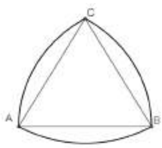
Tout ensemble est-il gonflable ?

Marc Roux(*)

0. Introduction

Les réflexions qui suivent sont issues du rapprochement des articles « Diamètres et aires », par Pierre Legrand (BV 508), et « Les ensembles gonflés », par l'atelier Math.en.jeans du lycée de Briançon (Quadrature nº 90) ([1] et [2] dans la bibliographie). Un grand merci à Pierre Legrand, relecteur attentif qui m'a aussi fourni quelques idées et références.

« Ensemble gonflé » est le néologisme imagé adopté par les animateurs du groupe Math.en.jeans pour désigner les « ensembles de largeur constante », abondamment étudiés aux XIXe et XXe siècles (appelés parfois *orbiformes* dans la littérature) ; ils ont eu des applications techniques, par exemple le moteur Wankel (moteur à piston rotatif). Le plus célèbre, et le plus simple (mis à part le disque) des ensembles de largeur constante est le triangle de Reuleaux : triangle curviligne construit à partir d'un triangle équilatéral en traçant trois arcs de cercle centrés aux sommets du triangle et de rayon le côté du triangle (fig 1) :



Dans ce même article, il y a plusieurs exemples de recherche d'un ensemble « gonflé », dans le plan, contenant un ensemble donné E, et de même diamètre que E ; les auteurs les appellent « gonflés de E ». Osant à mon tour un néologisme, je dirai que si cet ensemble existe, E est « gonflable ». Je me suis demandé quels étaient les ensembles bornés pour lesquels une telle inclusion est possible, autrement dit, quels sont les ensembles « gonflables » ; étonnamment, la question n'est pas abordée dans les ressources citées en bibliographie. Je suis parvenu à démontrer que la réponse est : *tous les ensembles bornés sont « gonflables »*.

Avant d'entrer dans les détails, rappelons que le *diamètre* d'un ensemble E borné est la borne supérieure des distances de deux points de E. Il est dès lors clair que E a le même diamètre que son adhérence $\overline{E}$, qui est un compact.

1. Préliminaire : quatre définitions équivalentes

Selon les sources, les définitions de « ensemble de largeur constante », ou « ensemble gonflé » sont diverses ; en voici quatre, dont je montrerai l'équivalence. La quatrième est celle qui correspond à l'adjectif « gonflé », et c'est celle que j'utiliserai dans la suite de l'article.

(*) marc.roux15@wanadoofr

Définition 1 : un ensemble G de diamètre d est de largeur constante si et seulement si G est compact, convexe, et si pour tout point A du bord de G il existe un point B de G tel que AB = d.

Définition 2 : Soit G un compact convexe, C son bord. Pour une direction donnée, on peut définir deux droites parallèles (appelées « lignes d'appui ») qui ont au moins un point commun avec C et telles que G soit entre ces deux droites. G est dit de largeur constante si la distance entre les lignes d'appui est indépendante de leur direction. Cette distance est la largeur de G.

Remarque 1 : *bien sûr, les lignes d'appui sont des tangentes à* C, *en tout point où ces tangentes existent. Rappelons qu'une courbe qui est le bord d'un compact convexe admet des tangentes en tout point, sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points anguleux. Donc en tout point du bord d'un compact convexe il passe au moins une ligne d'appui.*

Définition 3 : un compact convexe du plan G est de largeur constante l si sa projection orthogonale sur toute droite est un segment de longueur l.

Définition 4 : (d'après l'article dans Quadrature) : un ensemble G de points du plan, borné, de diamètre d, est « gonflé » si l'ajout de n'importe quel point du plan n'appartenant pas à G augmente son diamètre.

Remarque 2 : *contrairement aux trois premières, la définition 4 ne présuppose pas que* G *est convexe, ni même compact ; la démonstration d'équivalence prouvera que la seule hypothèse « l'ajout d'un point quelconque augmente le diamètre » implique compacité et convexité.*

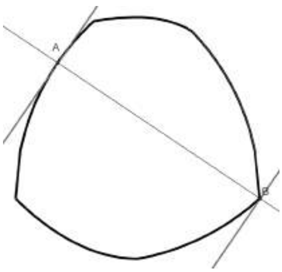


Fig 2

Démonstration de l'équivalence des quatre définitions 1, 2, 3, 4 :

Lemme 1 : Soit E un ensemble plan de diamètre d, A et B deux points de E tels que AB = d, Δ_1 et Δ_2 les perpendiculaires à (AB) passant par A et B ; alors Δ_1 n'a pas d'autre point commun avec E que A, et Δ_2 n'a pas d'autre point commun avec E que B.

En effet si $P \in \Delta_1 \backslash \{A\}$, BP > BA = d, donc $P \notin E$; même démonstration pour Δ_2.
Δ_1 *et* Δ_2 *sont des lignes d'appui au sens de la définition 2 ; si ce sont des tangentes,* (AB) *est la normale au bord de* E, *en* A *et en* B.

La distance de Δ_1 et Δ_2 est d ; on en déduit immédiatement le lemme suivant :

Lemme 2 : Si G est un ensemble de largeur constante au sens de la définition 2, sa largeur est égale à son diamètre.

1 $\Rightarrow$ 2 : Si G vérifie la définition 1, d'après le lemme 1, les perpendiculaires à (AB) en A et B sont des lignes d'appui, dont la distance, égale à d, est constante.

2 $\Rightarrow$ 1 : Si G vérifie la définition 2, d'après le lemme 2, la distance, constante, des lignes d'appui est égale au diamètre d de G. En tout point A il passe une ligne d'appui (remarque 1), et la deuxième ligne d'appui parallèle à la première rencontre le bord de G en un point B. A et B sont tels que AB = d puisque, d'après le lemme 1, les lignes d'appui sont perpendiculaires à (AB).

2 $\Leftrightarrow$ 3 : la distance entre les lignes d'appui est égale à la longueur de la projection sur une droite perpendiculaire aux lignes d'appui.

4 $\Rightarrow$ 1 : Soit G un ensemble borné, de diamètre d, dans le plan. Si G n'est pas fermé, on peut lui adjoindre tout point de son adhérence sans changer son diamètre ; si G n'est pas convexe, il existe A, B dans G et P sur le segment [AB] tels que $P \notin G$; pour tout Q de G, $PQ \leq \text{Max}(QA, QB) \leq d$; on peut donc ajouter P à G sans changer son diamètre.

Tout ensemble vérifiant la définition 4 est donc fermé borné, donc compact, et convexe. Démontrons, en nous inspirant de [2], qu'il vérifie aussi la condition « pour tout point A du bord de G il existe un point B de G tel que AB = d » : pour tout A point du bord de G, par compacité de G, il existe un point B sur le bord de G tel que $d(A,B) = \sup_{C\in G} d(A,C)$. Si d(A,B) < d, alors notons A′ le point de la droite (AB), extérieur au segment [AB] du côté de A, tel que A′B = d. Pour tout point C de G, on a $CA' \leq CA + AA' \leq BA + AA' = BA' = d$, donc l'adjonction de A′ n'augmente pas le diamètre de G, ce qui contredit l'hypothèse.

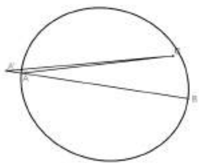


Figure 3

1 $\Rightarrow$ 4 : Si G vérifie la définition 1, et si P est un point extérieur à G, soit P′ la projection de P sur G (point de G le plus proche de P) ; un résultat classique dit que, pour tout Q dans G, l'angle $\widehat{PP'Q}$ est obtus ; il existe par hypothèse Q tel que $P'Q = d$, alors $PQ > d$. Donc l'ajout de P augmente le diamètre de G.

2. Propriétés d'inclusion.

Nous allons montrer l'inclusion de tout ensemble plan borné E dans un « gonflé » de même diamètre, en passant par l'intermédiaire de l'enveloppe convexe de E.

Propriété 1 : Soit E un ensemble quelconque, borné, de points du plan, de diamètre d. L'enveloppe convexe de E est de diamètre d.

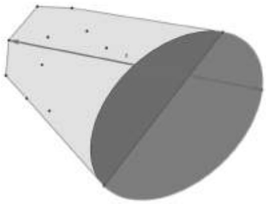


Fig 4 : L'ensemble E est formé d'une ellipse et son intérieur, et de points isolés.

Démonstration : elle est simple si on connaît le théorème de Carathéodory : *l'enveloppe convexe* E′ *d'une partie* E *du plan est l'ensemble des barycentres à coefficients positifs ou nuls des triplets de points de* E. *Autrement dit,* E' *est la réunion des triangles ayant leurs sommets dans* E.[1]
En effet (voir fig 5), si E a pour diamètre d et si M et P sont deux points de E′, M est dans un triangle ABC, P dans un triangle FGH, A, B, C, F, G, H étant dans E. Alors MP ≤ Max(AF, AG, AH, BF, BG, BH, CF, CG, CH) ≤ d.

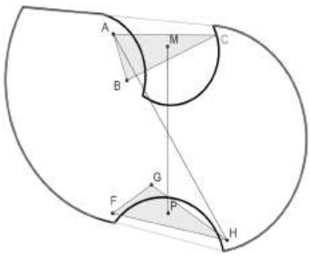


Fig 5

Propriété 2 : Tout ensemble borné convexe C est inclus dans un compact convexe de même diamètre.

En effet la fermeture $\overline{C}$ de C répond à la question.

Propriété 3 :Tout compact convexe E du plan est inclus dans un ensemble de largeur constante, de même diamètre que E.

Démonstration : Soit E compact convexe du plan, de diamètre d, et F sa frontière (ou bord). Soient A, B deux points de F tels que AB = d. Pour faciliter la rédaction, et sans perte de généralité, on suppose que $d = 1$, que la droite (AB) est horizontale, A étant à gauche et B à droite). F est la réunion de deux courbes C_1 et C_2, d'extrémités A et B, C_1 étant au dessus de (AB), à concavité tournée vers le bas, C_2 étant au dessous de (AB), à concavité tournée vers le haut.
L'idée intuitive de la démonstration est de « gonfler » d'abord la partie supérieure en « remontant » C_1 le plus possible en chaque point, puis « gonfler » de même la partie

(1) Une démonstration de ce théorème se trouve, entre autres, sur Wikipedia :
http://fr.wikipedia.org/wiki/Th%C3%A9or%C3%A8me_de_Carath%C3%A9odory_(g%C3%A9om%C3%A9trie)

inférieure en « abaissant » C2.

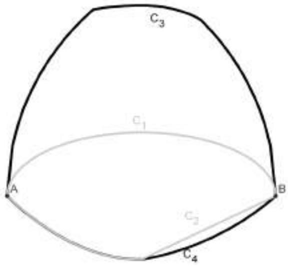


Fig 6

Première étape : on va définir une courbe C_3 dont chaque point M sera à la distance 1 d'un point Q de C_2, et à une distance inférieure ou égale à 1 des autres points de C_2.

Soit S_1 l'intersection de tous les disques fermés de rayon 1 centrés sur C_2 ; c'est un compact convexe. Sa frontière coupe (AB) en A et B, car quel que soit $I \in E$, $IA \leq 1$ et $IB \leq 1$, et si J est sur (AB) à l'extérieur de [AB], $JA > 1$ ou $JB > 1$. Soit C_3 la partie de cette frontière située dans le demi-plan de frontière (AB), au dessus de (AB). Ainsi chaque point de C_3 est à la distance 1 d'au moins un point de C_2 et à une distance inférieure ou égale à 1 des autres points de C_2 ; et, de par la définition de S_1, tout point du demi-plan supérieur situé hors de S_1 est à distance strictement supérieure à 1 d'au moins un point de C_2.

Deuxième étape : il n'est pas assuré que chaque point de C_2 soit à la distance 1 d'au moins un point de C_3 ; on va donc remplacer C_2 par une courbe C_4, construite à partir de C_3, de la même manière qu'on a construit C_3 à partir de C_2.

Soit S_2 l'intersection de tous les disques fermés de rayon 1 centrés sur C_3 ; c'est un compact convexe, dont la frontière coupe (AB) en A et B pour les mêmes raisons que ci-dessus. Soit C_4 la partie de cette frontière située dans le demi-plan de frontière (AB), au dessous de (AB). Ainsi chaque point de C_4 est à la distance 1 d'au moins un point de C_3, et à une distance inférieure ou égale à 1 des autres points de C_3. Et, de par la définition de S_2, tout point du demi-plan inférieur situé hors de S_2 est à distance strictement supérieure à 1 d'au moins un point de C_3.

Soit E' l'ensemble borné de frontière $C_3 \cup C_4$. C_3 est au-dessus de C_1 et C_4 est au-dessous de C_2 (au sens large) ; donc E' contient E.

Aucun point de C_3 n'est à une distance strictement supérieure à 1 d'un point de C_4.

Il reste à vérifier que deux points de la partie supérieure (délimitée par C_3 et le segment [AB]) ne peuvent pas être à une distance strictement supérieure à 1. C'est vrai car si U, V étaient deux points de cette partie supérieure tels que $UV = e > 1$, V étant celui le plus éloigné de (AB) (au sens large), le cercle de centre V, de rayon e couperait le segment [AB] en I, et la courbe C_4 en J, et on aurait $VJ > 1$, ce qui est impossible.

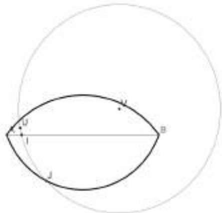


Fig 7

De même deux points de la partie inférieure ne peuvent pas avoir une distance strictement supérieure à 1. On en conclut que le diamètre de E′ est 1. E′ est donc un compact contenant E, et de diamètre 1.
Si on ajoute à E′ un point extérieur P, celui-ci est soit au-dessus de C3, soit au-dessous de C_4, soit à gauche de la verticale passant par A, soit à droite de la verticale passant par B. Si P est à gauche de A, alors PB > 1 ; si P est à droite de B, alors PA > 1 ; si P est au-dessus de C_3, on a vu qu'alors il existe Q sur C_4 tel que PQ > 1 ; de même si P est au-dessous de C_4, il existe Q sur C_3 tel que PQ > 1. Dans tous les cas, l'ajout de P à E′ augmente son diamètre : E′ est un ensemble « gonflé », ou ensemble de largeur constante, selon la définition 4.

Remarque 3 : *d'après l'équivalence des définitions, ceci implique que le compact* E′ *est convexe, ce qui n'était pas prouvé jusqu'à présent.*

Remarque 4 : *dans tout ce qui précède, la courbe* C_1*, bord supérieur de l'ensemble de départ, n'intervient jamais ; ceci peut sembler paradoxal ; mais cette courbe n'a effectivement aucune importance et peut être changée, tant qu'elle garde à* E *son caractère convexe de diamètre 1. Si on « retourne » E, la construction donnera un autre ensemble gonflé contenant E, et, cette fois,* C_2 *n'interviendra pas. Ces deux « gonflés de* E *» ne seront identiques que si* E *possède un centre de symétrie. De plus, toute autre paire* {A′,B′} *de points de* E *tels que* AB = 1 *donnera deux autres « gonflés de* E *».*

Propriété 4 : Tout ensemble borné de points du plan, de diamètre d, est inclus dans un ensemble de largeur constante de diamètre d.
En effet il est inclus dans son enveloppe convexe, qui a pour diamètre d d'après la proposition 1, et qui est elle-même incluse dans sa fermeture, compact convexe de diamètre d (proposition 2) ; et cette dernière est à son tour contenue dans un ensemble de largeur constante de diamètre d d'après la proposition 3.
Nous pouvons ainsi conclure que tout ensemble plan borné est « gonflable ».

3. Construction effective.

3.1. Constructions dans des cas particuliers.

La définition de C_3 et C_4 comme bord de l'intersection d'une infinité de disques ne se prête guère à une construction avec un logiciel de géométrie dynamique.

Cependant dans des cas particuliers simples elle est facile à réaliser :

a) Les ensembles de largeur constante construits à partir de triangles, ainsi que les « œufs », ont été étudiés par Julien Moreau dans [4]

b) On trouvera dans [3] les polygones curvilignes de Reuleaux, qui sont des « gonflés » des polygones réguliers à nombre de sommets impair. Les polygones réguliers à nombre de sommets pair admettent pour « gonflé » le disque circonscrit, mais pas seulement celui-ci : dans [2] on verra un exemple de « gonflé » d'un carré.

c) Si la courbe C_2 est lisse (c'est-à-dire possède une tangente en tout point), on construira la tangente, puis la normale, en un point M mobile sur C_2 ; on placera sur cette normale un point M′ à la distance d de M, du côté du convexe E. Si le rayon de courbure de C_2 est toujours inférieur à d, le lieu de M′ est C_3, et C_4 est confondue avec C_2 . Exemple avec une ellipse :

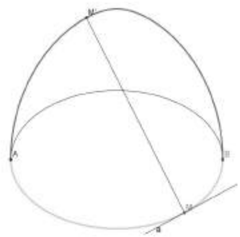


Fig 8

Remarque 5 : *un autre ensemble de largeur constante contenant l'ellipse et de même diamètre est évidemment le disque de diamètre* [AB]. *Ceci souligne la multiplicité de ces ensembles, et montre que la construction découlant de la démonstration de la propriété 2 ne les fournit pas tous. On verra plus bas un troisième « gonflé » d'un carré, après le disque et celui donné dans [2]. Réciproquement, un même ensemble de largeur constante est un « gonflé » de plusieurs ensembles : tous ceux qu'il contient et qui ont le même diamètre que lui. Par exemple, un triangle de Reuleaux de sommets* A, B *est aussi bien « gonflé » du triangle équilatéral* ABC *que du segment* [AB], *ou d'un triangle* ABF *avec* $\widehat{AFB} > 60°$, *ou encore d'un « fuseau » d'extrémités* A *et* B*...*

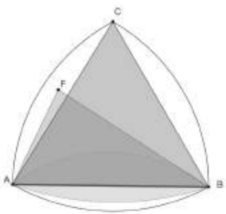


Fig 9

d) Si le rayon de courbure est strictement supérieur à d, on constate que le lieu de M a des points de rebroussement et des auto-intersections(2). Par exemple pour une ellipse à excentricité trop grande :

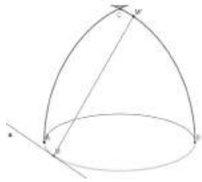


Fig 10

Dans ce cas la courbe C_3 ne comprend que la partie du lieu en dessous du point double (C sur la figure 7).

d) Si C_2 présente un point anguleux P, il faut compléter le lieu de M par les arcs de cercle de centre P qui relient les morceaux de ce lieu les uns aux autres (arc (CE) sur la figure 11):

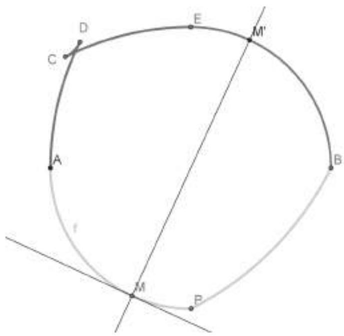


Fig 11

3.2. Construction algorithmique.

Dans une précédente tentative de démonstration de la proposition 1, je considérais C_1 et C_2 comme représentations graphiques de deux fonctions f_1 et f_2 ; alors C_3 et C_4 représentent deux fonctions g_1 et g_2 définies respectivement par :

$$g_1(x) = \min_{x' \in [0,1]} \left(f_2(x') + \sqrt{1 - (x' - x)^2} \right) ; g_2(x) = \max_{x' \in [0,1]} \left(f_1(x') + \sqrt{1 - (x' - x)^2} \right).$$

Ces expressions permettent d'écrire un algorithme de construction point par point de C_3 et C_4 (plus exactement, de leurs approximations par des lignes brisées) :

(2) Ceci s'explique par le fait que, en deux points diamétralement opposés M et M′ la normale à C est la même. Or le centre de courbure d'une courbe plane en un point est le point caractéristique de la normale en ce point, c'est-à-dire le point de contact de la normale avec son enveloppe. Les centres de courbure en M et M′ sont confondus en un point J. Compte tenu des sens de concavité, pour que le lieu soit sans rebroussement, il faut que J soit entre M et M′. Si d est le diamètre, on a MJ + JM′ = d, donc les deux rayons de courbure sont au plus égaux à d.

Entrer une fonction f_1 *définie sur* $[0,1]$, *concave, telle que* $f_1(0) = f_1(1) = 0$.
Entrer une fonction f_2 *définie sur* $[0,1]$, *convexe, telle que* $f_2(0) = f_2(1) = 0$.
Représenter graphiquement f_1 *et* f_2. *(Couleur : vert)*
Entrer le nombre de points n choisi.

Pour k variant de 0 *à n*
$m \leftarrow 1$
Pour j variant de 0 *à n*

$$g_j = f_2\left(\frac{j}{n}\right) + \sqrt{1-(ki-kj)^2}$$

Si $g_j < m$ *alors* $m \leftarrow g_j$
Fin Pour

Placer le point M_k *de coordonnées* $\left(\frac{k}{n}, m\right)$ *(couleur : noir)*

Fin Pour

Tracer la ligne brisée $M_0M_1 \ldots M_n$

Pour k variant de 0 *à n*
$m \leftarrow 1$
Pour j variant de 0 *à n*

$$h_j = x(M_k) - \sqrt{1-(k_i - k_j)^2}$$

Si $h_j > m$ *alors* $m \leftarrow h_j$
Fin Pour

Placer le point N_k *de coordonnées* $\left(\frac{k}{n}, m\right)$ *(couleur : noir)*

Fin Pour

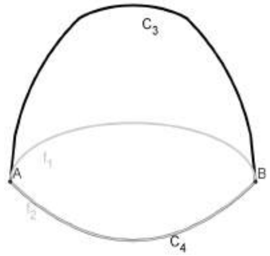
Tracer la ligne brisée $N_0N_1 \ldots N_n$

Je laisse les spécialistes adapter cet algorithme au langage de programmation de leur choix. J'en ai tiré un fichier GeoGebra, sans écriture d'un programme mais avec utilisation du tableur, que l'on pourra télécharger sur le site de l'APMEP(3). Il m'a permis de réaliser les figures 2 et 3 ci-dessus, ainsi que celles de la section 3.3.

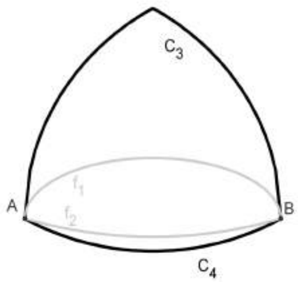
3.3. Quelques exemples : dans les quatre premiers j'ai conservé la même courbe C_1 ; en effet on a vu plus haut qu'elle n'intervient pas dans la construction.

(3) J'ai pris 50 points pour chaque courbe ; le fonctionnement est un peu lent ; il peut être plus pratique de se limiter à 25 points par exemple.

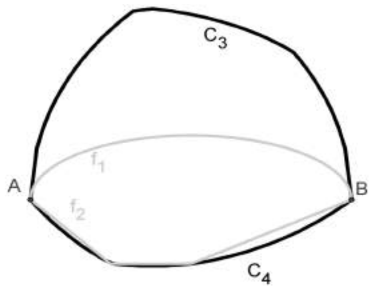
a) Fig 12 : $f_2(x)=(x-0,5)^2-0,25$; C_4 est confondue avec C_2.



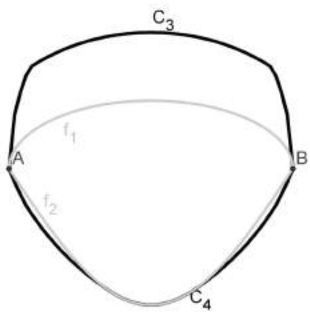
b) Fig 13: $f_2(x)=(x-0,5)^2-0,25$: le « gonflé » est un triangle de Reuleaux !



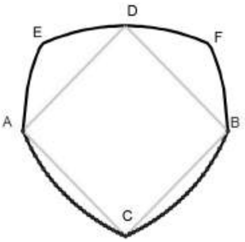
c)Fig14 : un exemple avec C_2 ligne brisée :



d) Fig 15 : Avec une sinusoïde :



e) Fig 16 : encore un « gonflé » du carré :



Cette figure suggère que l'ensemble obtenu a pour frontière la réunion de cinq arcs de cercles ; on peut le vérifier : le cercle de centre C, de rayon 1, coupe ceux de centres A et B en E et F, et les cercles de centres E et F (toujours de rayon 1) se coupent en C. On vérifie expérimentalement, et le lecteur démontrera, que tout disque de rayon 1 centré sur [AC] ou [BC] contient les trois arcs supérieurs, et que tout disque de rayon 1 centré sur l'un de ces trois arcs contient les deux arcs inférieurs. La surface délimitée par ces cinq arcs est donc bien celle définie dans la démonstration de la propriété 2.

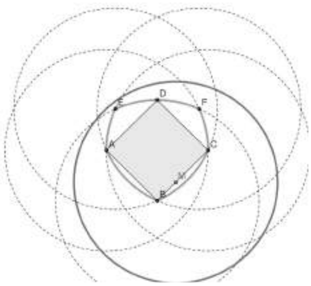


Fig17

4. Extensions et prolongements possibles.

Il est naturel de conjecturer que tout ce qui précède reste valable dans l'espace, voire dans R^n ; j'en ai trouvé une démonstration entièrement différente, qui fera l'objet d'un prochain article.

5. Bibliographie et sitographie.

[1] « Diamètres et aires », par Pierre Legrand (BV 508)
[2] « Les ensembles gonflés », par l'atelier Math.en.jeans du lycée de Briançon (Quadrature nº 90)
[3] « Objets convexes de largeur constante (en 2D) ou d'épaisseur constante (en 3D) : du neuf avec du vieux. » par T. Bayen et J.-B. Hiriart-Urruty, en ligne sur le site de l'académie de Toulouse :
http://www.math.univ-toulouse.fr/~jbhu/Annales%20sci%20math%20quebec.pdf
[4] « L'art d'arrondir les angles » par Julien Moreau (BV 498)
[5] Le site mathcurve : http://www.mathcurve.com