Une progression pour l'enseignement de la logique propositionnelle au lycée

Jean-Yves Larrieu(*)

Les nouveaux programmes de lycée ont explicitement réintroduit l'apprentissage de la logique en cours de mathématiques. Bien sûr, il n'est pas vraiment possible de s'en passer dans un tel enseignement, mais cette nouvelle formulation des programmes nous invite à faire un effort particulier au niveau pédagogique en vue de l'assimilation de ces notions. J'ai donc mis en place dans mes classes un certain nombre de dispositifs pour permettre cet enseignement, et au fil du temps mes pratiques se sont perfectionnées. Je me suis rendu compte que ce travail avait un effet positif sur certains élèves qui sont parvenus à raisonner avec une meilleure aisance, et surtout à éviter les erreurs classiques. Ainsi, lorsque j'ai entendu dire que « La logique, ça ne s'apprend pas, c'est inné : on l'a ou on ne l'a pas », j'ai été surpris que cette idée soit aussi ancrée dans de nombreux esprits, alors que mon expérience la contredit. Pourtant, je me suis souvenu que j'ai pu penser de la même façon à une certaine époque. C'est pourquoi j'ai choisi de partager mon expérience avec les lecteurs des revues de l'APMEP. Je tiens tout de suite à tempérer l'efficacité de ma démarche : elle fonctionne relativement bien avec des élèves qui ont déjà une bonne aisance avec la langue.

Dans cet article, je propose une progression détaillée pour un enseignement de la logique dans le secondaire. Une progression complète aurait été trop longue ; j'ai donc choisi de me concentrer sur le début de cette progression, en laissant de côté l'essentiel de ce qui relève du calcul des prédicats et de ses finesses (les quantificateurs $\forall$ et $\exists$, leurs permutations, le cas particulier de $\exists$! qui à mon sens n'est pas vraiment un quantificateur…) ainsi que les types de raisonnement spécifiques qui sont plutôt au programme en terminale (par l'absurde, par récurrence). J'ai habillé cette progression d'exemples et d'exercices, tout en ayant le souci de signaler les obstacles pédagogiques récurrents que les élèves rencontrent.

Ces rudiments de logique propositionnelle montrent aux élèves l'importance de la rigueur syntaxique, leur faisant toucher du doigt qu'il ne suffit pas que la conclusion d'un raisonnement soit juste pour valider ce dernier, alors même que c'est précisément la rigueur syntaxique d'une pensée qui valide ses conclusions. Tout ceci concourt au développement d'un sens critique aiguisé reposant sur la pratique de raisonnements personnels propres et non sur l'application d'un « prêt-à-penser » qui viendrait de sources dites « autorisées » (télévision, internet, presse). Il me semble

(*) jyl40@hotmail.com

que ceci n'est pas le moindre des intérêts de l'enseignement de la logique, qui se montre ainsi une composante importante de la formation du citoyen.

1. Différence entre ⇒ et ⇐ ; Réciproque

Une difficulté très commune chez les élèves est l'incapacité à voir le sens des implications, même dans des cas concrets. Ainsi, on constate que s'ils sont globalement capables d'employer « car » et « donc » à peu près correctement, le fait que les deux mots aient des sens opposés ne leur est généralement pas clair. Voici un exercice (inspiré d'un livre sur l'Aide Individualisée) qui permet de faire l'état des lieux par rapport à cet obstacle didactique, et de commencer à travailler ce point avec les élèves (Attention débats houleux en perspective !).

Compléter par l'une des conjonctions « car », « donc »

1/ $x - 1$ et $1 - x$ sont opposés ....l'un est positif, et l'autre négatif.
2/ x appartient à $[0\ ;1]$...............................x appartient à $[-1\ ;3]$.
3/ AB = CD ....ABCD est un parallélogramme.
4/ ABC est un triangle rectangle................l'angle $\hat{C}$ est droit.
5/ Dans ABC, (IJ) est parallèle à (BC) ......I est le milieu de [AB] et J est le milieu de [AC].
6/ M est le milieu de [AB].........................M est aligné avec A et B.
7/ $x^2 = 9$ ....$x = 3$.
8/ $\dfrac{x}{y} = \dfrac{2}{3}$ ....$x = 2$ et $y = 3$.
9/ $x < 0$ et $y > 0$ ....$xy < 0$
10/ ABCD est un carré...............................ABCD est un parallélogramme.

Face à cet exercice, les élèves réagissent souvent de deux façons nettement identifiées : certains, qui savaient déjà distinguer « car » et « donc », se confortent dans leur savoir. D'autres sont totalement désemparés devant leur incapacité à faire quelque chose qu'il leur semblait savoir faire. Il est nécessaire pour ces derniers de procéder à une remédiation en installant ce savoir. Généralement, les élèves sont en demande d'un « truc » pour ne plus « retomber dans le piège ». Je leur dis de penser au triangle équilatéral et au triangle isocèle : un triangle est équilatéral donc en particulier il est isocèle, mais lorsque je prends n'importe quel triangle isocèle, il n'est pas forcément équilatéral. Autre façon de dire dans le premier cas : le triangle est isocèle car il est équilatéral. Ainsi, on commence à construire l'idée que le raisonnement est orienté, qu'il a un sens. Le sens inverse n'est pas forcément vrai. C'est ce qu'on appelle la réciproque. Je suis souvent surpris d'entendre des élèves me dire à cette occasion « Ah ! Mais c'est ça alors la réciproque ! ».

2. Contraposée

L'exemple du petit théorème « tout triangle équilatéral est en particulier isocèle » est l'occasion de parler de contraposée et de renforcer l'idée que l'équivalence n'est pas le seul mode de raisonnement. Ainsi, on demande aux élèves « Que dire d'un triangle qui n'est pas équilatéral ? » Immanquablement, certains élèves en déduisent qu'il n'est pas isocèle. À cette occasion, par des contre-exemples au tableau et une discussion avec la classe, on déconstruit cette préconception que « tout est équivalence », et on installe l'idée que parfois « on ne déduit rien ».

Puis, on pose la question « Que dire d'un triangle qui n'est pas isocèle ? ». Et là des élèves disent « on n'en déduit rien », pensant pouvoir utiliser à bon escient ce qu'ils ont découvert juste avant. Derrière cet empilement d'obstacles didactiques, il y a une croyance en une symétrie naturelle des raisonnements, souvent renforcée par l'utilisation quasi-exclusive au collège de théorèmes formulant des équivalences. Il y a un gros travail à faire avec les élèves pour faire émerger l'idée que les raisonnements sont en réalité pourvus d'un sens, et que la situation d'équivalence est exceptionnelle. Dans le cas précédent, on parvient à faire dire à la classe qu'un triangle non isocèle n'est pas équilatéral, et on peut même en fournir une démonstration formelle par l'absurde : si le triangle était équilatéral, il serait en particulier isocèle, ce qui n'est pas le cas. Notre supposition de départ ne peut pas se produire, donc en réalité le triangle n'était pas équilatéral.

Généralement, cette première approche de l'implication, de la réciproque et de leurs contraposées a besoin d'être renforcée sur d'autres exemples. Je prends souvent les petits théorèmes suivants : « Un rectangle est en particulier un parallélogramme » ou, hors champs mathématiques « Si un élève est en terminale, alors c'est un lycéen », ou même « Si une ville est en Bretagne, alors elle est en France ». Les élèves constatent alors que le procédé de contraposition est purement formel, et on leur montre qu'il obéit au schéma suivant : la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$. Une erreur classique à ce niveau est de croire que la contraposée de $A \Rightarrow B$ est $\text{non}(A) \Rightarrow \text{non}(B)$. Il faut travailler ce point avec les élèves. Petit à petit, on parvient à distinguer l'aspect syntaxique qui n'est qu'un jeu de langage : si $A \Rightarrow B$ est notre théorème de départ, on appelle réciproque l'implication $B \Rightarrow A$, contraposée $\text{non}(B) \Rightarrow \text{non}(A)$, et réciproque de la contraposée $\text{non}(A) \Rightarrow \text{non}(B)$. On peut faire faire aux élèves le petit calcul syntaxique qui montre que la réciproque de la contraposée et la contraposée de la réciproque sont identiques. Puis dans un deuxième temps, on aborde l'aspect sémantique, et on fait remarquer que l'implication et la contraposée sont vraies en même temps, ainsi que la réciproque et la contraposée de la réciproque. Puis on insiste bien sur le fait que l'implication et la réciproque n'ont aucune raison d'être vraies en même temps *a priori*, et que dans les cas bien spécifiques où cela se produit, on est dans une situation idéale où nos quatre énoncés sont vrais en même temps. C'est la situation exceptionnelle de l'équivalence. On peut alors montrer aux élèves divers théorèmes qu'ils connaissent ou qui leurs semblent évidents, et discuter avec la classe de leur statut d'équivalences ou de simples implications.

3. Quelques exercices

C'est le moment pour stabiliser toutes ces notions et corriger les idées fausses des élèves par de petits exercices. En général, plutôt que de faire des mathématiques, à ce stade je leurs propose des petites théories en français qui ont de multiples avantages : elles sont ludiques, elles montrent que la logique ne s'applique pas qu'aux mathématiques, et elles permettent aux élèves de voir que tout ceci n'est que jeu de langage.

Voici un exercice fondé sur une telle théorie :

Jean-Pierre est un garçon très spécial : il se fixe des règles qu'il respecte toujours. En voici deux :
« Lorsque je porte une cravate, je mets toujours une chemise. »
« Lorsque je ne porte pas de cravate, je mets toujours des baskets. »
a) Jean-Pierre peut-il porter une chemise sans cravate ?
b) Peut-il porter une cravate et des baskets ?
c) Jean-Pierre ne porte pas de chemise aujourd'hui. Quelles chaussures porte-t-il ?
d) Jean-Pierre ne porte pas de baskets aujourd'hui. Peut-il porter un T-shirt ?
e) Jean-Pierre peut-il porter un nœud papillon, une chemise et des baskets ?
f) Jean-Pierre peut-il porter une cravate, un T-shirt et des baskets ?

En général, je propose plusieurs exercices de ce type à la classe, répartis sur quelques semaines, pour consolider les acquis en logique. À cette occasion, j'introduis petit à petit le « et » et le « ou », en faisant progressivement comprendre aux élèves que le « ou » est inclusif, ce qui n'est pas une mince affaire. On peut aussi proposer aux élèves des exercices du même type, mais complètement formalisés, voire faire formaliser une telle théorie par les élèves. Ainsi, dans l'exemple précédent, la version formalisée serait :

« cravate $\Rightarrow$ chemise »
« non cravate $\Rightarrow$ baskets ».

Voici un exemple de théorie formelle avec laquelle les élèves pourraient avoir à démontrer des choses. Ceci leur permet de voir que toute cette histoire est une sorte de calcul :

$$A \Rightarrow \text{non}(B)$$
$$\text{non}(A) \Rightarrow C$$

Que dire si l'on a non(C) ? Et si l'on a C ? Démontrer que $B \Rightarrow C$.

Enfin, un point intéressant est de montrer une théorie contradictoire aux élèves. Ils voient ainsi que les théories logiques se rangent en deux catégories : celles qui décrivent une « réalité » susceptible d'exister, car elle n'a pas de contradiction interne, et celles qui n'ont aucun modèle car elles disent une chose et son contraire. Voilà un exemple de théorie contradictoire :

« S'il pleut, Jules fait ses devoirs »
« Quand Jules fait ses devoirs, il est à la maison »

« Quand Jules a un parapluie c'est qu'il pleut »
« L'autre jour, j'ai vu Jules se balader dehors avec un parapluie ».

Tous les élèves ne voient pas forcément la contradiction tout de suite !!

4. Le vocabulaire de la logique

Ce qui fait généralement défaut aux élèves à ce stade de la progression et qui les gêne dans la compréhension des énoncés mathématiques est le vocabulaire de la logique. Je propose alors de remplir avec les élèves le tableau suivant :

$\Rightarrow$	$\Leftarrow$	$\Leftrightarrow$

Où mettre les mots suivants ?

Équivaut ; car ; donc ; parce que ; si … alors ; en conséquence ; puisque ; si et seulement si ; comme …, ; il faut que … pour que ; il suffit que … pour que ;

Proposez d'autres mots de liaison à mettre dans le tableau.

Ce travail permets aussi de soulever un point difficile pour les élèves : ces expressions ont un sens dans un contexte mathématique qui n'est pas nécessairement le même que dans le contexte de la vie de tous les jours. Ainsi, « si … alors » peut aussi exprimer un ordre (« si tu manques ton bus, alors tu me téléphones »). Par ailleurs, en toute rigueur logique, ces différentes expressions ne sont pas véritablement équivalentes. Ainsi dire « A donc B » ne revient pas à dire « si A, alors B ». Dans les deux cas le théorème « A implique B » est considéré comme vrai. Dans le premier, on a instancié A (qui est donc supposé vrai), on sous-entend « A implique B », et on en déduit B (qui est donc vrai aussi). « si A, alors B » ne dit rien de la véracité de A ou de B. Cette difficulté est très fine et vraiment difficile à faire sentir aux élèves. En général, je renonce à leur expliquer ce point en première intention. Après une pratique consolidée des autres notions de la logique propositionnelle, on peut revenir là-dessus.

C'est alors l'occasion d'utiliser tous ces mots à bon escient dans de petites théories logiques mathématiques ou en français. Normalement, à ce stade de leur apprentissage, les élèves ont bien compris que la logique est un jeu de meccano linguistique dont il suffit de respecter les règles pour fabriquer des énoncés vrais. On peut alors se permettre de leur proposer une théorie mathématique qui ne fait pas vraiment sens pour eux, mais avec laquelle ils peuvent raisonner formellement. Voici une de celles que j'utilise à l'occasion :

« Une figure de type A est à la fois de type B et de type C, et une figure simultanément des types B et C est aussi du type A. »

« Une figure de type B ou C est aussi de type D. »
« Une figure de type D est de type B si et seulement si elle a la propriété P. »
« Une figure de type D est de type C si et seulement si elle a la propriété P′. »
Démontrer que :
– « Une figure de type D est de type A si et seulement si elle a les propriétés P et P′. »
– « Toute figure de type A a les propriétés P et P′. ».
– « Une figure de type B est du type A si et seulement si elle a la propriété P′. »

Regardez maintenant cette théorie bien connue :

« Un carré est un losange et un rectangle, et une figure qui est à la fois un losange et un rectangle est un carré. »
« Un losange ou un rectangle est en particulier un parallélogramme. »
« Un parallélogramme est un losange si et seulement si ses diagonales sont perpendiculaires. »
« Un parallélogramme est un rectangle si et seulement s'il a des côtés perpendiculaires. »

Voyez-vous le lien entre les deux théories ?

5. Le « et » et le « ou »

À ce niveau, on ne peut plus faire l'économie d'une explication claire de ce que signifient le « et » et le « ou » mathématiques. En général, le sens du « et » ne pose pas de difficulté. Mais expliquer que le « ou » est inclusif en Mathématiques, mais que pour autant ce n'est pas la même chose que le « et », et qu'en plus, dans des cas particuliers le « ou » mathématique peut se comporter comme un « ou » exclusif sans que cela pose le moindre problème relève souvent de la gageure. En général, je choisis de passer par des exemples. Je fais les traditionnels diagrammes de Venn (les « patates ») et je montre le « et » et le « ou » avec des coloriages. Mais cette approche ne suffit pas du tout, et de nombreux élèves ne comprennent pas ce genre de schémas. Il y a alors une stratégie pédagogique qui consiste à utiliser des ensembles en extension.

E = {Δ ; @ ; ∇ ; ☺} F ={☺ ; □ ; ✈ ;Δ ; ★}

G = {Δ ;@ ; ∇ ; ☺ ; □ ; ✈ ; ★ ; ✘ ; ○}

Faire la liste des éléments qui sont dans E **et** dans F à la fois. On appelle cet ensemble A. Puis donner la liste des éléments qui sont dans E **ou** dans F (« ou » mathématique). C'est l'ensemble B. Donner les éléments de G qui ne sont pas dans B.

En général, après quelques exemples de ce type, les élèves voient ce que sont le « et » et le « ou ». On peut prolonger ce travail par la découverte des lois de Morgan, que l'on peut faire par les diagrammes de Venn et par les ensembles en extension, à condition d'avoir explicité la traduction ensembliste de la négation. Tout ce travail concourt à la préparation de l'utilisation de la langue en probabilités.

Enfin, pour les élèves à leur aise avec les diagrammes de Venn, on peut compléter ce qui précède et consolider la notion d'implication grâce à une illustration de A $\Rightarrow$ B par l'inclusion de la patate A dans la patate B. On leur fait alors remarquer que si un x est dans A, alors il est dans B, mais que s'il est dans B, rien ne prouve qu'il soit dans A. On peut aussi illustrer non(B) $\Rightarrow$ non(A), et faire voir que non(A) $\Rightarrow$ non(B) n'a pas de raison d'être toujours vrai. Cependant cette approche ne fonctionne généralement pas avec tous les élèves. On obtient parfois de meilleurs résultats en utilisant les mêmes idées avec des cas particuliers d'intervalles de $\mathbb{R}$.

Conclusion

À vrai dire cet article ne recouvre que l'enseignement de la logique propositionnelle, alors qu'il y a tant à dire et à faire au-delà de ce premier aspect. Ainsi, j'ai l'habitude d'aborder avec les élèves, en une heure généralement, un peu de théorie de la démonstration, afin de fixer les idées sur ce que c'est qu'un modèle, une théorie non-contradictoire, une représentation d'un modèle, etc. En outre, cette discussion permet de préparer la philosophie et l'épistémologie. On peut faire sentir aux élèves qu'il y a une grande différence entre les sciences abstraites (mathématiques, physique théorique) et expérimentales. Cela leur permet de dépasser des conceptions scientistes naïves malheureusement très répandues.

Il faudrait aussi prolonger ce travail par l'initiation à la quantification, ainsi que par la formation aux raisonnements par l'absurde et par récurrence. Et aussi réfléchir sur la démonstration, en particulier sur la méthode par analyse et synthèse. De bons exercices pour travailler la démonstration sont les corrections de démonstrations fausses : où sont les erreurs et quels sont leur type ? Peut-on « sauver » la démonstration erronée ?

L'apprentissage de la logique est un chantier considérable ouvert auprès des élèves tout au long du lycée, et au-delà. C'est un élément structurant de la pensée mathématique et de la pensée en général, qui concourt aussi à la formation citoyenne. À mon sens, l'enseignement de mathématiques trouve une justification naturelle dans le fait qu'il enrichit les élèves de ces compétences de raisonnement utiles tout au long de la vie.

Bibliographie

« Aide individualisée en Mathématiques », Hervier Marie-Cécile, Reynaud Janine, CRDP de l'académie de Nice, 2003.

« Introduction à la logique, Théorie de la démonstration », René David, Karim Nour, Christophe Raffalli, Dunod, 2004.