 emportés ; il y en a alors 40 en C. On en laisse 10, on part avec 30 vers D, où on arrive avec 15, que l'on y dépose. On rentre en A.
Voyage 3 : On va jusqu'en C, on y arrive avec 20 boisseaux sur les 30 emportés ; avec les 10 restés en C lors du second voyage, cela fait 30, avec lesquels on part pour

D. On arrive en D avec 15. On repart de D avec 15 + 15 = 30, on en dépense 5 en allant de D à B. On arrive donc en B avec 25 boisseaux.

3.2.3. ***On ne peut pas faire mieux***

▪ Quels que soient x et y, on part de D avec au plus 30 boisseaux ; de D à B on en consomme $30 - y$. Le nombre N de boisseaux à l'arrivée du troisième voyage ne peut donc dépasser y. Pour arriver avec au moins 25 boisseaux, il faut prendre $y \geq 25$.

▪ Le chameau mange x au premier voyage, y au second et 30 au dernier, soit en tout $30 + x + y$. N ne peut donc pas dépasser $90 - (30 + x + y) = 60 - x - y$. Pour arriver avec au moins 25 boisseaux, il faut donc prendre $x + y \leq 35$, ce qui implique $x \leq 10$.

▪ Prenons donc $x \leq 10$ et $y \geq 25$. Examinons ce qui se passe entre C et B aux deux derniers voyages. On a vu (remarque à la fin du §3.1) que le maximum qu'on puisse apporter en tout sur]CB] est de 60 boisseaux ; or de C à B le chameau consomme $(y - x) + (30 - x)$; il apporte donc en B au plus $60 - (y - x) - (30 - x)$, soit 30 + 2– x – y boisseaux.

Comme $x \leq 10$ et $y \geq 25$, on a $N \leq 30 + 20 - 25$, autrement dit $N \leq 25$, l'égalité n'étant possible que si $x = 10$ et $y = 25$.

3.3. Le cas du chameau vorace

Mutatis mutandis, les raisonnements sont les mêmes. Indiquons brièvement les étapes.

3.3.1. ***Recherche empirique***

On cherche comme précédemment une solution où sur chacun des segments [AC] et [CD] la consommation soit de 30. Mais sur [AC] elle est cette fois de $5x$ (3 allers et 2 retours), ce qui donne $x = 6$. Sur [CD] elle est de $3(y - x)$ (2 allers et un retour), ce qui donne $y - x = 10$, donc $y = 10$.

3.3.2. ***Le cas* ($x = 6, y = 16$)**

Voyage 1 : On va en C, l'aller-retour consommant 12 boisseaux ; on y pose donc 18 boisseaux.
Voyage 2 : On va en C, on y pose les 24 boisseaux restants ; il y en a alors 42 en C. On en laisse 12, on part avec 30, on arrive vers D avec 20, on y dépose 10, on consomme les 10 autres en revenant en C, on y prélève 6 pour rentrer en A, ce qui en laisse 6 en C.
Voyage 3 : On va en C, on y arrive avec 24 boisseaux et on en y trouve 6 ; on repart avec 30 et on arrive en D avec 20. On repart de D avec 20 + 10 = 30, on en dépense 14 pour aller en B. **On arrive donc en B avec 16 boisseaux**.

3.3.3. ***On ne peut pas faire mieux***

▪ Comme précédemment, le nombre N de boisseaux à l'arrivée en B ne peut dépasser y. Pour faire aussi bien qu'en 3.3.2, il faut donc prendre $y \geq 16$.

▪ La consommation sur les trois voyages est $30 + 2x + 2y$, donc N ne peut dépasser $60 - 2x - 2y$. Pour arriver avec au moins 16 boisseaux, il faut donc prendre $x + y \leq 22$, ce qui implique $x \leq 6$.

▪ On suppose donc $x \leq 6$ et $y \geq 16$. Comme précédemment, le maximum qu'on puisse apporter en tout sur]CB] est de 60 boisseaux. Mais entre C et B le chameau consomme $2(y - x) + (30 - x)$; il apporte donc en B au plus $60 - 2(y - x) - 30 + x$, soit $30 + 3x - 2y$ boisseaux. Comme $x \leq 6$ et $y \geq 16$, on a $N \leq 30 + 18 - 32$, autrement dit $N \leq 16$, l'égalité n'ayant lieu que si $x = 6$ et $y = 16$.

Conclusion

On peut, bien sûr, ne voir dans l'énigme du chameau qu'une ingénieuse amusette mathématique. Ce serait oublier qu'elle est le lointain ancêtre d'une classe de problèmes de logistique et d'optimisation qui gardent toute leur actualité : longs parcours en zone inhabitée et vols à très longue distance, par exemple.