La symétrisation de Steiner

Pierre Legrand(*)

Introduction(1) : un peu d'histoire

Jakob Steiner(2), un des derniers grands spécialistes de géométrie pure, exposa [1] en 1838 un ingénieux procédé de transformation des figures, qui fut très vite appelé *symétrisation de Steiner*.

On a cependant récemment exhumé un texte [2] publié en 1814 dans les *Annales de mathématiques pures et appliquées*, où ce même procédé était sommairement défini et utilisé. Le texte, signé « un abonné », émanait en fait de Joseph Gergonne, responsable et homme-orchestre du journal(3).

Steiner et avant lui Gergonne ont introduit cette symétrisation dans le but de démontrer l'*inégalité isopérimétrique* : « de toutes les surfaces planes de même contour le cercle est celle qui a le plus d'étendue », selon les propres termes de Gergonne. Hélas, la démonstration de ce dernier n'est qu'une esquisse et celle de Steiner, plus fouillée, a très vite été contestée, notamment par Dirichlet puis par Weierstrass. Steiner s'était en effet contenté de prouver que, si une figure a la propriété extrémale en question, ce ne peut être qu'un disque ; mais encore faut-il prouver l'*existence* d'une telle figure extrémale.

Curieux retournement de l'histoire : cette symétrisation permet de démontrer, en toute rigueur et simplement, une autre inégalité célèbre. Il s'agit de l'*inégalité isodiamétrale* (Bieberbach [3], 1915) : pour un diamètre donné (le diamètre d'une figure étant la plus grande distance(4) de ses points deux à deux) la figure d'aire maximum est le disque. C'est à elle que nous allons nous attacher.

1. Définition

On se place désormais dans un plan rapporté à un repère orthonormal* Oxy, Ox *étant considéré comme horizontal et orienté vers la droite,* Oy *comme vertical et orienté vers le haut.

(*) p.m.legrand@sfr.fr

(1) Cet article fait suite à l'article « Diamètres et aires » du B.V. n° 507, mais il en est totalement indépendant.

(2) Le portrait est issu de Wikipedia.

(3) Ce journal est d'ailleurs souvent appelé *Journal de Gergonne*.

(4) En toute rigueur, le diamètre est la *borne supérieure* des distances mutuelles ; mais comme on n'envisage ici que des compacts, cette borne supérieure est atteinte.

Soit dans le plan une région E coupée par toute verticale Δ selon un segment [NM] éventuellement réduit à un point ou à rien du tout et soit H le milieu de [NM]. On fait glisser [NM] le long de Δ de façon à amener H en H′ sur Ox ; M vient alors en M′ et N en N′. Quand l'abscisse x de Δ varie, [N′M′] balaie une région E′ qui est dite la symétrisée de E et qui, évidemment, admet Ox comme axe de symétrie.

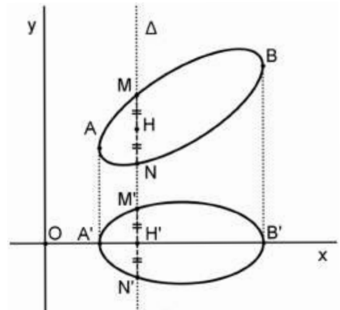

figure 1

Si les coordonnées de M sont $(x,f(x))$ et celles de N sont $(x,g(x))$ avec, pour tout x, $g(x) \leq f(x)$), les coordonnées de M′ sont $\left(x,\dfrac{f(x)-g(x)}{2}\right)$ et celles de N′ sont $\left(x,\dfrac{g(x)-f(x)}{2}\right)$.

Remarque. On observera que ce procédé, qui consiste à faire glisser les sections parallèles à une direction donnée pour obtenir une figure plus sympathique, est fort proche de celui qu'utilisait Cavalieri, dès 1635, pour ses calculs d'aires et de volumes[(5)] dans sa *Géométrie des indivisibles*.

2. Symétrisé d'un polygone convexe

2.1. Exemple de départ

La première étape du travail de symétrisation est la recherche de l'image T′ d'un trapèze T dont les bases sont verticales. On coupe T par une droite verticale Δ d'abscisse x. Les notations étant celles de la figure 2, les ordonnées de M et N sont des fonctions affines de x ; $\overline{\mathrm{H'M'}} = \dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{NM}}$ et $\overline{\mathrm{H'N'}} = -\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{NM}}$ sont donc aussi des fonctions affines de x. Il en résulte que les points M′ et N′ décrivent des segments symétriques l'un de l'autre par rapport à Ox, et que l'image de T est un trapèze isocèle d'axe de symétrie Ox.

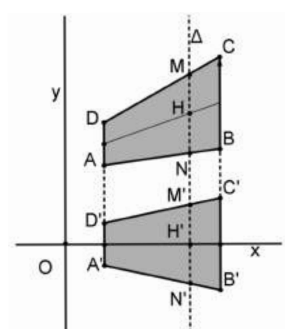

figure 2

2.2. Propriété 1

Le symétrisé d'un polygone convexe est un polygone.

Si l'on coupe le polygone donné Π par les parallèles à Oy issues de ses sommets, on le divise en un certain nombre de trapèzes (les deux trapèzes extrêmes pouvant, comme sur la figure 3, être réduits à des triangles). Le symétrisé Π' du polygone est la réunion des symétrisés de ces trapèzes, donc un polygone.

(5) Voir dans le Bulletin vert n° 497 p. 93-‑105 l'article de Marcel Franz, « Méthodes des indivisibles ».

Remarque : Comme on le voit sur la figure 3, la symétrisation a un inconvénient : elle augmente habituellement le nombre de sommets du polygone. Plus précisément, si le n-gone Π n'a ni côté vertical ni diagonale verticale, son image Π' a $2 + 2(n - 2)$ sommets ; c'est donc un $(2n - 2)$-gone.

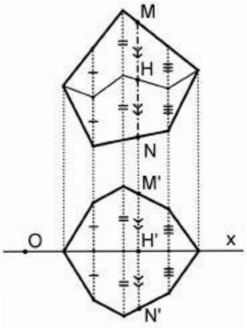

figure 3

Propriété 2

Le symétrisé d'un polygone convexe est convexe.

Découpons comme précédemment (voir figure 3) le polygone convexe Π en trapèzes $T_1, T_2, \ldots, T_n$ à bases verticales, la numérotation se faisant de gauche à droite.

Notons $y = a_j x + b_j$ et $y = c_j x + d_j$ les équations des bords supérieur et inférieur de T_j. Nous allons utiliser la propriété suivante : étant donné un polygone coupé par toute verticale selon un segment (éventuellement vide ou réduit à un point), il est convexe si et seulement si, lorsqu'on décrit son bord supérieur (resp. inférieur) de gauche à droite, la pente des côtés diminue (resp. augmente).

La suite des a_j est donc décroissante et la suite des c_j croissante.

Le bord supérieur de T'_j, symétrisé de T_j a pour équation

$$y = \frac{1}{2}\left(a_j - c_j\right)x + \frac{1}{2}\left(b_j - d_j\right).$$

La suite des $\frac{1}{2}\left(a_j - c_j\right)$ est décroissante (demi-somme de deux suites décroissantes) ;

le bord inférieur de T'_j a pour pente $-\frac{1}{2}\left(a_j - c_j\right)$, qui croît avec j. Le polygone Π' image de Π est donc convexe.

Propriété 3

Le symétrisé d'un polygone convexe a même aire que lui.

Il suffit d'utiliser la décomposition en trapèzes ci-dessus : T'_j, a même longueur de bases et de hauteur que T_j, donc même aire.

Propriété 4

Le symétrisé Π' d'un polygone convexe Π a un diamètre au plus égal à celui de Π.

Soit $[P'Q']$ un diamètre de Π'. Si ce diamètre est vertical ou porté par Ox, le résultat est évident. On écarte désormais ces cas.

Appelons R' et S' les symétriques de P' et Q' par rapport à Ox. P' et Q' sont évidemment sur le bord de Π', mais ils sont en outre de part et d'autre de Ox. S'ils ne l'étaient pas, P' et S' seraient de part et d'autre de la médiatrice Ox de $[S'Q']$ et l'on aurait $P'Q' < P'S'$: $[P'Q']$ ne serait pas un diamètre.

Soit P, Q, R, S les points dont P', Q', R', S' sont les images. Une translation de Π parallèlement à Oy laisse Π' inchangé. Il n'est donc pas restrictif de supposer $P = P'$,

$R = R'$. Appelons U le milieu de [PR], V celui de [Q′S′], W celui de [QS].

Une même translation verticale fait passer de S, W, Q à S′, W′, Q′. Il n'est pas restrictif de supposer que, comme sur la figure, cette translation est de mesure positive (le long de O*y*). Si H désigne la projection de P′ sur la droite (S′Q′), on a $P'Q'^2 = P'H^2 + HQ'^2$ et $P'Q^2 = P'H^2 + HQ^2$; de $HQ' \leq HQ$ on tire donc $P'Q' \leq P'Q$. Le diamètre de Π′ est donc inférieur au sens large à une « corde » de Π et a fortiori à son diamètre.

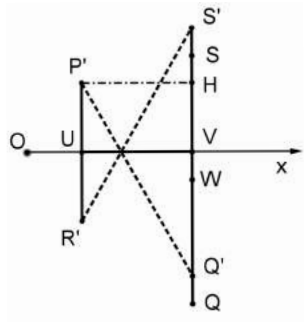

figure 4

Récapitulation

La symétrisation de Steiner transforme tout polygone convexe en un polygone convexe possédant un axe de symétrie, qui a même aire que le premier et dont le diamètre est au plus égal au sien.

Parenthèse

La symétrisation de Steiner a une autre propriété intéressante, qui ne nous servira pas dans la suite, mais qui a servi à Gergonne et Steiner :

L'image d'un polygone convexe Π *par symétrisation par rapport à* O*x* *a un périmètre inférieur à celui de* Π, *l'inégalité étant stricte sauf si* Π *a un axe de symétrie parallèle à* O*x*.

La démonstration repose sur les lemmes suivants :

Lemme 1 : *Si un triangle* ABC *a une base donnée* [BC] *et une hauteur issue de* A *de longueur donnée*, AB + AC *admet un minimum strict lorsque* AC = AB.

Si C′ est le symétrique de C par rapport à la parallèle Δ à [BC] issue de A, on a AC + AB = AC′ + AB, qui est minimal si et seulement si C′, A et B sont alignés, ce qui correspond à un triangle isocèle.

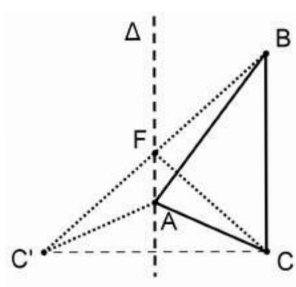

figure 5

On en déduit aussitôt ceci :

Lemme 2 : *Si un trapèze a des bases de longueur donnée et une hauteur de longueur donnée, la somme des longueurs de ses côtés obliques est minimale (strictement) lorsque le trapèze est isocèle.*

Il reste alors à utiliser la décomposition en trapèzes qui a déjà servi plusieurs fois (le détail est laissé aux bons soins du lecteur).

3. Application : inégalité isodiamétrale

Théorème

L'aire de tout polygone convexe de diamètre d est strictement inférieure à celle du *disque de même diamètre, c'est-à-dire* $\frac{\pi}{4}d^2$.

L'idée de la démonstration : On applique deux fois de suite la symétrisation de Steiner, dans deux directions orthogonales ; on obtient alors un polygone ayant un centre de symétrie, dont il est immédiat de majorer l'aire par celle d'un disque.

Détail du raisonnement :

On part d'un polygone convexe Π d'aire S, de diamètre d. En lui appliquant la symétrisation de Steiner parallèlement à Oy, on obtient un polygone convexe Π' d'aire S, de diamètre d' ($d' \le d$), ayant Oy comme axe de symétrie. En appliquant à Π' la symétrisation de Steiner parallèlement à Ox, on obtient un polygone convexe Π'' d'aire S, de diamètre d'' ($d'' \le d' \le d$), qui a les deux axes de symétrie Ox et Oy, donc qui admet O pour centre de symétrie.

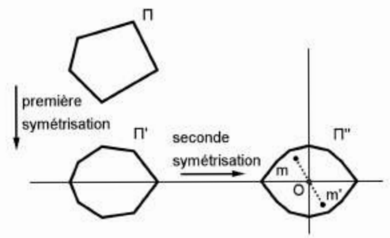

figure 6

Prenons dans Π'' un point quelconque m et son symétrique m' par rapport à ce centre. La distance mm' est au plus égale à d'', donc $\mathrm{O}m \le \frac{1}{2}d''$ et *a fortiori* $\mathrm{O}m \le \frac{1}{2}d$. Π'' est donc inclus dans le disque fermé de centre O et de rayon $\frac{1}{2}d$, dont l'aire est $\frac{\pi}{4}d^2$. Finalement, donc, $\mathrm{S} \le \frac{\pi}{4}d^2$, l'inégalité étant stricte car un polygone ne peut recouvrir entièrement un disque qui le contient.

Remarque. *Dans l'inégalité isodiamétrale, le facteur* $\frac{\pi}{4}$ *ne peut pas être remplacé par un nombre plus petit*. Prenons en effet un n-gone régulier inscrit dans un cercle de rayon R, avec n pair. Son diamètre d vaut 2R (les sommets sont deux à deux diamétralement opposés sur le cercle) et son aire approche évidemment d'aussi près qu'on veut celle du cercle. Faisons les choses en forme : cette aire est $\mathrm{S} = \frac{n}{2}\mathrm{R}^2 \sin\frac{2\pi}{n}$, donc $\frac{\mathrm{S}}{d^2} = \frac{n}{8}\sin\frac{2\pi}{n}$; quand n tend vers l'infini, $\frac{\mathrm{S}}{d^2} \approx \frac{n}{8} \times \frac{2\pi}{n}$ et $\frac{\mathrm{S}}{d^2}$ tend vers $\frac{\pi}{4}$.

4. Extension de l'étude à un compact convexe

Si l'on accepte de déborder le programme des lycées, il est aisé d'étendre ce qui précède à un compact convexe quelconque. Indiquons brièvement les étapes du travail. Nous aurons besoin dans ce paragraphe et le suivant du résultat suivant :

Tout compact convexe du plan peut être défini par des inégalités $a \leq x \leq b$, $g(x) \leq y \leq f(x)$, où f et g sont continues sur $[a,b]$, f étant concave et g convexe. Réciproquement toute partie du plan ainsi définie est un compact convexe.

4.1. Le symétrisé d'un compact convexe K est un compact convexe K′.

K étant défini comme indiqué ci-dessus, K′ l'est par

$$a \leq x \leq b,\ \frac{g(x)-f(x)}{2} \leq y \leq \frac{f(x)-g(x)}{2},$$

ce qui prouve d'une part sa compacité et d'autre part, puisque $\dfrac{f-g}{2}$, demi-somme des fonctions concaves f et $-g$, est concave et que son opposée $\dfrac{g-f}{2}$ est donc convexe, prouve aussi que K′ est convexe.

4.2. Le symétrisé K′ d'un compact convexe K a même aire que lui.

En effet l'aire de K est $\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\mathrm{d}x$ et celle de K′ est le double de l'aire de sa partie située au dessus de Ox, soit $2\int_a^b \frac{f(x)-g(x)}{2}\mathrm{d}x$.

4.3. Le diamètre du symétrisé d'un compact convexe est au plus égal au sien.

Il n'y a pas un mot à changer à la démonstration faite pour les polygones.

4.4. Théorème de Bieberbach (inégalité isodiamétrale)

L'aire de tout compact convexe de diamètre d est inférieure au sens large à celle du disque de même diamètre, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{4}d^2$.

Il n'y a pas un mot à changer à la démonstration faite pour les polygones si ce n'est que l'inégalité n'est plus stricte, puisque l'égalité est réalisée pour les disques.

Remarque 1.

Nous aurions pu évidemment court-circuiter le cas des polygones et nous attaquer directement au cas des compacts convexes.

Remarque 2.

Le résultat pour les polygones convexes étant établi, on peut en déduire(6) le théorème ci--dessus par passage à la limite. Un compact convexe K de diamètre d et d'aire S étant donné, on lui suppose un diamètre horizontal. Avec les notations du § 4.1., on a S = $\int_a^b \big(f(x)-g(x)\big)\mathrm{d}x$. Coupons K en tranches verticales d'épaisseur d/n ; cela permet d'inscrire dans K un polygone convexe P_n dont l'aire S_n est tout simplement l'approximation de l'intégrale par la méthode des trapèzes. Il est bien

(6) Merci à Marc Roux pour l'idée de ce paragraphe.

connu alors que S_n tend vers S quand n tend vers l'infini. Reste à passer à la limite dans $S_n < \frac{\pi}{4}d^2$.

5. Sauf pour un disque, l'inégalité isodiamétrale est stricte

Ce point est plus délicat à établir. Il repose sur le lemme suivant :

Lemme (L)

Si le symétrisé d'un compact convexe K *est un disque de même diamètre, alors* K *est un disque.*

Admettons provisoirement ce lemme et considérons un compact K de diamètre d et d'aire $\frac{\pi}{4}d^2$. Effectuons sur lui les deux symétrisations successives utilisées au § 3, donnant comme image K′ puis K″. K″ est inclus dans un disque de diamètre d et a même aire que lui ; c'est donc un disque de diamètre d. K′ est donc, d'après le lemme (L), un disque de diamètre d. En appliquant cette fois le lemme (L) à K, on voit que K est un disque.

Démonstration du lemme (L)

Soit un compact K (dont on a représenté en pointillé un arc du bord supérieur) de diamètre d, dont le symétrisé K′ est un disque de diamètre d (représenté ici). Soit [AB] le diamètre de K′ situé sur Ox. On peut toujours supposer, par translation de K parallèle à Oy, que A est sur K. Le point B est aussi sur K, sinon il serait l'image d'un point C de K tel que AC > d.
Considérons les points d'abscisse x sur les bords de K et K′, avec les notations de la figure 7 : M et N pour K, M′ et N′ pour K′. Si Q′ est le point diamétralement opposé à M′ sur le bord de K′, la verticale de Q′ coupe le bord supérieur de K′ en P′ et les bords de K en P et Q.

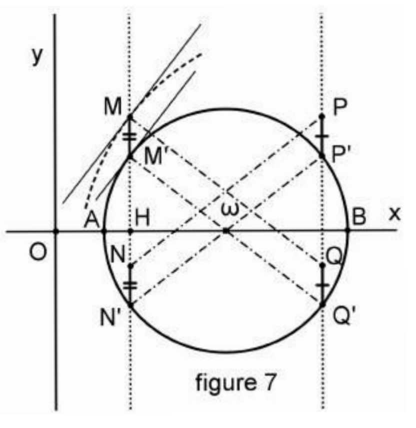

figure 7

On suppose, dans ce paragraphe seulement, que $\overline{M'M} > 0$ (dans le cas contraire, on raisonne sur $\overline{N'N}$ en changeant le sens de l'axe Oy). Montrons que $\overline{M'M} = \overline{Q'Q}$.

- Si on avait $\overline{M'M} > \overline{Q'Q}$, il en résulterait MQ > M′Q′, donc MQ > d.
- Si on avait $\overline{M'M} < \overline{Q'Q}$, c'est-à-dire aussi $\overline{N'N} < \overline{P'P}$, il en résulterait NP > N′P′, donc NP > d.
- Dans l'un et l'autre cas, le diamètre de K serait strictement supérieur à d.

Ainsi le quadrilatère MM′Q′Q est un parallélogramme, d'où résulte MQ = M′Q′ = d. Le compact K est tout entier inclus dans le disque de centre Q et de rayon d ; la tangente en M au bord supérieur de K, lorsqu'elle existe, est donc perpendiculaire à [MQ] et par suite *parallèle à la tangente en* M′ *à* K′.

Si H est le point d'abscisse x sur Ox, $\overline{\mathrm{HM}}$ et $\overline{\mathrm{HM}'}$ sont deux fonctions continues de x qui, d'après ce qui précède, ont *même dérivée en tout point où la première est dérivable*.

Nous allons maintenant utiliser deux théorèmes(7) :

■ **T1** : Toute fonction concave ou convexe dans un intervalle y est dérivable sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points.

■ **T2** : Si une fonction continue dans un intervalle admet en tout point sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points une dérivée nulle, elle y est constante.

La fonction $x \to \overline{\mathrm{HM}}$ est, d'après T1, dérivable sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points. La fonction $x \to \overline{\mathrm{HM}'}$, représentée par un demi-cercle, est dérivable sauf en a et b. La fonction $x \to \overline{\mathrm{HM}'} - \overline{\mathrm{HM}}$ est donc dérivable et (d'après ce qui précède) de dérivée nulle sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points. Comme différence de deux fonctions continues sur $[a,b]$, elle est continue sur $[a,b]$. D'après T2, c'est une constante et, comme elle est nulle pour $x = a$, elle est nulle sur $[a,b]$.

Les bords supérieurs de K et K′ coïncident donc. Une symétrie suffit pour conclure.

6. Et si tout ce qui précède était inutile ?

La preuve de l'inégalité isodiamétrale donnée ci-dessus a longtemps été considérée comme la plus simple. Mais on trouve dans A *Mathematician's Miscellany* [4] de John Littlewood (1953) une démonstration ultracourte… qui est passée assez largement inaperçue.

Soit K un compact convexe de diamètre . Son bord admet en tout point, sauf peut-être en un ensemble fini ou dénombrable de points, une tangente, qui laisse K tout entier d'un de ses côtés. On prend comme origine O un point où K ait une tangente, avec cette tangente comme axe des x, orientée de sorte que K soit tout entier du côté des y positifs. Le bord Γ de K a une équation polaire $r = \rho(\theta)$, où la fonction ρ est continue sur $[0,\pi]$.

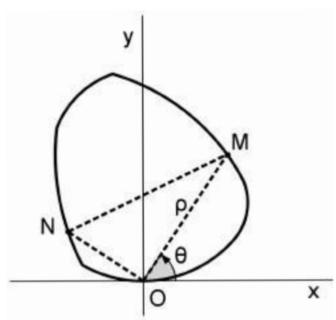

figure 8

L'aire de K est donnée par la formule classique

$S = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^{\pi} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta$, ce qui peut s'écrire ici :

(7) Voir par exemple dans *Fonctions d'une variable réelle*, de N. Bourbaki, ch. 1, § 4 n°3 et § 2 n° 2.

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta + \frac{1}{2}\int_{\pi/2}^{\pi} \rho^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\rho^2(\theta) + \rho^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)\right)\mathrm{d}\theta$$

Considérons sur Γ les deux points M, d'angle polaire θ, et N, d'angle polaire $\theta + \frac{\pi}{2}$.

Appliquons le théorème de Pythagore :

$$\rho^2(\theta) + \rho^2\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{OM}^2 + \mathrm{ON}^2 = \mathrm{MN}^2 \leq d^2.$$

Il en résulte que $S \leq \frac{1}{2}\int_0^{\pi/2} d^2\,\mathrm{d}\theta$, soit $S \leq \frac{\pi}{4}d^2$, CQFD !

N.B. : Littlewood ne démontre pas que l'inégalité est stricte lorsque K n'est pas un disque. Mais si un lecteur courageux veut s'y attaquer…

Références

[1] J. STEINER : *Einfache Beweise der isoperimetrischen Hauptsätze* (Démonstration simple du théorème fondamental des isopérimètres).
http://www.e-rara.ch/zut/content/titleinfo/1368571

[2] Joseph GERGONNE : *Annales de Mathématiques pures et appliquées* 1813-1814, page 339, « Recherche de la surface plane de moindre contour entre toutes celles de même étendue […] ».
http://archive.numdam.org/ARCHIVE/AMPA/AMPA_1813-1814__4_/AMPA_1813-1814__4_.pdf

[3] Ludwig BIEBERBACH : *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* (Journal de la Société mathématique allemande), t. 24 (1915), p. 247-250, « Über eine Extremaleigenschaft des Kreises» (Sur une propriété extrémale du cercle).
http://www.digizeitschriften.de/dms/img/?PPN=PPN37721857X_0024&DMDID=dmdlog21

[4] John LITTLEWOOD : *A Mathematician's Miscellany* (Un pot-pourri mathématique), p. 10-11.
https://archive.org/stream/mathematiciansmi033496mbp#page/n21/mode/2up

Pour finir

Le lecteur curieux trouvera sur le site de l'APMEP, sous le titre « Un exercice de symétrisation », la résolution du problème suivant :
Comment choisir un rectangle pour que son symétrisé de Steiner soit un hexagone régulier ?