Jean-Louis OVAERT a disparu mais ses textes nous restent et gardent pour la plupart toute leur pertinence.

Il y a 35 ans de cela, en 1979 à Grenoble, les IREM organisaient un colloque sur la formation des maîtres. C'était une des premières fois qu'un nombre non négligeable d'universitaires ont bien voulu confronter leurs points de vue sur cette question, entre eux mais aussi avec leurs collègues du secondaire. Quoi enseigner ? Comment enseigner ? Et cela dans la perspective d'une formation scientifique et plus particulièrement dans la perspective de la formation de futurs enseignants.

Le texte ci-dessous est la contribution de Jean-Louis OVAERT à ce colloque. Nous l'avions déjà publié à l'époque (Bulletin Vert n° 317, février 1979). Nous le republions aujourd'hui. Certains passages datent. Il en est ainsi de l'organisation des études universitaires. Il n'était pas encore question ni d'IUFM, ni d'ESPE… Mais on est bien obligé de s'apercevoir qu'une partie du questionnement auquel Jean-Louis OVAERT soumet la conception d'une formation scientifique universitaire garde toute son actualité. Et il en est de même des pistes de réponses qu'il y apporte ! Depuis lors, ici ou là, souvent grâce au travail qui s'est fait dans différents IREM, des évolutions se sont fait jour. Restons optimistes…

Daniel REISZ

Réflexions sur les thèmes de la Commission

par Jean-Louis OVAERT

Introduction

Les remarques qui suivent sont personnelles.

Une première partie a pour objectif de dégager, à partir de quelques traits dominants de l'enseignement des mathématiques, quelques questions sur les formes de fonctionnement de cet enseignement et sur les idéologies qui les sous-tendent.

Une deuxième partie reprend les mêmes problèmes sous un angle plus théorique ; elle s'appuie à la fois sur une analyse historique et épistémologique de la construction, du développement et des reprises des concepts mathématiques, et sur une analyse des pratiques enseignantes et de leurs effets. Pour mieux cerner l'enjeu des problèmes posés, quelques exemples précis ont été développés.

I —Quelques traits dominants de l'évolution de l'enseignement des mathématiques

A — L'enseignement supérieur.

1. Vers les années 1950, l'enseignement des mathématiques au niveau du supérieur est en crise. En effet, de nombreux secteurs de recherche ne sont pas pris en compte (analyse fonctionnelle, topologie algébrique, groupes de Lie, géométrie algébrique, probabilités, analyse numérique, logique mathématique, etc.).

En outre, les concepts de base mis en œuvre dans les recherches récentes (topologie générale, algèbre linéaire, algèbre commutative, variétés, mesures et distributions, …) sont absents des enseignements, sauf cas d'exception. Enfin, sur tous ces sujets, les ouvrages de synthèse font défaut, mis à part les premiers fascicules des éléments de Nicolas Bourbaki, relatifs à l'étude des structures mères. Quelles sont les causes de cet état de fait ? Manque de scientifiques à l'issue de la guerre de 1914 (thèse des membres fondateurs de Bourbaki) ? Problème de prise du pouvoir par la nouvelle école ? Mutation accélérée du cadre général des recherches ?

2. En moins de dix ans, un bouleversement considérable des contenus s'effectue selon des rythmes propres à chaque faculté (le secteur écoles d'ingénieurs, classes préparatoires, avec quelque retard). De façon dominante, ce ne sont pas les nouveaux secteurs de recherche qui sont pris en compte, mais plutôt les concepts de base, qu'il convient de « dérouler » avant toute entreprise sérieuse. Les contenus des certificats M1 M2, M3[(1)] sont à cet égard révélateurs, ainsi que ceux des ouvrages (livres ou polycopiés) parus à cette époque. L'essentiel des cours est axé sur l'exposé de définitions et théorèmes, et la mode est aux axiomatiques.

Il est rarement fait référence aux grands problèmes qui leur ont donné naissance ou qui les mettent en jeu. Les exercices proposés sont le plus souvent des applications « ad hoc », voire des « variations » sur les définitions, théorèmes et axiomatiques du cours. La topologie et la théorie de la mesure restent sans prise sur l'analyse, de même que la topologie et les variétés sur la géométrie, l'algèbre sur la théorie des équations et sur la géométrie. Le plan type d'un cours de topologie en M1 est : espaces topologiques, espaces métriques, espaces normés, espaces hilbertiens ; dans ces conditions, quand l'étudiant peut-il prendre contact avec les objets et les problèmes de la géométrie (groupes classiques, espaces homogènes associés, sous-variétés de $\mathbb{R}^n$, etc.) ? Quand peut-il attaquer les problèmes de l'analyse (différents types de convergence, espaces fonctionnels classiques, résolution des équations) ?

Plusieurs questions fondamentales se posent : ce type d'enseignement est-il spontané ou s'appuie-t-il sur des analyses explicites ? L'étude de problèmes variés, qui prend du temps, est-elle nécessaire pour former un enseignant, un chercheur ? Ne peut-elle être remise à plus tard ? Où et quand ? À l'inverse, les phases de mise en place de synthèses générales sont-elles indispensables ? Ces synthèses apportent-elles une économie de pensée ? Sous quelles conditions ? Comment articuler ces synthèses avec les problèmes qui les mettent en jeu ? L'exposé bien structuré de synthèses ne contribue-t-il pas à jeter de la clarté sur le secteur étudié ? Suffit-il pour atteindre cet objectif ? La démarche suivie est-elle compatible avec le développement de l'esprit de recherche ?

3. Néanmoins, avec quelque retard, un autre courant se fait jour, constatant qu'au niveau de la recherche, les théories se développent de façon indissociable des problèmes, et que la dimension historique des problématiques d'un secteur donné est d'une importance capitale pour le développement des recherches. Ces idées ont eu des retombées partielles sur l'enseignement : mise en place d'enseignements de

(*) M1,M2,M3 sont les anciens noms des certificats de licence de Mathématiques.

troisième cycle directement branchés sur des recherches, rédaction de monographies dans le même esprit, influence grandissante des livres étrangers au niveau des deuxième et troisième cycles. Prise en compte dans les ouvrages de synthèse des grands problèmes mettant en jeu les concepts étudiés (cf. par exemple cours d'algèbre de R. Godement, calcul infinitésimal de J. Dieudonné).

Cette évolution est-elle généralisée ? Comment se traduit-elle dans la pratique enseignante (type de cours, de T.D., d'examens, de rapports au sein de l'institution) ? Il semble qu'elle concerne plus le troisième cycle et la seconde année de second cycle que les années précédentes. Pour quelles raisons ?

Certains enseignants ont volontairement renoncé à une structuration synthétique de leur enseignement. Ce type d'enseignement est-il spontané ou s'appuie-t-il sur des analyses explicites ? Lesquelles ?

Plus récemment, une prise en charge de la dimension historique des mathématiques a été tentée : introduction d'unités d'histoire des mathématiques dans les maîtrises et les DEUG, parution d'ouvrages sur ce sujet, organisation de groupes de travail et de colloques (Nantes, Caen, Poitiers, …). Ici encore plusieurs questions importantes se posent : histoire des résultats ? des recherches ? des mathématiciens ? des problématiques ? À qui sont destinés les cours et les ouvrages ? à tous les étudiants ? aux futurs enseignants ? aux futurs chercheurs ? sur quels critères ? Histoires sectorielles ou secteurs de l'histoire générale ? Intégration de cette composante historique dans chaque enseignement, ou unités spécialisées ?

4. Les réformes récentes (Fouchet, DEUG, …) ont-elles fondamentalement modifié le mode de fonctionnement esquissé précédemment ? N'y a-t-il pas eu aggravation du morcellement des secteurs (multiplicité des maîtrises, des options du DEUG, isolement croissant des disciplines) ? L'organisation des C_i[(2)] par études de structures prend-elle en compte l'étude de problèmes intersectoriels (souvent les plus importants) ? Les thèmes d'applications retenus pour les programmes des C_i ont-ils effectivement été enseignés ? Sur quels critères s'est effectuée la coupure entre la formation des professeurs certifiés (licence) et celle des professeurs agrégés et des chercheurs (maîtrises) ? Pourquoi des maîtrises d'enseignement (un autre groupe du colloque en débat) ? Il serait intéressant de déceler des lignes directrices (si elles existent !) à travers cette volée de réformes… Voici quelques points cruciaux : des stratégies d'approfondissement des grands problèmes et de l'élargissement conjoint de l'horizon théorique ont-elles été mises en œuvre, ou l'exposé bien structuré des concepts de base tient-il lieu d'une telle stratégie ? Quelle place est faite à l'activité de l'étudiant (résolution de problèmes, documentation, expression écrite et orale, analyse de l'enseignement reçu, …) ?

B — L'enseignement secondaire.

Nous nous bornerons ici aux aspects susceptibles d'interagir avec l'enseignement supérieur.

1. Vers les années 1960, l'enseignement des mathématiques entre en crise au niveau du second degré : des causes générales (modification de la population

(*) Les C_i sont à l'époque les nouveaux noms des Certificats de licence.

scolaire, mise en place des C.E.S.) se joignent à des facteurs spécifiques aux mathématiques (coupure manifeste entre le second degré et le supérieur, rôle de plus en plus dominant des mathématiques comme instrument de sélection). Un certain nombre de collègues du supérieur et du secondaire souhaitent une réforme au niveau du second degré (cf position de l'A.P.M.E.P., colloques de Caen et surtout d'Amiens, colloques internationaux sur l'enseignement des mathématiques).

2. La mise en œuvre de ces réformes conduit à de graves difficultés. À tous les niveaux et dans la plupart des manuels on retrouve les caractères dominants de l'enseignement supérieur décrits ci-dessus (pourquoi s'en étonner !) : déconnexion entre théories et problèmes, caractère factice des exercices proposés, accent mis sur les structures, les axiomatiques, l'aspect purement logique du raisonnement ; absence de problématique générale.

Une critique assez vive se fait bientôt jour, y compris de la part de nombreux enseignants du supérieur (le plus souvent à propos de l'expérience scolaire de leurs enfants !). Qui est responsable de ces disfonctionnements ? Les initiateurs de réformes : Commission Lichnerowicz ? A.P.M.E.P. ? le manque de formation des maîtres en service (dramatique pour certaines catégories : PEGC, PEG-CET, instituteurs sur postes PEGC) ? L'enseignement supérieur, qui a lui-même distillé, directement ou non, les idéologies responsables des errements visés ? Quelles sont ces idéologies ? L'inspection qui a repris à son compte et amplifié ces idéologies ? Le système « grandes écoles » autour duquel gravite la différenciation des sections et qui commande fortement les programmes des sections scientifiques ?

Ce débat est redoublé par les problèmes socio-culturels : ne vaut-il pas mieux, à cet égard, présenter des mathématiques propres et rigoureuses ? A l'inverse, cette asepsie ne tue-t-elle pas l'activité scientifique ?

3. Face à cette crise, un autre courant se développe au sein du corps enseignant ; les idées évoquées en A 3 sont reprises. D'autres thèmes sont développés : les réformes (du second degré et du supérieur) n'ont consisté qu'en des changements de programmes (et même essentiellement des changements de discours du maître) ; elles sont muettes sur les thèmes d'activité pour l'élève ; elles ne prennent pas en compte son passé ; aucune stratégie d'approfondissement n'est dégagée ; il y a absence de réflexion sur les relations interpersonnelles au sein du système éducatif. Ici encore, plusieurs questions se posent : ce type de réflexion est-il nécessaire pour un bon enseignement des mathématiques ? Une connaissance solide des sujets à enseigner et une présentation claire ne suffisent-elles pas ? Que peuvent apporter les sciences de l'éducation et la didactique des mathématiques ? Leurs apports éventuels ont-ils un caractère scientifique ? Qui doit prendre en charge les recherches correspondantes ?

C — Perspectives.

1. Les enseignants du supérieur peuvent-ils rester sourds à tous ces problèmes et se borner à une critique extérieure du secondaire ? Cependant, les étudiants sont largement conditionnés par leurs études antérieures. En outre, les concours de recrutement des enseignants (CAPES et agrégation) ont, via leurs programmes et leur style, un effet rétroactif sur les étudiants futurs candidats, voire sur l'organisation des cursus universitaires.

Enfin, en mathématiques, la formation continue des enseignants du second degré a été prise en charge par les universités, grâce à la création des IREM. Leur fonctionnement pose de nombreux problèmes qu'il n'est pas dans notre propos d'analyser ici. Bornons-nous à ceci : les IREM auraient pu être un lieu d'échanges et de rencontres entre enseignants de tous degrés ; or, seul un petit nombre d'enseignants du supérieur ont participé à leurs activités, et les relations organiques des IREM avec les départements de mathématiques sont souvent de type administratif. Pourquoi en est-il ainsi ? Les IREM ont-ils tendance à une certaine autarcie au sein des universités ? Y a-t-il méfiance réciproque entre enseignants des divers degrés et quelle est son origine ? Y a t-il mésintérêt de la majorité des enseignants du supérieur pour les problèmes de l'enseignement secondaire ? Pour quelles raisons ?

2. À travers ces questions si diverses en apparence, surgissent des points plus cachés. Les mathématiques ne sont-elles pas perçues comme un langage, rigoureux et bien structuré ? Pour apprendre ce langage, ne suffit-il pas que l'enseignant produise un discours bien réglé devant l'étudiant, placé d'abord en situation de spectateur, exhorté à reproduire ensuite le discours visé ?

Sinon, quels sont les traits dominants de l'activité mathématique ? Plus précisément, il convient d'analyser les questions suivantes :
– Articulation entre théories et problèmes.
– Fonctionnement des concepts et statut de ces concepts.
– Articulation des grandes structures et de leurs champs d'intervention.
– Rôle de la rigueur.

Enfin, comment la pratique enseignante peut-elle prendre en compte ces analyses ?

II — Une analyse de l'activité mathématique ; son enjeu pour l'enseignement

A — Articulation entre théories et problèmes.

L'essentiel de l'activité scientifique consiste à poser des questions, mettre en œuvre des outils pour les résoudre et évaluer les résultats obtenus au regard des problèmes posés. Les théories mathématiques ne sont donc pas des fins en soi, mais sont au service d'une efficacité accrue dans la résolution de problèmes, que ces problèmes soient issus des mathématiques ou de tout autre domaine. Inversement, une attitude antithéorique est un obstacle à l'approfondissement des problèmes. Approfondissement des problèmes et élargissement du champ théorique sont en rapport dialectique.

Au niveau de l'enseignement, une insistance trop exclusive sur les théories (les résolutions de problèmes étant absentes, ou n'apparaissant que comme sous-produits) correspond le plus souvent à un discours du maître, ou, dans le meilleur des cas. à une maïeutique. Elle révèle une tendance dogmatique, ou idéaliste. À l'opposé, une étude peu structurée portant sur des problèmes épars, même chargés d'une certaine valeur esthétique, ou ludique, n'exercent la sagacité de l'étudiant que de façon purement formelle. Il s'agit ici d'une tendance empiriste.

L'on n'échappe pas à ce dilemne en oscillant d'une tendance à l'autre (mouvements oscillatoires souvent divergents !) ou même en pondérant convenablement les deux bras de la balance.

Il conviendrait plutôt d'analyser, pour chaque secteur, le type de fonctionnement entre problèmes et théories, et de préciser, pour chaque niveau d'enseignement, les grands problèmes que l'on va étudier, les théories qui leur sont liées et une problématique didactique engageant les étudiants de manière directe et constituant le support efficace d'un rapport dialectique entre le maître et les élèves.

Prenons un exemple, issu de l'enseignement du calcul infinitésimal (niveau premier cycle) : le théorème des accroissements finis et la formule de Taylor (pour plus de détails, voir les travaux de groupes « analyse » dans différents IREM). Tous les cours traitent de ces questions. Ici, les problèmes liés sont très nombreux (sens de variation des fonctions, majorations, contact, étude des maxima et minima, valeurs approchées d'une fonction, approximation des solutions d'une équation numérique, interpolation, …). Le plus souvent ces problèmes sont présentés comme de simples *applications*, ou sont même rejetés ailleurs (cours de géométrie, cours mythique de calcul numérique, unité d'informatique, …). Comparons avec des ouvrages didactiques plus anciens (Lagrange, Cauchy, Jordan, …) ou des livres étrangers (Lang : analysis 1) ou encore des textes prenant en compte l'histoire des mathématiques (Dieudonné : calcul infinitésimal) : la place faite à ces problèmes est beaucoup plus importante, et l'interaction entre problèmes et théorèmes y est mieux marquée. L'approfondissement des problèmes permet en retour de mieux saisir la dualité entre l'aspect local et l'aspect global des concepts en jeu, l'aspect qualitatif et l'aspect quantitatif.

La comparaison des rapidités de convergence des différents procédés d'approximation des solutions de $f(x) = 0$ peut fournir un terrain faisant intervenir de façon dialectique les majorations de fonctions (inégalités lipschitziennes et tayloriennes, notamment), les courbes représentatives, et le calcul expérimental sur exemples (à la main ou sur machine). Ici la théorie ne sert pas seulement à contrôler la rapidité de convergence, mais permet d'agir sur cette rapidité ; inversement, les remarques d'ordre géométrique ou les disfonctionnements expérimentation-théorie permettent de suggérer quels sont les facteurs qui jouent (pente des sécantes, …) et invitent à approfondir la théorie.

B — Les concepts mathématiques : leur fonctionnement, leur statut.

Les analyses historiques et épistémologiques montrent que le propre des activités scientifiques est de faire fonctionner de manière cohérente et efficace les différents concepts en vue de résoudre des problèmes, issus des mathématiques, d'autres sciences, de la technologie ou de la vie pratique. Le statut de ces concepts, c'est-à-dire la manière dont ces concepts s'intègrent, par voie axiomatique ou non, à d'autres secteurs mathématiques déjà constitués est un type de questions que l'on se pose le plus souvent ultérieurement, et sa résolution, parfois difficile, n'est nullement indispensable pour conférer un caractère scientifique aux théories considérées. Peut-on prétendre sérieusement qu'Euler et Lagrange n'aient pas fait d'analyse sous prétexte que la notion de limite n'était pas précisée, que Cauchy et Riemann n'aient pas fait non plus d'analyse parce qu'à leur époque $\mathbb{R}$ n'était ni construit arithmétiquement ni présenté par voie axiomatique ? Peut-on prétendre que la statistique mathématique et l'automatique sont, aujourd'hui encore, à l'état d'idéologies ? Or le fonctionnement de ces théories a fait et fait l'objet d'enseignements.

À propos de ces concepts, il convient de préciser deux points :
– un concept scientifique, aussi simple soit-il en apparence, n'est jamais enfermé dans une définition, fût-elle axiomatique, mais rassemble de manière organique toutes ses formes de fonctionnement, scientifiques et idéologiques. Ainsi le concept de cercle s'approfondit progressivement par la pratique de ses interventions en géométrie euclidienne, algébrique, conforme, différentielle, en cinématique, en technologie, en physique, etc. Il est donc différent pour un élève de Quatrième ou pour un étudiant de Troisième cycle des Universités, ou pour un mathématicien professionnel, ou pour un disciple de Ptolémée adepte de la doctrine des épicycles !
– Le fonctionnement des concepts mathématiques ne se limite pas au seul secteur mathématique. Il est donc nécessaire de détecter leurs interventions dans les autres sciences aux différents niveaux considérés, en vue de favoriser chez les étudiants le développement d'une culture scientifique plus globale. À cet effet, il convient de prévoir qu'une fraction notable du temps destiné à l'enseignement des mathématiques soit consacrée à des activités de synthèse permettant aux étudiants d'utiliser leurs acquis en mathématiques pour maîtriser des problèmes plus globaux ; en retour, cette maîtrise leur apportera un approfondissement des concepts mathématiques mis en jeu.

Ces questions de fonctionnement et de statut ont une grande importance pour l'enseignement :
– Une tendance très nette en France est un certain refus de « se salir les mains » : les concepts dont le statut est délicat sont le plus souvent évacués des cours, sinon des programmes (cas typiques au premier cycle : problèmes sur les fonctions de plusieurs variables : coordonnées curvilignes, extrema liés, intégrales multiples ; géométrie différentielle ; calcul des probabilités). Dans le cas contraire, on s'évertue à bricoler un cadre théorique rigoureux, qui coûte souvent très cher, bien que restant inadapté (exemples : théorie de Riemann des intégrales multiples, Stoko-manie, courbes et surfaces vues comme classes d'équivalences dans des ensembles d'applications, …).
– Une autre tendance consiste à jeter des interdits sur toute activité mettant en jeu, à propos d'un problème, un concept si l'exposé général de ses propriétés et de son statut n'est pas du niveau considéré (cas typique : les développements en séries entières des fonctions élémentaires ; leur emploi est rejeté en deuxième année du supérieur, car c'est à ce niveau que se place l'exposé des propriétés *générales* des séries entières. La diagonalisation des matrices, la convergence de suites de fonctions, …) L'argument de défloration ne porte pas car il ne vise que des exposés

trop superficiels de résultats généraux. Sur toutes les questions précitées, le contraste est très grand avec des ouvrages didactiques plus anciens.

– Enfin, la dimension culturelle des concepts étudiés n'apparaît que fort peu, surtout au niveau des écrits, parce que non formulable dans le cadre théorique choisi. Pourrait-on s'efforcer de faire saisir ce dont il va être question dans un chapitre, avant de rentrer dans la technique, selon la tradition des « leçons inaugurales » ? C'est parfois difficile, mais toujours payant : quelle idée se fait un étudiant d'un cours d'« analyse harmonique » ou de « théorie spectrale » bien propre, mais où il n'est pas question d'analyse spectrale des signaux ?

C — Articulation des structures et de leurs champs d'intervention.

1. L'analyse historique et épistémologique montre que l'activité mathématique ne procède ni du particulier au général, ni du « concret » à l'« abstrait », ni en sens inverse. Il existe en fait un rapport dialectique entre théories générales (axiomatiques ou non) et les champs d'intervention. C'est en effet grâce à la maîtrise préalable du fonctionnement d'un concept sur des exemples ou modèles, dont on a déjà une bonne « expérience » que l'on accède au fonctionnement de ce concept dans un cadre général. Ensuite, fort du fonctionnement général, on peut maîtriser des exemples où ce fonctionnement est plus caché [cf., par exemple, le théorème de la dimension en algèbre linéaire, ou l'inégalité de Schwarz]. Ainsi l'étude des structures n'est pas une fin en soi : elle est au service d'une maîtrise efficace de problèmes compliqués ; inversement, l'étude sérieuse préalable de modèles est indispensable pour maîtriser l'emploi d'une structure. De vagues « introductions » ne sauraient en aucun cas remplir cet objectif.

Une objection sérieuse peut se présenter : l'étude de ces modèles peut demander un temps assez long, et les « programmes » sont chargés… Il convient donc de choisir quelques terrains jouant un rôle central et qu'il est de toute manière nécessaire d'étudier sérieusement. Prenons un exemple : il peut paraître séduisant, en deuxième année, d'aborder les notions de topologie avant l'étude des fonctions d'une variable réelle, qui apparaîtra alors comme un secteur d'application de ces notions. Le gain de temps (en discours de l'enseignant !) est certain, mais le champ d'intervention possible des concepts introduits est alors très pauvre, surtout si le cours d'algèbre linéaire n'est pas assez avancé (groupes classiques, formes quadratiques, géométrie des espaces euclidiens, …). Il en résulte un manque d'intérêt des étudiants et une inefficacité telle qu'on « reprend » tout l'année suivante. D'autres stratégies sont possibles (qu'il faut adapter au niveau des classes et des amphis). Par exemple une étude sérieuse de la topologie de $\mathbb{R}$ et des suites de nombres réels, complétée par une généralisation rapide à $\mathbb{R}^n$, permet déjà la résolution de problèmes substantiels (au contraire de celle des espaces topologiques non nécessairement métrisables). Cette mise en place suffit pour aborder l'analyse des fonctions d'une variable réelle. On peut alors étudier sérieusement sur cet exemple les différents types de convergence usuels en analyse (via les suites et des *exemples* de normes). On peut d'autre part étudier des problèmes de convergence en algèbre linéaire (normes d'endomorphismes) et en géométrie différentielle (espaces projectifs, grassmanniennes). Un cours de topologie peut ensuite prendre appui sur ces exemples substantiels tirés à la fois de l'analyse et de la géométrie, et contribuer en retour à la résolution de problèmes plus compliqués issus de ces domaines.

2. La dialectique esquissée précédemment est très souvent intersectorielle. L'histoire des mathématiques et la pratique scientifique montrent que ce travail d'un secteur sur un autre joue un rôle capital, tant pour l'approfondissement des concepts que pour la résolution des problèmes et la découverte de nouveaux problèmes.

Il peut se présenter ici un conflit entre la recherche d'une certaine autonomie de chaque secteur (intéressante pour bien des questions) et ce travail intersectoriel. Deux idéologies se fixent sur ce conflit : le purisme systématique (raisonnements purement algébriques, démonstrations purement arithmétiques, preuves constructives, …) et le pâteux systématique (on mélange tout). Elles influencent fortement l'enseignement (exemples laissés à la sagacité du lecteur).

Dans les deux cas, il s'agit d'un approfondissement insuffisant du fonctionnement des concepts.

3. Il arrive souvent que la dialectique entre deux concepts soit masquée, par simple occultation de l'un d'entre eux au profit de l'autre (avec des oscillations suivant la mode du jour). Quelques exemples : suites et fonctions, intégrales et primitives, Borel-Lebesgue et Bolzano-Weierstrass, diviseurs élémentaires d'un endomorphisme, groupes et objets en géométrie, …). Il peut même arriver qu'elle disparaisse par occultation des deux concepts au profit d'un autre, censé les « couvrir » tous deux (la topologie en analyse et la topologie en géométrie sont ainsi couvertes par la topologie générale ; la théorie de Galois pour les corps de nombres et pour les corps de fonctions sont couvertes par la théorie de Galois type Jacobson-Bourbaki).

Ces occultations apportent-elles une économie de temps et de pensée ? Il n'en est rien lorsque les problèmes sous-jacents sont de type différent ; au contraire, la maîtrise des problèmes du secteur occulté est gravement compromise.

D — Rôle de la rigueur, des structures.

On se bornera à de brèves indications.

1. Presque tous les mathématiciens proclament la nécessité de la rigueur. Mais ce souci recouvre des préoccupations et des problématiques fort différentes, selon les époques, les philosophies dominantes, les moyens théoriques disponibles, et le statut des productions mathématiques visées.

En particulier, il ne faut pas perdre de vue que l'importance des moyens théoriques existants est capitale, car elle conditionne la mise en œuvre des intentions exprimées. Par exemple, les points de vue formels d'Euler et de Lagrange en théorie des fonctions *visaient* à la rigueur. La mise en œuvre a d'abord connu un succès certain, puis a rencontré des grands obstacles, d'où un rejet par Cauchy. Cependant, le thème des séries entières comme fondement de la théorie des fonctions a été repris, notamment par Weierstrass, mais dans un autre cadre théorique (séries convergentes, séries de polynômes). À son tour, cette théorie peut s'appuyer sur celle des séries formelles, …

2. Dans les recherches et les publications qui en sont issues, les mathématiciens portent leur effort sur l'efficacité des résultats, sur la justesse des démonstrations. Ils sont rarement préoccupés de donner plus de rigueur aux théories déjà bâties. C'est plutôt à propos d'ouvrages de synthèse, ou d'exposés didactiques, que ce souci de rigueur des « fondements » se manifeste. Les effets produits sont spécifiques de chaque cas et dépendent de plusieurs facteurs, par exemple :
– influence de la construction théorique visée sur le fonctionnement des concepts du secteur ;
– influence de cette construction sur d'autres secteurs ;
– efficacité et valeur heuristique des nouveaux concepts ainsi introduits.

À cet égard, on pourrait étudier la construction des rationnels, des réels, de l'intégrale, des fonctions élémentaires, des polynômes, des extensions des corps (clôtures algébriques, corps de décomposition d'un polynôme), des « objets » géométriques (espaces affines, projectifs, variétés différentiables, variétés algébriques, etc.).

3. La rigueur est liée à la cohérence du fonctionnement des concepts ; elle n'est pas conditionnée par une théorie axiomatique des « fondements ».

D'ailleurs les axiomatiques servent avant tout à *délimiter des cadres théoriques avant un fonctionnement efficace*, et non pas à fournir un « fondement » à un secteur mathématique donné.

Il conviendrait d'ailleurs d'analyser de façon plus précise cette notion de « fondement », qui recouvre souvent une attitude idéologique, *formaliste*, puisque, du point de vue scientifique qui est celui de la logique mathématique, le problème ne reçoit pas de réponse absolue.

4. Certes, l'axiomatique peut être utile pour mieux situer un secteur mathématique par rapport à d'autres, mais elle ne saurait y suffire à elle seule. Le travail intersectoriel des concepts est à cet égard un facteur beaucoup plus important. Par exemple, l'énoncé : « L'espace vectoriel des fonctions continues sur $[a,b]$ muni du produit scalaire $(f,g)\mapsto\int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$ est un espace vectoriel euclidien » n'a pas grand intérêt en soi ; il en prend un si l'on fait fonctionner sur cet exemple les concepts déjà mis en œuvre sur d'autres (orthogonalité, meilleure approximation, …) ; le rôle de la théorie des espaces vectoriels euclidiens est plus de faciliter ce travail intersectoriel que de valider une fois pour toutes les raisonnements effectués dans les différents modèles. Une telle validation, selon le mot de Laurent Schwartz, ne fait souvent que « remplacer la difficulté par l'ennui », ce qui n'est certainement pas un des objectifs à fixer pour l'enseignement des mathématiques.

À chaque fois qu'un travail sur des modèles permet un fonctionnement efficace pour la résolution de problèmes et qu'un travail intersectoriel *approfondi* n'est pas indispensable, il n'y a donc aucun bénéfice à introduire une structure nouvelle. C'est selon ces critères et non à partir d'une idéologie de la « rigueur » ou des « fondements » qu'il conviendrait de préciser les différentes structures ou concepts généraux à inclure dans les programmes d'enseignement.