Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 510–1 (Michel Bataille, Rouen)

Soit ABC un triangle rectangle en A, non isocèle. Trouver la valeur minimale de PA lorsque P est un point intérieur au triangle tel que

$$\frac{\mathrm{PA}}{\sin\alpha}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\mathrm{PB}}{\sin\beta}\cdot\frac{\mathrm{PC}}{\sin\gamma}},$$

où

$$\alpha=\widehat{\mathrm{BPC}},\ \beta=\widehat{\mathrm{CPA}},\ \gamma=\widehat{\mathrm{APB}}.$$

Problème 510–2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne n réels $x_1, \ldots, x_n$, tous distincts. Montrer que pour tout réel $q \in \mathbb{R} - \{-1,0,1\}$

$$\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}\frac{qx_k - q^{-1}x_j}{x_k - x_j} = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}}.$$

Problème 510–3 (Michel Lafond, Dijon)

Un couple d'entiers (p, q) avec $2 \le p \le q$ est dit générateur si tout entier naturel peut s'écrire sous la forme $\lfloor a\sqrt{p}\rfloor + \lfloor b\sqrt{q}\rfloor$ avec $a, b \in \mathbb{N}$ et où $\lfloor\ \rfloor$ désigne la partie entière.
Démontrer que les couples (2, 9) et (3, 3) sont générateurs puis trouver tous les couples générateurs.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 499–3 (Xavier Reliquet, Paris)

Tout sous-corps de $\mathbb{C}$ est-il stable par conjugaison ?

Solutions de Georges Lion (Wallis), Xavier Reliquet (Paris), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques), Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon).

La réponse est non. Voici deux contre-exemples.

Le premier contre-exemple est une extension transcendante proposée par **Pierre Renfer**. Le nombre $\alpha = \pi + \mathrm{i}$ est transcendant (somme d'un nombre transcendant et d'un nombre algébrique). Le corps $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\alpha)$ est formé de tous les éléments de la forme

$$\frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}(\alpha)}, \quad \mathrm{P} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}], \mathrm{Q} \in \mathbb{Q}[\mathrm{X}] - \{0\}.$$

Si $\overline{\alpha} = \pi - \mathrm{i}$ appartenait à K, alors $\mathrm{i} = \frac{1}{2}\left(\alpha - \overline{\alpha}\right)$ serait également dans K. Il existerait donc des polynômes P, Q $\in$ $\mathbb{Q}[\mathrm{X}]$, Q non nul, tel que

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{P}(\alpha)}{\mathrm{Q}(\alpha)}$$

Alors

$$\mathrm{P}(\alpha)^2 + \mathrm{Q}(\alpha)^2 = 0,$$

et α serait algébrique, ce qui n'est pas le cas.

Xavier Reliquet a sensiblement la même idée en considérant $\alpha = \mathrm{e} + \mathrm{i}$.

Le second contre-exemple est une extension algébrique, proposée dans plusieurs courriers. On pose $\beta = \sqrt[3]{2}\,\mathrm{j}$, où $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ et l'on considère K = $\mathbb{Q}(\beta)$, extension algébrique de degré 3 puisque β est racine de $\mathrm{X}^3 - 2$ et que ce polynôme est irréductible sur $\mathbb{Q}$. On montre par l'absurde que $\overline{\beta}$ n'appartient pas à K. Si $\overline{\beta}$ appartenait à K, alors $\mathrm{j} = \frac{\overline{\beta}}{\beta}$ serait dans K. Mais j est algébrique de degré 2 et 2 ne divise pas 3, d'où la contradiction.

Problème 502–2 (Michel Lafond (Dijon))

Soit p et q deux entiers premiers entre eux et impairs. Un damier rectangulaire $p \times q$ a ses cases colorées alternativement en noir et blanc, les quatre coins étant noirs. Une diagonale Δ est tracée. Une partie de Δ est noire, l'autre est blanche. Démontrer que la proportion de noir le long de Δ est égale à $\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{pq}\right)$.

Solutions de Michel Lafond (Dijon) et Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques).

On peut supposer $p > q$. On choisit l'unité de longueur de sorte que les carrés du damier aient q comme longueur de côté. On choisit un repère orthonormé tel que les sommets du damier aient pour coordonnées

$$\mathrm{A}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad \mathrm{B}\begin{pmatrix}pq\\0\end{pmatrix}\quad \mathrm{C}\begin{pmatrix}pq\\q^2\end{pmatrix}\quad \mathrm{D}\begin{pmatrix}0\\q^2\end{pmatrix}.$$

On choisit de travailler avec la diagonale (AC), d'équation

$$y=\frac{q}{p}x.$$

On projette les intervalles colorés de cette diagonale sur (AB) (l'axe des x). D'après Thalès, cela ne modifie pas la proportion de noir. Les points de changement de couleur sur la diagonale sont les points d'intersection de la diagonale avec une droite verticale ou horizontale du quadrillage. Les points d'intersection avec les verticales ont pour abscisses les multiples de q et les points d'intersection avec les horizontales ont pour abscisses les multiples de p.
On range dans l'ordre croissant les multiples de p et q compris entre 0 et pq :

$$u_1=0<u_2=q<u_3<\cdots<u_{p+q-1}=(p-1)q<u_{p+q}=pq.$$

L'avant dernier est toujours $(p-1)q$ car c'est le plus proche de pq.
La proportion de noir est égale à

$$\mathrm{R}=\frac{1}{pq}\sum_{k=1}^{\frac{p+q}{2}}(u_{2k}-u_{2k-1}).$$

Si u_n et u_{n+1} sont tous deux multiples de q, la différence $u_{n+1}-u_n$ vaut q. Sinon, on peut écrire

$$u_{n+1}-u_n=up-vq=a$$

où a, u, v sont des entiers,

$$1\leq a\leq q-1,$$

et u et v sont de même signe et

$$1\leq|u|\leq q-1,\quad 1\leq|v|\leq p-1.$$

Quitte à remplacer u par $q+u$ et v par $p+v$, on peut suposer u et v positifs. D'après Bézout, l'équation $up-vq=a$ possède des solutions entières (u,v) (puisque p et q sont premiers entre eux). Et si (u_0,v_0) est une solution particulière, les autres sont de la forme

$$\left(u_0 + kq, v_0 + kp\right).$$

Il existe un unique entier k tel que $1 \leq u \leq q - 1$. Alors

$$vq = up - a \geq p - a \geq p - (q-1) \geq 1,$$

donc $v \geq 1$. Et

$$vq = up - a \leq (q-1)p - 1 \leq (q-1)p,$$

donc $v \leq p - 1$. Pour tout $a \in [[1, q-1]]$, il existe donc exactement deux indices n tels que $u_{n+1} - u_n = a$.
D'autre part, on remarque que si

$$u_{n+1} - u_n = a = u_p - u_q,$$

alors $n = |u + v|$. Et la parité de n est celle de a.

En conclusion, les termes de la somme pqR sont tous impairs. Pour chaque valeur impaire de a entre 1 et $q - 1$, exactement deux termes de la somme valent a. Tous les autres termes valent q. Donc

$$pq\mathrm{R} = 2(1 + 3 + \cdots + q - 2) + q\left(\frac{p+q}{2} - (q-1)\right).$$

Finalement,

$$pq\mathrm{R} = \frac{1}{2}(q-1)^2 + \frac{1}{2}(p - q + 2)q = \frac{pq+1}{2}.$$

La proportion de noir est donc

$$\mathrm{R} = \frac{pq+1}{2pq} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{pq}\right).$$

Problème 502–3 (Jean-Claude Blanchard (Brunoy))

Pour $n \in \mathbb{N}$, calculer le pgcd de $2^n + 3^n$ et de 5^n.

Solutions de Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Jean-Claude Carrega (Lyon), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Piriac), Michel Lafond (Dijon), Jean-Christophe Laugier (Rochefort), Georges Lion (Wallis), Pierre Renfer (Saint-Georges d'Orques), Vincent Thill (Migennes), Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon).

On commence par le cas où n est pair. Alors

$$2^n + 3^n \equiv 2^n + (-2)^n \equiv 2 \cdot 2^n \quad \mathrm{mod}\, 5,$$

donc le pgcd de $2^n + 3^n$ et 5^n vaut 1.

Si n est impair, on peut l'écrire $n = 5^k l$ où l est un entier impair premier avec 5. On montre que le pgcd cherché vaut 5^{k+1}. On procède par récurrence sur k.
• Si $k = 0$, alors $n = l$ et

$$2^n+3^n \equiv (2+3)\left(2^{n-1}-2^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1}\right)=5\mathrm{A},$$

où

$$\mathrm{A}=2^{n-1}-2^{n-2}\cdot 3+\cdots+3^{n-1}.$$

Modulo 5,

$$\mathrm{A}\equiv 2^{n-1}-2^{n-2}\cdot(-2)+\cdots+(-2)^{n-1}\equiv n\cdot 2^{n-1}\neq 0 \quad \mathrm{mod}\, 5.$$

Donc $2^n + 3^n = 5\mathrm{A}$ avec A non divisible par 5. Le pgcd cherché vaut 5.

• Soit maintenant un entier $k \geq 0$ pour lequel la propriété a lieu. Posons

$$n=5m=5^{k+1}l,\quad a=2^m,\quad b=3^m$$

où l est un entier non divisible par 5. Alors

$$\begin{aligned}2^n+3^n &= a^5+b^5\\ &=(a+b)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)\\ &=(a+b)\left(2^{4m}-2^{3m}3^m+2^{2m}3^{2m}-2^m3^{3m}+3^{4m}\right)\\ &=(a+b)\mathrm{A},\end{aligned}$$

où

$$\mathrm{A}=2^{4m}-2^{3m}3^m+2^{2m}3^{2m}-2^m3^{3m}+3^{4m}.$$

Puisque n est impair, m l'est aussi et l'on peut écrire

$$\mathrm{A}=2^{4m}+2^{3m}(2-5)^m+2^{2m}(2-5)^{2m}+2^m(2-5)^{3m}+(2-5)^{4m}.$$

Avec la formule du binôme, on trouve la congruence suivante :

$$\mathrm{A}\equiv 2^{4m}\times 5 \quad \mathrm{mod}\, 5.$$

Puisque 2^{4m} est premier avec 5, A est divisible par 5 mais pas par 25. Par hypothèse de récurrence, $2^m + 3^m$ est divisible par 5^{k+1} mais pas par 5^{k+2}. Donc $2^n + 3^n = (2^m + 3^m) \times \mathrm{A}$ est divisible par 5^{k+2} mais pas par 5^{k+3}. En notant $\wedge$ le pgcd,

$$\left(2^n+3^n\right)\wedge 5^n=5^{k+2},$$

ce qui termine la récurrence.

L'auteur de cette question, **Jean-Claude Blanchard**, propose ensuite une généralisation : soit r un nombre premier impair et p, q des entiers naturels strictement positifs tels que $p + q = r$. En notant k la valuation r-adique de n, à savoir l'entier maximal tel que r^k divise n, on va montrer que si n est pair, alors

$$\left(p^n+q^n\right)\wedge r^n=1$$

tandis que si n est impair,

$$\left(p^n+q^n\right)\wedge r^n=r^{k+1}.$$

Le cas où n est pair est facile, puisque, par parité de n,

$$p^n+q^n=p^n+\left(r-p\right)^n\equiv 2p^n \mod r.$$

Or 2 et p sont premiers avec r. Donc $\left(p^n+q^n\right)\wedge r^n=1$.

On suppose maintenant n impair et l'on procède par récurrence sur k.

• Si $k=0$, alors, par imparité de n,

$$p^n=\left(r-q\right)^n\equiv -q^n+nrq^{n-1} \mod r^2.$$

Donc

$$p^n+q^n\equiv +nq^{n-1}\times r \mod r^2,$$

et comme nq^{n-1} est premier avec r, la valuation r-adique de p^n+q^n vaut 1.
Donc $\left(p^n+q^n\right)\wedge r^n=r$, comme annoncé.

• On suppose le résultat établi jusqu'à un certain rang $k\geq 0$. On suppose que n est de valuation r-adique $(k+1)$ et l'on écrit

$$n=r\times m \quad \text{et} \quad u_m=p^m+q^m.$$

Par hypothèse de récurrence, la valuation r-adique de u_m vaut $k+1$. Et

$$p^n=\left(p^m\right)^r=\left(u_m-q^m\right)^r=\sum_{i=0}^{r}(-1)^i\binom{r}{i}u_m^{r-i}q^{mi}.$$

On isole le terme pour $i=r$:

$$u_n=p^n+q^n=\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r}{i}u_m^{r-i}q^{mi}.$$

On isole le terme pour $i=0$:

$$u_n=u_m^r+\sum_{i=0}^{r-1}(-1)^i\binom{r}{i}u_m^{r-i}q^{mi}.$$

• Le terme r^{k+1} divise u_m (c'est l'hypothèse de récurrence) donc $r^{r(k+1)}$ divise u_m^r. Or r est premier impair donc $r\geq 3$ donc $k(r-1)+(r-3)\geq 0$, c'est-à-dire que $k(r+1)\geq k+3$. Ainsi, r^{k+3} divise u_m^r.

• De même, pour $1\leq i\leq r-2$, le terme $r^{(r-i)(k+1)}$ divise u_m^{r-1} et comme $(r-i)(k+1)\geq k+2$, on en déduit que r^{k+2} divise u_m^{r-1}.

• Classiquement, comme r est premier, r divise le coefficient binomial $\binom{r}{i}$ pour $1 \le i \le r-1$.

En conclusion, modulo r^{k+3}, ne reste que le terme pour $i = r-1$:

$$u_n = u_m^r \equiv r u_m \times q^{m(r-1)} \mod r^{k+3}.$$

Ainsi, la valuation r-adique de u_n vaut $k+2$, ce qui conclut.

Problème 502–4 (G.L. Kocher, Ravières)

On suppose que le trinôme $ax^2 + bx + c$ possède deux racines réelles distinctes. Trouver les solutions de l'équation

$$a\left(ax^2+(b+1)x+c\right)^2+b\left(ax^2+(b+1)x+c\right)+c-x=0.$$

Solutions de Lazare-Georges Vidiani (Fontaine Les Dijon), Georges Kocher (Ravières), Raymond Heitz (Lavergne)

L'énoncé suppose $a \neq 0$. Soit $\mathrm{P}(x) = ax^2 + (b+1)x + c$. Les racines de l'équation $\mathrm{P}(x) = x$ sont celles du trinôme $ax^2 + bx + c$, disons x_1 et x_2, dont les somme et produit valent respectivement $-\dfrac{b}{a}$ et $\dfrac{c}{a}$ L'équation $\mathrm{P}(x) = x$ impliquant $\mathrm{P}(\mathrm{P}(x)) = x$, les racines x_1 et x_2 sont aussi racines de $\mathrm{P}(\mathrm{P}(x)) = x$, c'est-à-dire racines de

$$\mathrm{E}(x)=a\left(ax^2+(b+1)x+c\right)^2+b\left(ax^2+(b+1)x+c\right)+c-x.$$

Dans $\mathrm{E}(x)$, le terme en x^3 est $2\,a^2(b+1)$ et le terme constant est $ac^2 + bc + c$. Soit x_3 et x_4 les deux autres racines de $\mathrm{E}(x)$. Elles vérifient le système suivant :

$$x_1+x_2+x_3+x_4=2a^2(b+1),$$
$$x_1x_2x_3x_4=ac^2+bc+c.$$

D'où

$$x_3+x_4=2a^2(b+1)+\frac{b}{a}=\frac{2a^3(b+1)+b}{a},$$
$$x_3x_4=\left(ac^2+bc+c\right)/(c/a)=a(ac+b+1).$$

Les quatre racines de $\mathrm{E}(x)$ sont donc x_1 et x_2 racines du trinôme $ax^2 + bx + c$, ainsi que x_3 et x_4, racines du trinôme $x^2 - ((2a^3(b+1) + b)/a)x + a(ac + b + 1)$.