# Exercices de ci, de là

*Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.*

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

*Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.*

## Exercices

### Exercice 509–1 Amahl Servois – Besançon

Les points B et C sont du même côté d'un obstacle. On veut déterminer de l'autre côté de l'obstacle un point qui sera sur la droite (BC).


### Exercice 509–2 *pour nos élèves*

A. $a$ est un réel positif tel que $a^2 + \frac{1}{a^2} = 5$. Déterminer la valeur de $a^3 + \frac{1}{a^3}$.

B. On écrit au tableau les entiers naturels de 1 à $n$. Un des nombres est effacé. La moyenne des $n - 1$ entiers restants est égale à $46 + 20/23$ . Déterminer la valeur de $n$ ainsi que le nombre effacé.

C. On considère deux nombres réels $x$ et $y$ tels que $0 < y < x \leq 1$. Montrer que

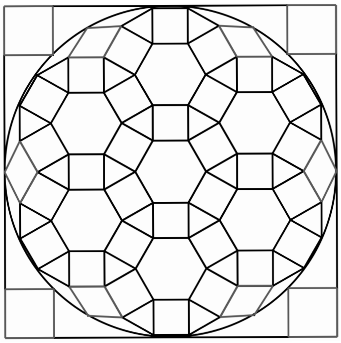
$$\frac{\ln(x) - \ln(y)}{x - y} > \ln\left(\frac{1}{y}\right).$$

**Exercice 509 - 3 A. Benoit – Paris**

Trouver le lieu géométrique du point de contact entre un plan donné et une sphère variable, tangente à ce plan et passant par deux points B et C donnés, extérieurs au plan et situés d'un même côté de celui-ci.

**Exercice 509 - 4 Rose Hasse – Nîmes** *transmis par Bernard Parzysz*

Dans la figure ci-dessous, on considère les cercles circonscrits aux dodécagones. Calculer le rapport du rayon du cercle extérieur à celui des sept cercles intérieurs.



## Solutions

**Exercice 507–1 Raphael Sinteff – Nancy**

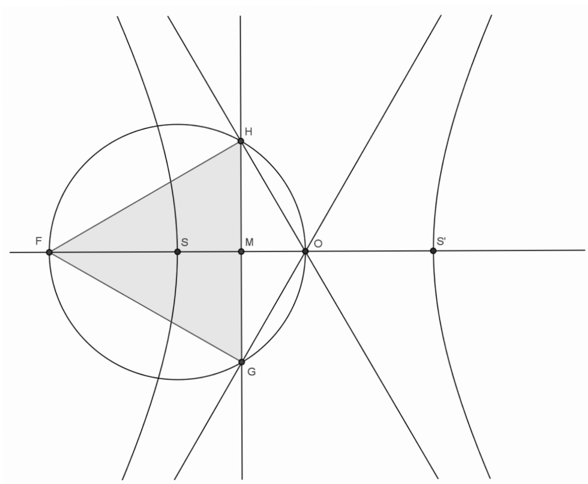
Soient FGH un triangle équilatéral et $\mathcal{H}$ l'hyperbole de foyer F, de directrice (GH), d'excentricité 2.
Construire à la règle et au compas les sommets S, S′ et le centre O de l'hyperbole $\mathcal{H}$.
Montrer que les droites (OG) et (OH) sont les asymptotes de l'hyperbole $\mathcal{H}$.

***Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Albert Marcout (Sainte-Savine), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac), Maurice Bauval (Versailles),Georges Lion (Wallis), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach).***

• Voici la solution de Maurice Bauval.
Soit M le milieu de GH, S le centre de gravité de FGH, et S′ le symétrique de F par rapport au côté FG. Les rapports de longueurs SF/SM et S′F/S′M sont égaux à l'excentricité 2.
Les points S et S′ sont les sommets de l'hyperbole.
À la règle et au compas on sait construire la médiatrice d'un segment. Le centre de gravité S du triangle FGH est donc constructible. Puis deux arcs de cercle de centres H et G et de rayons HG se coupent en S′. Le cercle de centre S circonscrit au triangle FGH coupe la droite FS′ en O.
L'angle $\alpha$ de l'asymptote avec l'axe focal et l'excentricité d'une hyperbole sont liés

par $\tan^2 \alpha = e^2 - 1$.

$\tan \alpha = \sqrt{3}$, $\alpha = \pi/3$. C'est précisément l'angle que font les droites (OG) et (OH) avec l'axe focal SS′ car SHO est aussi un triangle équilatéral.
(OG) et (OH) sont donc les asymptotes.




Remarque. De l'utilisation de la règle et du compas à la correction dématérialisée des copies (citée dans le BV 507), en passant par l'abandon total de l'étude des sections coniques… quelques commentaires étaient joints aux solutions.
Sic transit gloria mundi ? OU Aliam vitam, alio mores …?

### Exercice 507–2 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

Démontrer que la distance du centre de gravité au centre du cercle circonscrit d'un triangle est égale au tiers du rayon de ce cercle si et seulement si le triangle est rectangle.

***Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Albert Marcout (Sainte-Savine), Michel Sarrouy (Mende), Raymond Heitz (Piriac), Michel Dofal (Olivet), Jean-Claude Renaud (Poitiers), Michel Lafond (Dijon), Maurice Bauval (Versailles), Georges Lion (Wallis), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach).***

• Voici la solution de Jean-Claude Renaud.

On se place dans le plan complexe.
On prend comme origine le point O centre du cercle circonscrit au triangle ABC et on suppose que le rayon de ce cercle vaut 1.

On appelle $a$, $b$, $c$ les affixes respectives des points A, B, C.
Le centre de gravité G du triangle a pour affixe

$$g = \frac{a+b+c}{3}.$$

Si la distance de G à O est égale au tiers du rayon du cercle circonscrit on a :

$$|g| = \frac{1}{3} \text{ donc } |a+b+c| = 1, \text{ soit aussi } (a+b+c)\left(\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}\right) = 1.$$

On sait que $|a| = |b| = |c| = 1$. En multipliant membre à membre par abc on obtient :

$$(a+b+c)(bc+ac+ab) = abc.$$

$$a^2(b+c) + a\left(b^2+c^2+2bc\right) + bc(b+c) = 0.$$

$$(b+c)\left(a^2+a(b+c)+bc\right) = 0.$$

$$(b+c)(c+a)(a+b) = 0.$$

Cette égalité signifie que le point O est milieu d'un des côtés du triangle ABC, et donc que ce triangle est rectangle.
Réciproquement, si ABC est rectangle par exemple en A alors $b + c = 0$ donc $|g| = \left|\frac{a}{3}\right| = \frac{1}{3}$.
La distance de G à O est bien égale au tiers du rayon du cercle circonscrit.

• Et voici la solution de Raymond Heitz.
On pioche dans les livres jaunis …
Dans un triangle quelconque, on a la relation suivante (avec les notations courantes) :

$$9\mathrm{OG}^2 = \mathrm{R}^2(1 - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma).$$

La relation demandée équivaut à $9\mathrm{OG}^2 = \mathrm{R}^2$ et on voit qu'elle a lieu si et seulement si un des cosinus est nul, c'est-à-dire si le triangle est rectangle.

*Remarque*.
Géométrie des complexes, géométrie et homothétie, « pure » géométrie euclidienne, géométrie et trigonométrie ou même résultat jauni … C'est toujours un ravissement de voir les diverses approches des solutions proposées.

**Exercice 507–3 Le Petit Vert – *« en passant par la Lorraine avec mon Reuleaux… »***

Publication de la régionale APMEP de Lorraine, le Petit Vert soumet au « Gros Vert » le problème du partage d'un triangle de Reuleaux en huit parts de même aire.

Voici plus précisément la demande formulée par l'équipe du Petit Vert, une fois choisi un axe de symétrie de la figure :
« *… il est très facile de montrer qu'un découpage à partir du centre avec 8 angles de 45° ne donnera pas des parts égales (fig. 1). Nous vous proposons ci-dessous une solution approximative, obtenue par tâtonnements, qui semble donner des parts égales (fig. 2) ; remarquer que* $\mathrm{J}_1$, $\mathrm{O}_1$, $\mathrm{F}_1$ *ne sont pas alignés).*

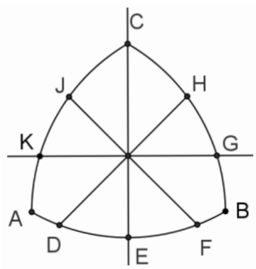



fig. 1

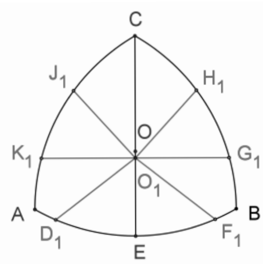



fig. 2

*Le problème est le suivant : peut-on déterminer de façon rigoureuse la position des points* $O_1$, $J_1$ *et* $D_1$ *de façon que les parts soient égales ? »*

La rubrique reste évidemment preneuse de toute autre solution au partage en huit.

***Solutions : Marie-Nicole Gras (le Bourg d'Oisans), Michel Sarrouy (Mende), Maurice Bauval (Versailles).***

• Voici la solution de Marie-Nicole Gras.

1) Notations et formules.

a) On désigne par $a$ la longueur du côté du triangle équilatéral ABC, par O le centre de son cercle circonscrit, et par R son rayon qui est égal à $\dfrac{a\sqrt{3}}{3}$. On dira qu'un triangle VUW est courbé si VW est un arc de cercle.
Tous les calculs sont faits avec les angles exprimés en radians, et les équations obtenues sont résolues avec la fonction solve de gp [Pari/gp, Version 2.5.3. http://sagemath.org/ ], qui donne le résultat avec 38 chiffres significatifs ; on donnera la valeur des angles ainsi obtenus en degrés, avec 4 chiffres décimaux.

b) L'aire du triangle de Reuleaux est égale à

$$S = \frac{1}{2}\left(\pi - \sqrt{3}\right)a^2 \ ;$$

en effet, l'aire du triangle équilatéral ABC est $s = a^2\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ ; ; l'aire du triangle courbé ACB est $t = \dfrac{\pi}{6}a^2$ et donc l'aire du triangle de Reuleaux est

$$S = s + 3(t - s) = \frac{\pi}{2}a^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}a^2.$$

c) Soit UVW un triangle isocèle de sommet U, d'angle au sommet $\varphi$ et de côtés égaux UV = UW = $a$ ; alors $VW = 2a\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}\right)$, et l'aire de la lunule limitée par le côté VW et l'arc VW est égale à $VW = 2a\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ l'angle $\varphi$ étant exprimé en radians.

d) Soit UVW un triangle quelconque. On suppose que l'on connaît les longueurs des côtés UV et UW et l'angle $\varphi = \widehat{VUW}$ ; alors

$$\tan\left(\widehat{UWV}\right) = \frac{VW\sin\left(\widehat{UWV}\right)}{VW\cos\left(\widehat{UWV}\right)} = \frac{UV\sin(\varphi)}{UW - UV\cos(\varphi)}.$$

2) Partage du triangle de Reuleaux selon la méthode de l'énoncé.

a) On cherche d'abord le point $O_1$ situé sur l'axe de symétrie (CE) et le point $K_1$ situé sur l'arc CA tels que $(O_1K_1)$ soit perpendiculaire à (CE) et l'aire du triangle courbé $CO_1K_1$ soit égale $\frac{s}{4}$.

Soit $\theta_1 = \widehat{CBK_1}$ ; alors $\widehat{ECK_1} = \frac{\pi}{2} - \frac{\theta_1}{2} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}$, $C_1K_1 = 2a\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$, $CO_1 = CK_1\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}\right)$, et l'aire du triangle $O_1CK_1$ est égale à $\frac{1}{2}CK_1 \times CO_1\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}\right)$ ; l'aire de la lunule comprise entre le segment $CK_1$ et l'arc $CK_1$ est égale à $\frac{1}{2}\left(\theta_1 - \sin(\theta_1)\right)a^2$, et donc l'angle $\theta_1$, $0 < \theta_1 < \frac{\pi}{6}$, est solution de l'équation

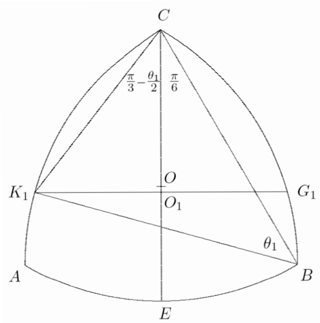
$$2\sin^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\theta_1 - \sin(\theta_1)\right) = \frac{S}{4} - \frac{1}{8}\left(\pi - \sqrt{3}\right). \quad (1)$$

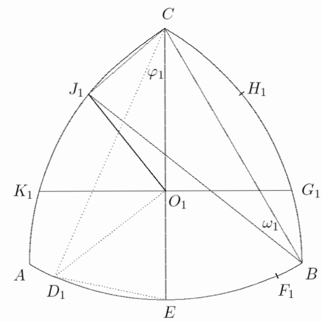
Avec la fonction solve de gp, on obtient

$\theta_1 \sim 44.4363°$ et $CO_1 = 2a\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\theta_1}{2}\right) \sim 0{,}5977a$.

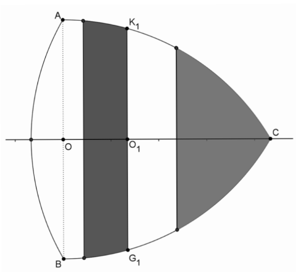
Comme $CO = R \sim 0.5774a$, $O_1$ est bien situé entre O et E et assez proche de O.

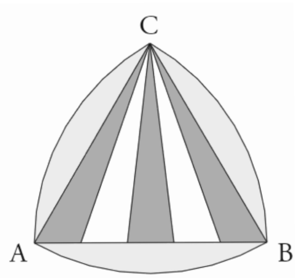
b) On cherche ensuite le point $J_1$ situé sur l'arc $CK_1$ …
Etc.




Marie-Nicole Gras obtient finalement la figure de droite dans laquelle les points $K_1$, $J_1$, C, $H_1$, $G_1$, $F_1$, E et $D_1$ réalisent le partage attendu.
Elle étudie également le partage du triangle de Reuleaux avec des demi-droites issues de O et aussi avec des demi-droites issues d'un sommet. Ce travail considérable est disponible sur le site de l'association.
Maurice Bauval et Michel Sarrouy ont pour leur part proposé les partages ci-dessous. Leur travail est également disponible sur le site.






**Exercice 507–4** *pour nos élèves*

A. Chacun des chiffres 1, 2, 3, 4 et 5 est utilisé une seule fois pour former un nombre de cinq chiffres. Combien vaut la somme de tous les nombres de cinq chiffres que l'on peut ainsi former ?

B. On dispose de pièces de monnaie, sans pouvoir faire exactement 1 € en les prenant toutes ou en en prenant que quelques-unes. Quel est le montant maximal de ces pièces ? *(on ne dispose pas de pièce d'une valeur supérieure à 1 €)*

***Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Lafond (Dijon).***

• Voici les solutions de Michel Lafond.

A) Si l'on écrit en colonne les 5 ! = 120 nombres composés des 5 chiffres 1, 2, 3, 4, 5, chaque colonne contient 4 ! = 24 fois chacun des chiffres 1, 2, 3, 4, 5 soit au total 24×15 = 360.
La somme de ces 120 nombres vaut donc :

$$360\,(1 + 10 + 10^2 + 10^3 + 10^4) = 360 \times 11\,111 = 3\,999\,960.$$

B) Soit E l'ensemble des portemonnaies qui ne permettent pas de réaliser 1 € et qui ne contiennent aucune pièce de valeur supérieure à 1 €. Par exemple (en centimes) [50 ; 20 ; 20 ; 5].
Si P est un des portemonnaies de E, son montant est limité puisque P contient au plus : une pièce de 50 ; 4 pièces de 20 ; 9 pièces de 10 ; 19 pièces de 5 ; 49 pièces de 2 et 99 pièces de 1.
Soit Pmax l'ensemble des portemonnaies de E de montant maximal.
Soit P appartenant à Pmax.
Si P contient [1 ; 1], on peut remplacer [1 ; 1] par [2], et le nouveau portemonnaie est encore dans Pmax. De même [2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2] peut être remplacé par [10] etc.
Il existe donc dans Pmax un portemonnaie P′ qui contient : au plus une pièce de 1 ; au plus 4 pièces de 2 ; au plus une pièce de 5 ; au plus une pièce de 10 ; au plus 4 pièces de 20 et au plus une pièce de 50. Le montant de P′ est inférieur ou égal à 154 centimes.
Mais la combinaison [2 ; 2 ; 1] peut être remplacée par [5] et la combinaison [20 ; 20 ; 10] peut être remplacée par [50] donc il existe dans Pmax un portemonnaie P″ qui contient : au plus une pièce de 1 ; au plus 4 pièces de 2 ; au plus une pièce de 5 ; au plus une pièce de 10 ; au plus 4 pièces de 20 ; au plus une pièce de 50 et ni la combinaison [2 ; 2 ; 1] ni la combinaison [20 ; 20 ; 10].

Ou bien P″ contient [10].
D'après ce qui précède, P″ ne contient pas [20 ; 20].
Donc son montant n'excède pas 154 – 20 = 134 centimes.

Ou bien P″ ne contient pas [10] et alors :

ou bien P″ contient [1].
D'après ce qui précède, P'' ne contient pas [2 ; 2].
Donc son montant n'excède pas 154 – 10 – 2 = 142 centimes.

ou bien P″ ne contient pas [1] et alors son montant n'excède pas 154 – 10 – 1 = 143 centimes.

Le montant maximal réalisable est donc **1,43 €**.
Il est réalisé par le portemonnaie [50 ; 20 ; 20 ; 20 ; 20 ; 5 ; 2 ; 2 ; 2 ; 2].