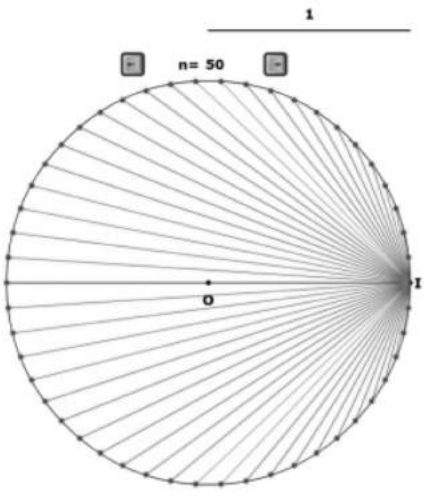
Une bien jolie curiosité

Roland Dassonval et Catherine Combelles

Tracez un polygone régulier à n sommets inscrit dans un cercle de rayon 1, puis les cordes qui joignent un sommet donné aux n-1 autres. On obtient un éventail de n-1 cordes. Saviez-vous que :

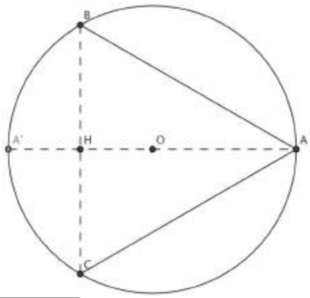
Le produit des longueurs de ces *n*-1 segments est égal à *n*.



Le cas $n = 50$, qu'on trouvera à l'adresse :
http://rdassonval.free.fr/flash/cordes.swf

Examinons d'abord quelques cas particuliers simples qui fournissent des exercices pour les débutants :

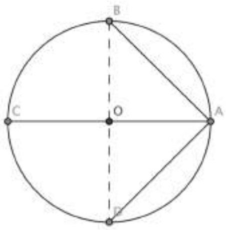
Le triangle équilatéral :



(*)

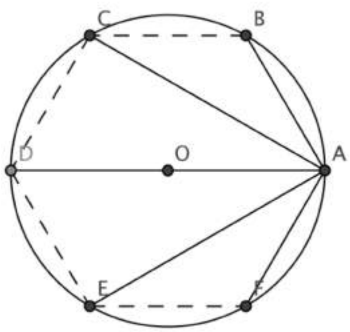
Le calcul peut ici être fait dès la classe de quatrième, avec pour seul outil le théorème de Pythagore : le triangle ABA′ est rectangle, et le triangle 0A′B est équilatéral. Donc $A'B = 1$, $AA' = 2$ et $AB \cdot AC = AB^2 = 4 - 1 = 3$.

Le carré :



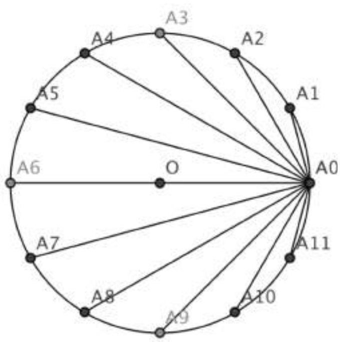
Ici encore, le théorème de Pythagore suffit : $AB = AD = \sqrt{2}$, et $AC = 2$. Le produit $AB \cdot AC \cdot AD$ est bien égal à 4.

L'hexagone :



Le triangle ACE est équilatéral, et nous avons déjà calculé le produit $AC \cdot AE$, égal à 3. Or $AB = AF = 1$, et le diamètre AD est de longueur 2.
On obtient donc très vite : $AB \cdot AC \cdot AD \cdot AE \cdot AF = 6$.

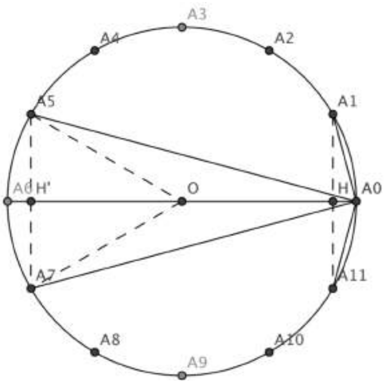
Le dodécagone



Le calcul paraît impressionnant, mais on connaît déjà :

$$A_0A_2 \cdot A_0A_4 \cdot A_0A_6 \cdot A_0A_8 \cdot A_0A_{10} = 6, \text{ et } A_0A_3 \cdot A_0A_9 = 2$$

Ne reste à évaluer que le produit $A_0A_1 \cdot A_0A_5 \cdot A_0A_7 \cdot A_0A_{11}$.
Or ici encore, le théorème de Pythagore suffit à conclure :



Le triangle OA_5A_7 est un triangle équilatéral de côté 1.

Donc $H'A_5 = \frac{1}{2}$, $OH' = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et donc $A_0H' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

Un peu de calcul, et l'on obtient :

$$A_0A_5 \cdot A_0A_7 = A_0A_5^2 = 2 + \sqrt{3}.$$

Pour calculer A_0A_1, on utilisera le triangle rectangle A_5A_6H', puisque : $A_0A_1 = A_5A$.

$H'A_5 = \frac{1}{2}$ et $H'A_6 = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Il vient :

$$A_0A_1 \cdot A_0A_{11} = A_5A_6^2 = 2 - \sqrt{3}.$$

Et le produit des 4 cordes $A_0A_1 \cdot A_0A_5 \cdot A_0A_7 \cdot A_0A_{11}$ vaut donc :

$$\left(2 - \sqrt{3}\right)\left(2 + \sqrt{3}\right) = 4 - 3 = 1.$$

Et notre exercice de géométrie s'est soudain transformé en un exercice de calcul sur les identités remarquables ! Voilà qui sera intéressant en troisième ou en seconde.
Finalement le produit des longueurs des 11 cordes est bien égal à 12.

Le pentagone

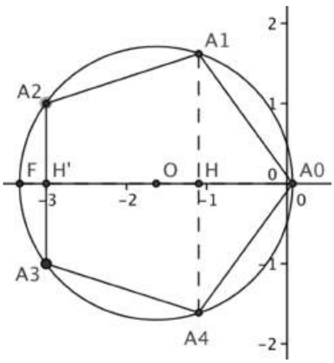
Le calcul direct sur le pentagone est plus savant. Il demande de connaître $\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)$.

Il se calcule classiquement en Terminale en utilisant les nombres complexes….Mais on va voir que l'outil complexe rend inutile à ce niveau le calcul direct.

Faire ce calcul dès la classe de première S ne manque pas d'intérêt : l'angle $t = \dfrac{2\pi}{5}$ vérifie : $\cos 2t = \cos 3t$. Voilà une belle occasion d'utiliser les formules d'addition et de duplication.
En notant $x = \cos t$, on obtient une équation de degré 3, mais de solution évidente 1, et une factorisation conduit à une équation de degré 2 : $4x^2 + 2x - 1 = 0$ qui n'a qu'une solution positive.

Cette activité, mêlant algèbre et trigonométrie est typiquement dans l'esprit du programme de Première S.

On en déduit : $\cos\left(\dfrac{2\pi}{5}\right) = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$, valeur que l'on peut aussi fournir aux élèves si le temps est compté.



Ici, on peut , connaissant OH, en déduire $\mathrm{HA_0}$, $\mathrm{HA_1^2}$, puis $\mathrm{A_0A_1^2} = \mathrm{A_0A_1} \cdot \mathrm{A_0A_4}$. Le théorème de Pythagore donne un calcul assez simple.

Mais on peut faire un peu plus élégant :

$\mathrm{A_0A_1} = 2\sin\left(\dfrac{\pi}{5}\right)$,

et donc :

$$\mathrm{A_0A_1^2} = \mathrm{A_0A_1} \cdot \mathrm{A_0A_4} = \left(2\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)\right)^2 = 4\sin^2\left(\frac{\pi}{5}\right) = 2\left(1-\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{5-\sqrt{5}}{2}.$$

Le calcul le plus simple de $\mathrm{A_0A_2} \cdot \mathrm{A_0A_3}$ semble être aussi :

$$\mathrm{A_0A_2^2} = \mathrm{A_0A_2} \cdot \mathrm{A_0A_3} = \left(2\sin\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right)^2 = 4\sin^2\left(\frac{2\pi}{5}\right) = 4\left(1-\cos^2\left(\frac{2\pi}{5}\right)\right) = \frac{5+\sqrt{5}}{2}.$$

Finalement, le produit des longueurs des 4 cordes vaut : $\dfrac{5+\sqrt{5}}{2} \times \dfrac{5-\sqrt{5}}{2} = 5$.

Le cas général :

L'outil privilégié est ici l'utilisation des nombres complexes.

Plaçons-nous dans le plan complexe et notons A le point d'affixe 1. Traçons le polygone régulier à n sommets inscrit dans le cercle de centre O et de rayon 1 et admettant A pour sommet.

Ses sommets admettent pour affixe $\mathrm{e}^{k\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, et le produit cherché s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathrm{P} &= \left|1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right| \cdot \left|1-\mathrm{e}^{2\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right| \cdot \ldots \cdot \left|1-\mathrm{e}^{(n-1)\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right| \\ &= \left|\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\mathrm{e}^{(n-1)\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\right|\end{aligned}$$

Or les nombres $\mathrm{e}^{k\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$ pour $k = 0$ à $n - 1$ sont les n racines du polynôme $z^n - 1$, qui s'écrit d'une part

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1\right),$$

et d'autre part :

$$z^n - 1 = (z-1)\left(z-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\left(z-\mathrm{e}^{2\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(z-\mathrm{e}^{(n-1)\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right).$$

Il en résulte :

$$\left(z-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\left(z-\mathrm{e}^{2\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(z-\mathrm{e}^{(n-1)\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right) = z^{n-1} + z^{n-2} + \ldots + z + 1.$$

La valeur en 1 de ce polynôme est donc n, et son module également. Ainsi :

$$\left|\left(1-\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\left(1-\mathrm{e}^{2\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right) \cdot \ldots \cdot \left(1-\mathrm{e}^{(n-1)\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}\right)\right| = n$$

L'efficacité des nombres complexes est admirable ! Mais cette merveille est-elle compatible avec le programme actuel de la Terminale S ?

On trouvera à l'adresse http://rdassonval.free.fr/flash/cordes.swf une animation réalisée par Roland Dassonval avec le logiciel FLASH pour présenter cette situation. Les trois premières pages apportent des rappels de trigonométrie, ainsi que le calcul de la longueur d'une corde. Les pages suivantes montrent les cas n : 3, 4, 6, 8, 12, puis 5, enfin la dernière page permet de faire varier n entre 2 et 50, mais, comme dans un jeu vidéo, vous n'y accéderez que si vous réussissez chacune des étapes précédentes !

C'est l'étape ultime ($n = 50$) qui illustre l'introduction de cet article.