Exercices de ci de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

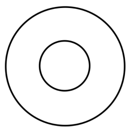
Exercices

Exercice 510–1 Michel Lafond – Dijon *arithmétique*

n est un entier naturel positif écrit en base dix. On note d(n) le dernier chiffre de n et s(n) la somme des chiffres de n.

Si $a = \dfrac{3^{2014} - 1}{2}$, démontrer que d($a$) = s(s(s($a$))).

Exercice 510 - 2 Greg Leceul – Detroit *only rule*



Deux cercles concentriques étant donnés sans leur centre, retrouver celui-ci à la règle seule (sans graduation).

Exercice 510 - 3 Louis-Marie Bonneval – Poitiers *pour nos élèves*

Les organisateurs du banquet disposent de tables rondes de 150 cm de diamètre. Ils ont fait faire des nappes carrées pour les recouvrir. Mais suite à une erreur de mesure ces nappes ne font que 140 cm de côté.
Peuvent-ils avec deux nappes recouvrir complètement une table ?

Exercice 510 - 4 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

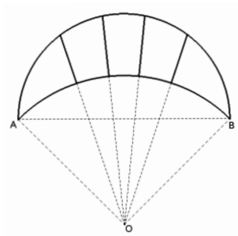
- Dans un plan euclidien, déterminer et construire à la règle et au compas les carrés dont les côtés (éventuellement prolongés) passent par quatre points donnés du plan.

Et le problème dual :

- Dans un plan euclidien, déterminer et construire à la règle et au compas les carrés dont les sommets sont situés sur quatre droites données du plan.

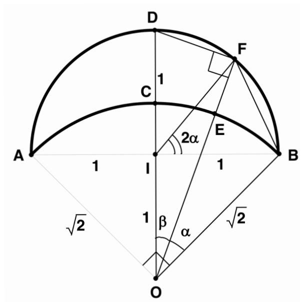
Solutions

Exercice 508–1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach



Une lunule d'Hippocrate est délimitée par le demi-cercle de diamètre [AB] et le quart de cercle (OAB) de centre O.

On demande de partager cette lunule en *n* parties d'aires égales, par des rayons issus de O.



• Voici la solution de Pham Dang Long.

Nous dessinons la figure ci-contre. Prenons pour unité de longueur le rayon du cercle de diamètre [AB], on a IA = IB = ID = IO = 1.

Alors, le rayon du cercle de centre O sera égal à

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \sqrt{2}.$$

Et l'aire de la lunule est égale à

$$\mathrm{Aire}(\Delta\mathrm{OAB}) + \frac{1}{2}\mathrm{Aire}(\text{Disque de diamètre } [\mathrm{AB}]) - \frac{1}{4}\mathrm{Aire}(\text{Disque de centre O})$$

$$= 1 + \frac{\pi}{2} - \frac{\pi\sqrt{2}^2}{4} = 1 \text{ unité d'aire.}$$

Soit F un point du quart de cercle DB. Posons $\alpha = \widehat{\mathrm{BOF}}$ et $\beta = \widehat{\mathrm{DOF}}$.
On sait calculer S(α), l'aire de la partie de la lunule délimitée par le rayon OEF et les arcs ACB et ADB des cercles concernés.

$$S(\alpha) = \mathrm{Aire}(\Delta\mathrm{OFB}) + \mathrm{Aire}(\text{secteur IBF}) - \mathrm{Aire}(\Delta\mathrm{IBF}). \tag{1}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathrm{Aire}(\Delta\mathrm{OAB}) &= \frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OF}\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathrm{OD}\cdot\cos\beta\cdot\sin\alpha \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot 2\mathrm{OD}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cdot\sin\alpha \qquad (2) \\ &= (\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot\sin\alpha = \sin^2\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\end{aligned}$$

$$\text{Aire}(\text{secteur OBE}) = \frac{1}{2}\sqrt{2}^2 \cdot \alpha = \alpha \qquad (3)$$

$$\text{Aire}(\text{secteur IBF}) = \frac{1}{2}1^2 \cdot 2\alpha = \alpha \qquad (4),$$

$$\text{Aire}(\Delta\text{IBF}) = \frac{1}{2}1^2 \cdot \sin 2\alpha = \sin\alpha \cdot \cos\alpha \qquad (5)$$

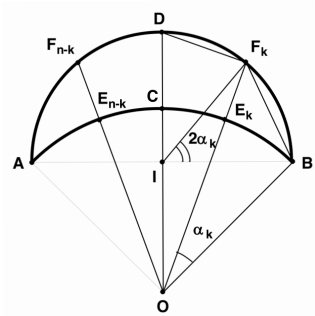
De (1), (2), (3), (4), (5) on déduit

$$\text{S}(\alpha) = \sin^2 \alpha \qquad (6)$$

Par conséquent, puisque l'aire de la lunule est égale à 1 unité d'aire, pour la partager en n parties d'aires égales, on doit construire $n - 1$ rayons OF_k, tels que

$$\text{S}(\alpha_k) = \sin^2 \alpha_k = \frac{k}{n} \qquad (7)$$

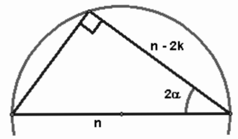
pour tout $k = 1, 2, \ldots, n - 1$.
Le problème est de construire les angles α_k, $k = 1, 2, \ldots, n - 1$, satisfaisant l'égalité (7).



La symétrie de figure permet de construire seulement $\left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$ rayons.

On voit que (7) équivaut à

$$\cos 2\alpha_k = \frac{n-2k}{n}.$$

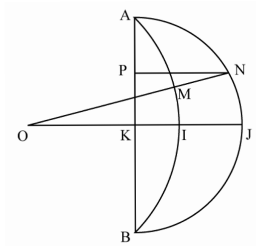


Et avec $1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $2\alpha_k$ est un angle aigu d'un triangle rectangle d'hypoténuse n et de coté adjacent $n - 2k$.
On peut construire les angles $2\alpha_k$ à la règle et au compas. Après les avoir obtenus, on construira les rayons IF_k du cercle de diamètre [AB], ($\widehat{\text{BIF}_k} = 2\alpha_k$) et puis les rayons OF_k du cercle de centre O.
À la fin, nous construisons les rayons OF_{n-k} symétriques des rayons OF_k. Dans le cas où n est pair, on ne doit pas construire le rayon $\text{OF}_{n/2}$ qui est le rayon OD, le point $\text{E}_{n/2}$ étant le point O.
La construction est terminée.

• Et voici la solution de André Stoll :
(*qui rappelle lui aussi, dans un premier temps, que l'aire de la lunule est égale à celle du triangle OAB*).

Soit à présent un point N sur le demi-cercle C_1 ; Le segment [ON] coupe C_2 en M.

Le résultat ci-dessus se généralise de la manière suivante :
l'aire de la portion de lunule (IJNM) est égale à l'aire du triangle (OKN).
En effet



$$\begin{aligned}\text{Aire}(\text{ONJ}) &= \text{Aire}(\text{OIM}) + \text{Aire}(\text{IJNM})\\ &= \text{Aire}(\text{OKN}) + \text{Aire}(\text{KNJ}).\end{aligned}$$

Or :

$$\frac{\text{Aire}(\text{KNJ})}{\text{Aire}(\text{OIM})} = \left(\frac{\text{AK}}{\text{OA}}\right)^2 \frac{2\alpha}{\alpha} = \frac{1}{2} \times 2 = 1$$

où α désigne l'angle JON.
Donc, les deux secteurs angulaires (KNJ) et (OIM) ont la même aire et

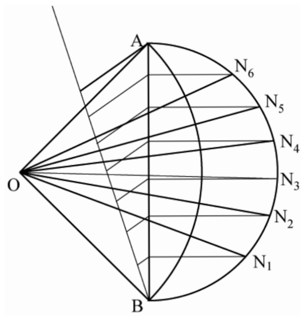
$$\text{Aire}(\text{IJNM}) = \text{Aire}(\text{OKN}).$$

Soit P le projeté orthogonal de N sur [AB] ; quand N varie, l'aire du triangle (OKN) est proportionnelle à KP. Il en est donc de même de l'aire de la portion de lunule (IJNM).

Ceci nous donne la réponse au problème.
Sur une demi-droite quelconque d'origine B prenons les points $Q_0 = B, Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tels que :

$$Q_0Q_1 = Q_1Q_2 = \ldots = Q_{n-1}Q_n.$$

(Sur la figure ci-dessous, on a pris $n = 7$).
La parallèle à Q_nA en Q_i coupe le segment [AB] en P_i. Pour ne pas alourdir le dessin, les points Q_i et P_i ne sont pas notés sur la figure.
La perpendiculaire à [AB] passant par P_i coupe C_1 en N_i.



Les rayons ON_i partagent la lunule en n parties d'aires égales.

Exercice 508–3 Georges Lion – Wallis *tiré de « Euclid and beyond », par Robin Hartshorne*

Soit un angle droit $\widehat{xOy}$, un point A à l'intérieur du premier quart de plan et un point B sur [Oy) tels que OB > OA.
Construire le cercle de centre O coupant [Ox) en C et [Oy) en D tels que les droites (BC) et (DA) soient parallèles.

Solutions : Pierre Lapôtre (Calais), Odile Simon (La Prénessaye), Raymond Heitz (Piriac), Georges Lion (Wallis).

• Voici la solution de Odile Simon.
La géométrie analytique peut être utilisée pour résoudre ce problème.

Il suffit de déterminer le rayon r du cercle de centre O coupant [Ox) en C et [Oy) en D.
On pose les coordonnées des points dans le système orthonormé :

$$\mathrm{A}\,(x_1, y_1),\ \mathrm{B}\,(0, y_2),\ \mathrm{D}\,(0, r),\ \mathrm{C}\,(r, 0).$$

Les droites (DA) et (BC) sont parallèles, donc elles ont le même coefficient directeur, soit a.
Comme elles coupent l'axe [0y) en D et B, on a les équations respectives :

$$\begin{aligned} &(\mathrm{DA}) \quad y = ax + r, \\ &(\mathrm{BC}) \quad y = ax + y_2. \end{aligned}$$

En exprimant que ces droites passent respectivement par A et C, on a le système :

$$\begin{aligned} y_1 &= ax_1 + r \\ 0 &= ar + y_2 \end{aligned}\ .$$

La solution r est non nulle, sinon C et D seraient confondus en O, donc on peut faire la substitution :

$$\begin{aligned} a &= -y_2\,/\,r \\ y_1 r &= -y_2 x_1 + r^2 \end{aligned}\ .$$

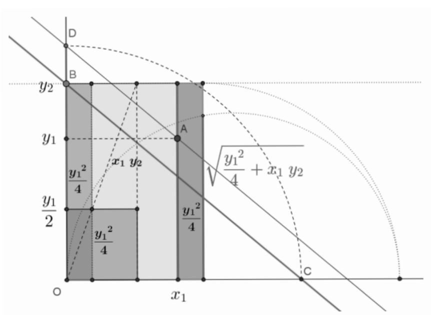
L'équation du second degré, a une seule solution positive :

$$r = \frac{y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4x_1 y_2}}{2}.$$

Nota.
Celle de l'auteur exceptée, aucune réponse ne propose la construction de ce nombre. Je vous en propose une ci-dessous sans aucune autre précision que celle d'avoir transformé l'écriture de r en

$$r = \frac{y_1}{2} + \sqrt{\frac{y_1^2}{4} + x_1 y_2}\,.$$

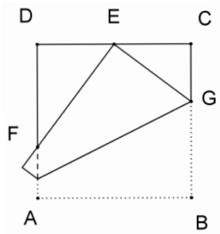
Vous trouverez sur le site de l'association ces différentes constructions détaillées et accompagnées de leurs fichiers GeoGebra respectifs.



Remarque.
La contrainte OB > OA permet simplement de limiter les différents cas pour les constructions, sans être spécifique de l'existence et de l'unicité de la solution.

Exercice 508–4 à défaut de se plier en quatre **…** *pour nos élèves*

Voici un pliage, connu sous le nom de théorème de Haga, qui permet de déterminer le tiers du côté d'un carré.
Le milieu E du côté [DC] ayant été marqué au préalable (*on ramène* [CB] *sur* [DA] *et on ne fait que marquer le pli sur* E), on plie le carré ABCD de façon à amener le coin inférieur droit B, sur E.
Le côté qui était en bas coupe maintenant le côté gauche [DA] en F.
Il s'agit de prouver que F est au tiers (ou aux deux tiers) du côté [DA].

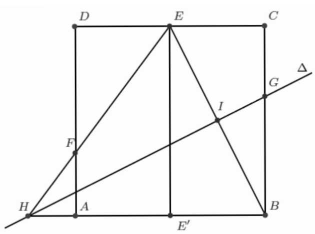


On peut faire plier des carrés de côté 8 ou 16 cm par exemple…

Solutions : Pierre Lapôtre (Calais), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Piriac), Odile Simon (La Prénessaye).

• Voici la solution de Pierre Lapôtre.
(qui propose une première solution analytique, puis celle qui suit)

Avec les mêmes notations et en notant E′ le milieu de [AB], on observe que les triangles rectangles ECB et GIB sont semblables, de même pour les triangles GIB et BIH. Pour ces triangles semblables, le rapport des longueurs des côtés de l'angle droit vaut $\frac{1}{2}$.
Supposons le carré de côté 1.



Le théorème de Pythagore dans ECB donne $\mathrm{EB}=\frac{\sqrt{5}}{2}$. D'où $\mathrm{IB}=\frac{\sqrt{5}}{4}$. On en déduit que $\mathrm{IH}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ puis que $\mathrm{HB}=\frac{5}{4}$ et ainsi $\mathrm{HA}=\frac{1}{4}$, ce qui conduit à $\mathrm{HE}'=\frac{3}{4}$.

La propriété de Thalès dans le triangle HE′E montre que AF = $\frac{1}{3}$ E'E soit AF = $\frac{1}{3}$ AD.

****

Remarque
L'exercice 508 - 2 n'a apparemment pas eu l'heur de vous émoustiller. En l'absence d'autre réponse, la solution de l'auteur sera fournie dans le prochain BV.