Les problèmes de l'APMEP

Les propositions de problèmes, solutions ou commentaires, sont à envoyer à

Max HOCHART
13, rue des Garennes
63 800 Cournon d'Auvergne
ou
hochartmax@yahoo.fr

Énoncés des nouveaux problèmes

Problème 509–1

Soit $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ deux fonctions intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que la fonction

$$(x,y) \mapsto \frac{f(x)g(y)}{x+y}$$

est intégrable sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$+ et trouver la meilleure constante $C > 0$ telle que

$$\left| \iint_{]0,+\infty[\times]0,+\infty[} \frac{f(x)g(y)}{x+y} \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \right| \leq C \sqrt{\int_{]0,+\infty[} f(x)^2 \,\mathrm{d}x} \sqrt{\int_{]0,+\infty[} g(y)^2 \,\mathrm{d}y}.$$

Problème 509–2 (Michel Lafond)

On appelle couple moyen tout couple d'entiers naturels (a, b) avec $0 < a < b$ tels que leur moyenne arithmétique $m = \dfrac{a+b}{2}$, leur moyenne géometrique $g = \sqrt{ab}$ et leur moyenne harmonique $h = \dfrac{2ab}{a+b}$ soient des entiers naturels. Par exemple, $(a, b) = (10, 40)$ est un couple moyen puisque

$$m = 25,\ g = 20,\ h = 16.$$

(1) Trouver tous les couples moyens.

(2) Montrer que si (a, b) est un couple moyen dont les moyennes valent m, g, h, alors $(m - g, m + g)$ est un couple moyen.

(3) Si (a, b) est un couple moyen, la moyenne quadratique $q = \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$ peut-elle - être entière ?

Problème 509–3 (Michel Lafond)

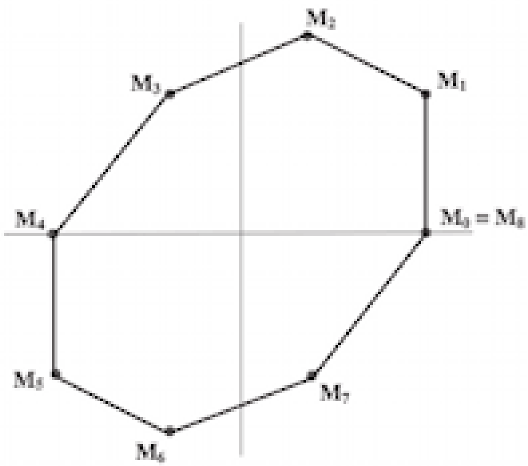
Si n est un entier supérieur ou égal à 3, on pose $A = 2\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit la suite de points $\left(M_k\left(x_k, y_k\right)\right)_{k\in\mathbb{N}}$ par

$$M_0(1, 0)$$

et pour $k \geq 1$ (attention aux indices),

$$x_k = x_{k-1} - A\,y_{k-1} \quad y_k = y_{k-1} + A\,x_k.$$

Par exemple, pour $n = 8$, voici les 9 premiers points de la suite :



(1) Montrer que cette suite de points est périodique de période n.
(2) Montrer que tous les points de la suite sont situés sur une même ellipse.
(3) Montrer que l'aire du polygone $(M_0M_1\ldots M_{n-1})$ est comprise entre $\pi - \frac{\pi^3}{6n^2}$ et π.

Solutions des problèmes antérieurs

Problème 501–2 (Michel Lafond, Dijon)

Soit $c \in \mathbb{N}$ et K la suite définie par $K_0 = 0$, $K_1 = 1$ et pour $n \geq 2$,

$$K_n = (c-2)\,K_{n-1} - K_{n-2} + 2: \qquad (1)$$

Montrer que si c est un carré parfait, alors tous les K_n sont des carrés parfaits.

Solutions de Michel Bataille (Rouen), Maurice Bauval (Versailles), Jean-Claude Blanchard (Brunoy), Hélène Brion (Clamart), Richard Choulet (Caen), Bernard Collignon (Coursan), Clement Durringer, Michel Lafond (Dijon), Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

Les méthodes proposées suivent grosso modo l'approche suivante.

Pour $c = 0$, la suite (K_n) est la suite 2-périodique donnée par

$$\mathrm{K}_{2n} = 0, \quad \mathrm{K}_{2n+1} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pour $c = 1$, la suite (K_n) est 3-périodique, avec

$$\mathrm{K}_{3n} = 0, \quad \mathrm{K}_{3n+1} = \mathrm{K}_{3n+2} = 1 \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Pour $c = 4$, on montre par récurrence double que $\mathrm{K}_n = n^2$. C'est clair pour $n = 0$ et $n = 1$ et si $\mathrm{K}_{n-1} = (n-1)^2$ et $\mathrm{K}_{n-2} = (n-2)^2$, alors

$$\mathrm{K}_n = 2(n-1)^2 - (n-2)^2 + 2 = n^2:$$

On suppose désormais que c est un carré supérieur ou égal à 9. Pour simplifier la relation (1), on cherche une solution évidente, par exemple constante (disons égale à λ). Une telle suite vérifie la relation (1) si et seulement si

$$\lambda = \frac{2}{4-c}.$$

On pose donc, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \mathrm{K}_n - \lambda = \mathrm{K}_n + \frac{2}{c-4}.$$

Cette suite est récurrente linéaire double et vérifie la relation

$$u_n = (c-2)u_{n-1} - u_{n-2} \quad (n \geq 2).$$

Les racines de l'équation caractéristique sont

$$\frac{c-2 \pm \sqrt{c}\sqrt{c-4}}{2}.$$

Ces racines sont distinctes, positives et sont les carrés de

$$\frac{\sqrt{c} \pm \sqrt{c-4}}{2}.$$

Il existe donc deux réels α, β tels que

$$\mathrm{K}_n = \alpha\left(\frac{c-2+\sqrt{c}\sqrt{c-4}}{2}\right)^n + \beta\left(\frac{c-2-\sqrt{c}\sqrt{c-4}}{2}\right)^n - \frac{2}{c-4} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Les conditions initiales $\mathrm{K}_0 = 0$ et $\mathrm{K}_1 = 1$ donnent les valeurs

$$\alpha = \beta = \frac{1}{c-4}.$$

Ainsi, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{c-4}\left(\left(\frac{c-2+\sqrt{c}\sqrt{c-4}}{2}\right)^n + \left(\frac{c-2-\sqrt{c}\sqrt{c-4}}{2}\right)^n\right) - \frac{2}{c-4},$$

soit encore

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{c-4}\left(\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-4}}{2}\right)^{2n} + \left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-4}}{2}\right)^{2n} - 2\right).$$

Or,

$$\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-4}}{2} \times \frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-4}}{2} = 1.$$

Donc, pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{K}_n = \frac{1}{c-4}\left(\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-4}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-4}}{2}\right)^{n}\right)^2.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, posons

$$\mathrm{R}_n = \frac{1}{\sqrt{c-4}}\left(\left(\frac{\sqrt{c}+\sqrt{c-4}}{2}\right)^{n} - \left(\frac{\sqrt{c}-\sqrt{c-4}}{2}\right)^{n}\right).$$

Les nombres $\dfrac{\sqrt{c}\pm\sqrt{c-4}}{2}$ ont pour somme $\sqrt{c}$ et pour produit 1. La suite (R_n) vérifie donc la relation de récurrence linéaire

$$\mathrm{R}_n = \sqrt{c}\,\mathrm{R}_{n-1} - \mathrm{R}_{n-2} \quad (n \geq 2) \tag{2}$$

et les conditions initiales

$$\mathrm{R}_0 = 0, \quad \mathrm{R}_1 = 1.$$

Puisque c est un carré, une récurrence montre que cette suite est à valeurs entières, ce qui prouve bien que $\left(\mathrm{K}_n = \mathrm{R}_n^2\right)$ est une suite de carrés parfaits.

Richard Choulet apporte de nombreux approfondissements sur ce problème. Il remarque par exemple que dans le cas $c = 9$, la suite (K_n) est formée des carrés des termes d'indices pairs de la suite de Fibonacci. On peut montrer cela ainsi. On note $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$, $\psi = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ et (F_n) la suite de Fibonacci définie par $\mathrm{F}_0 = 0$, $\mathrm{F}_1 = 1$ et pour $n \geq 2$ par

$$\mathrm{F}_n = \mathrm{F}_{n-1} + \mathrm{F}_{n-2}.$$

Classiquement,

$$\mathrm{F}_n = \frac{1}{\varphi-\psi}\left(\varphi^n - \psi^n\right),$$

donc

$$F_{2n} = \frac{1}{\varphi - \psi}\left(\left(\varphi^2\right)^n - \left(\psi^2\right)^n\right),$$

Or

$$\varphi^2\psi^2 = 1$$

et

$$\varphi^2 + \psi^2 = \varphi + 1 + \psi + 1 = 3.$$

Ainsi, la suite (F_{2n}) vérifie la relation

$$F_{2n} = 3F_{2(n-1)} - F_{2(n-2)} \quad (n \geq 2)$$

et les conditions initiales

$$F_0 = 0, \quad F_2 = 1.$$

On retrouve la même relation (2) que la suite (R_n) pour $c = 9$ et les mêmes conditions initiales, d'où l'égalité des deux suites.

Problème 502–1 (Gauthier Gidel, Alexandre Benchaouine, Benoît Joly)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs et $p_1, \ldots, p_n$ des réels strictement positifs de somme 1. Pour tous les réels S et t vérifiant, pour tout $i \in [[1, n]]$,

$$S \leq \sqrt{x_i} \leq S + t,$$

montrer que

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \leq \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}} + t^2.$$

Solutions de Michel Lafond (Dijon) et Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques).

L'inégalité de gauche est classique. Elle resulte de la convexité de la fonction $f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{1}{x}$. L'inégalité de Jensen garantit alors, avec les notations de l'énoncé, l'inégalité

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} p_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} p_i f(x_i),$$

soit encore

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} p_i x_i} \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}.$$

En prenant l'inverse, on obtient bien

$$\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}} \leq \sum_{i=1}^{n} p_i x_i .$$

L'inégalité de droite est franchement plus délicate. Voici une premiere solution, due à **Pierre Renfer**.

Pour $n = 1$, l'inégalité est évidente. Le cas $n = 2$ est egalement évident si $x_1 = x_2$. Pour $x_1 \neq x_2$ fixés, on considère la fonction

$$F : (p_1, p_2) \mapsto p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{1}{\frac{p_1}{x_1} + \frac{p_2}{x_2}} = p_1 x_1 + p_2 x_2 - \frac{x_1 x_2}{p_1 x_2 + p_2 x_1} .$$

Cette fonction F atteint son maximum M sur l'ensemble compact

$$\mathrm{C} = \left\{ (p_1, p_2) \in [0,1]^2 \mid p_1 + p_2 = 1 \right\}.$$

Comme F s'annule sur le bord du compact C, le maximum est atteint en un point intérieur. **Pierre Renfer** utilise alors les multiplicateurs de Lagrange. On pose

$$\mathrm{G}(p_1, p_2, \lambda) = \mathrm{F}(p_1, p_2) + \lambda (p_1 + p_2 - 1)$$

et l'on cherche à annuler son gradient

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1} = x_1 + \frac{x_1 x_2^2}{(p_1 x_2 + p_2 x_1)^2} + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_2} = x_2 + \frac{x_1^2 x_2}{(p_1 x_2 + p_2 x_1)^2} + \lambda$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \lambda} = p_1 + p_2 - 1$$

Puisque $x_1 \neq x_2$, la différence des deux premières équations donne

$$p_1 x_2 + p_2 x_1 = \sqrt{x_1 x_2} .$$

Avec la dernière équation, on en deduit que

$$p_1 = \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \quad \text{et} \quad p_2 = \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} .$$

Puisqu'il y a un seul tel point, F y présente bien un maximum, à savoir

$$\mathrm{M} = \mathrm{F}\left(\frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}}, \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \right).$$

Après calcul, on trouve

$$\mathrm{M} = \left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2} \right)^2 .$$

Or, par hypothèse,

$$\mathrm{S} \leq \sqrt{x_1} \leq \mathrm{S}+t \quad \text{et} \quad \mathrm{S} \leq \sqrt{x_2} \leq \mathrm{S}+t.$$

donc

$$\left|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}\right| \leq t.$$

Ainsi,

$$\mathrm{M} \leq t^2,$$

ce qui établit la relation au rang $n = 2$.

On suppose la relation établie au rang n. Si au rang $n + 1$, deux nombres parmi $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont égaux, par exemple x_n et x_{n+1}, alors la moyenne des nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ affectés des coefficients $p_1, \ldots, p_{n+1}$ est la moyenne des nombres $x_1, \ldots, x_n$ affectés des coefficients $p_1, \ldots, p_{n-1}, (p_n + p_{n+1})$. L'inégalité est alors vraie par hypothèse de récurrence.

Si les nombres $x_1, \ldots, x_{n+1}$ sont tous distincts, on considère la fonction

$$\mathrm{F}:(p_1,\ldots,p_{n+1}) \mapsto \sum_{i=1}^{n+1} p_i x_i - \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} \frac{p_i}{x_i}}.$$

Elle atteint un maximum sur l'espace compact

$$\mathrm{C}=\left\{(p_1,\ldots,p_{n+1}) \in [0,1]^{n+1} \mid p_1+\ldots+p_{n+1}=1\right\}.$$

Si le maximum est atteint en un point intérieur du compact, on peut obtenir ce point par la méthode de Lagrange. On pose

$$\mathrm{G}(p_1,\ldots,p_{n+1},\lambda)=\mathrm{F}(p_1,\ldots,p_{n+1})+\lambda(p_1+\ldots+p_{n+1}-1).$$

On veut annuler le gradient :

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_i}=x_i+\frac{1}{x_i}\frac{1}{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2}+\lambda \quad (1 \leq i \leq n+1)$$

$$\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial \lambda}=p_1+\ldots+p_{n+1}-1.$$

La différence $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1}-\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_2}$ donne

$$x_1 x_2\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2=1$$

tandis que la différence $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_1}-\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial p_3}$ donne

$$x_1 x_3\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{p_k}{x_k}\right)^2=1.$$

Ainsi, $x_2 = x_3$, ce qui est exclu. La fonction F atteint donc son maximum en un point du bord du compact C, mais en un tel point, l'un des coefficients est nul, disons p_{n+1}. L'hypothèse de récurrence permet alors de conclure.

Voici maintenant la solution proposée par **Michel Lafond** pour la seconde inégalité. On pose

$$\mathrm{A} = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} \frac{p_i}{x_i}}$$

L'entier n est le nombre de modalités de la variable aléatoire $\mathrm{X} = \{(x_i, p_i)\}$. On peut toujours supposer

$$0 < x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Puisque $\left|\sqrt{x_n} - \sqrt{x_1}\right| \leq t$, il suffit de montrer

$$\mathrm{A} \leq \mathrm{H} + \left(\sqrt{x_n} - \sqrt{x_1}\right)^2.$$

On peut tout diviser par $x_1 > 0$ et se contenter du cas

$$0 < x_1 = 1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n.$$

Il s'agit de montrer que

$$\mathrm{A} \leq \mathrm{H} + \left(\sqrt{x_n} - 1\right)^2$$

Le cas $n = 1$ est évident puisque A = H. Examinons le cas $n = 2$ en posant $x_2 = y$. Si 1 et y sont pondérés par a et $1 - a$ (avec $0 \leq a \leq 1$), on a

$$\mathrm{A} = a + (1-a)y \quad \text{et} \quad \mathrm{H} = \frac{y}{ay + 1 - a}.$$

Un calcul donne

$$\mathrm{A} - \mathrm{H} = \frac{a(1-a)(y-1)^2}{ay + 1 - a}.$$

Donc

$$\mathrm{A} - \mathrm{H} - \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \left[\frac{a(1-a)\left(\sqrt{y} + 1\right)^2}{ay + 1 - a} - 1\right].$$

Donc $\mathrm{A} - \mathrm{H} - \left(\sqrt{y} - 1\right)^2$ est du signe de $a(1-a)\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - ay + a - 1$ Mais

$$a(1-a)\left(\sqrt{y} + 1\right)^2 - ay + a - 1 = -\left(a\sqrt{y} + a - 1\right)^2 \leq 0,$$

ce qui clôt l'étude du cas $n = 2$.

Passons au cas $n = 3$, en posant $x_3 = y$. Il s'agit de montrer que si 1, x, y (avec $1 \leq x \leq y$) sont pondérés par a, p, b (de somme 1), alors

$$\mathrm{H} - A + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 \leq 0.$$

On fixe a, b, p, y et l'on fait varier x dans l'intervalle $[1, y]$. Ainsi,

$$\mathrm{H} - A + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2 = f(x) = \frac{x}{\theta x + p} - \sigma - px + \left(\sqrt{y} - 1\right)^2,$$

avec

$$\theta = a + \frac{b}{y} \quad \text{et} \quad \sigma = a + by.$$

Or

$$f'(x) = \frac{p}{(\theta x + p)^2} - p,$$

donc f' est une fonction décroissante sur $[1, y]$. Ainsi, f est concave. Pour montrer que f est positive sur $[1, y]$, il suffit de montrer qu'elle l'est en $x = 1$ et en $x = y$. Mais dans les deux cas, la variable $\mathrm{X} = \left\{(1,a);(x,p);(y,b)\right\}$ n'a que deux modalités et dans le cas $n = 2$, la propriété a été établie.

Enfin, le cas où X a n modalités se ramène au cas de $n - 1$ modalités, en fixant toutes les modalités sauf une que l'on fait varier, ce qui termine la démonstration.