Exercices de ci, de là

Cette rubrique est faite à partir des propositions de collègues. Elle accueille bien volontiers des exercices même « modestes » mais un peu curieux imaginés ou rencontrés par les collègues soit dans des livres, soit dans des situations exploitées dans leurs classes. N'hésitez donc pas à nous envoyer les exercices piochés « de-ci de-là » qui vous ont plu ou vous ont intrigués. Nous les accepterons avec plaisir et en particulier ceux qui pourraient être mis à la portée d'élèves du secondaire.

Les propositions d'exercices ou les solutions sont à envoyer par mél à :

bruno.alaplantive@free.fr

ou par courrier à :

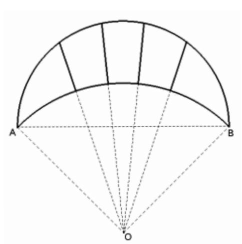
Jean Fromentin
17 rue de la Roussille
79000 NIORT

Pour l'envoi des propositions et des solutions, privilégiez, si possible, le courrier électronique. Si vous le pouvez, joignez à votre fichier initial une copie au format PDF pour contrôler en particulier les formules qui sont souvent perturbées d'un logiciel à l'autre. Vous faciliterez ainsi notre tâche. Merci d'avance.

Exercices

Exercice 508–1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach

Une lunule d'Hippocrate est délimitée par le demi-cercle de diamètre [AB] et le quart de cercle (OAB) de centre O.
On demande de partager cette lunule en n parties d'aires égales, par des rayons issus de O.



Exercice 508–2 Michel Lafond – Dijon *Calcul de minimum*

Soit le polynôme $P(x) = x^6 + 2x^4 - 2x^3 + 199810x^2 - 272672x + 93026$, $x \in \mathbb{R}$.
Démontrer que P (x) est strictement positif pour tout x réel et calculer le minimum à 10^{-10} près.
<u>Calculatrice interdite</u>.

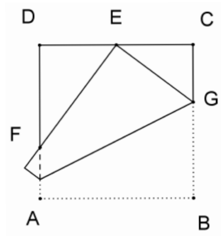
Exercice 508–3 Georges Lion – Wallis *tiré de « Euclid and beyond », par Robin Hartsborne*

Soit un angle droit $\widehat{xOy}$, un point A à l'intérieur du premier quart de plan et un point B sur [Oy) tels que OB > OA.

Construire le cercle de centre O coupant [Ox) en C et [Oy) en D tels que les droites (BC) et (DA) soient parallèles.

Exercice 508–4 à défaut de se plier en quatre **…** *pour nos élèves*

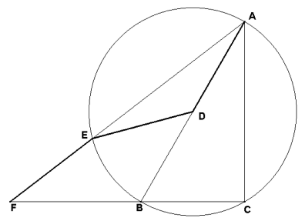
Voici un pliage, connu sous le nom de théorème de Haga, qui permet de déterminer le tiers du côté d'un carré.



Le milieu E du côté [DC] ayant été marqué au préalable (*on ramène* [CB] *sur* [DA] *et on ne fait que marquer le pli sur* E), on plie le carré ABCD de façon à amener le coin inférieur droit B, sur E.
Le côté qui était en bas coupe maintenant le côté gauche [DA] en F.
Il s'agit de prouver que F est au tiers (ou aux deux tiers) du côté [DA].
On peut faire plier des carrés de côté 8 ou 16 cm par exemple…

Solutions

Exercice 506–1 Jean-Pierre Friedelmeyer – Osenbach. *Une duplication du cube sur une idée de Claude Comiers*



Le triangle ABC est rectangle en C, d'hypoténuse AB double du côté BC et de milieu D. Une droite issue de A coupe la demi-droite [CB) en F et le cercle de diamètre [AB] en E tels que AD = DE = EF.

Démontrer que $BF^3 = 2BC^3$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Michel Sarrouy (Mende), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Richard Beczkowski (Chalons sur Saône), Raymond Heitz (Piriac), Maurice Bauval (Versailles), Mihaï Stoënescu (Bischwiller), Frédéric de Ligt (Montguyon), Jean-Pierre Friedelmeyer (Osenbach).

• Voici la solution de Frédéric de Ligt.

On note r le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.
La puissance du point F par rapport à ce cercle peut s'exprimer ici de deux façons, d'où l'égalité :

$$FE \times FA = FB \times FC \qquad (1)$$

Avec les données fournies, l'égalité (1) devient :

$$r \times (FC^2 + AC^2)^{1/2} = FB \times FC \qquad (2)$$

Le triangle ABC est un demi-triangle équilatéral d'où

$$AC^2 = 3BC^2 = 3r^2.$$

Par ailleurs

$$FC = FB + BC = FB + r.$$

L'égalité (2) devient :

$$r \times [(\mathrm{FB} + r)^2 + 3r^2]^{1/2} = \mathrm{FB} \times (\mathrm{FB} + r) \qquad (3)$$

On élève au carré, on développe puis on réduit les deux membres de l'égalité (3) :

$$2r^3 \times \mathrm{FB} + 4r^4 = \mathrm{FB}^4 + 2r \times \mathrm{FB}^3 \qquad (4)$$

On factorise :

$$2r^3\,(\mathrm{FB} + 2r) = \mathrm{FB}^3\,(\mathrm{FB} + 2r) \qquad (5)$$

Comme $\mathrm{FB} + 2r > 0$, on peut simplifier et on aboutit à

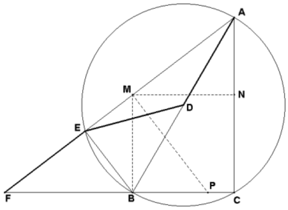
$$2r^3 = \mathrm{FB}^3,$$

ou encore, puisque $\mathrm{BC} = r$,

$$2\mathrm{BC}^3 = \mathrm{FB}^3.$$

- Et voici la solution de Claude COMIERS, adaptée et modernisée par Jean-Pierre Friedelmeyer.

Soit M l'intersection de la perpendiculaire en B à (BC) avec (AF) ; N celle de la perpendiculaire à (AC) par M avec (AC) ; P celle de la perpendiculaire à (AF) en M avec (BC).



1) La similitude des triangles FEB, FBM, FMP conduit à l'égalité des rapports :

$$\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FB}} = \frac{\mathrm{FB}}{\mathrm{FM}} = \frac{\mathrm{FM}}{\mathrm{FP}}. \qquad (1)$$

Pour aboutir à la relation demandée, il suffit de montrer que $\mathrm{FP} = 2\mathrm{FE}$, car en multipliant les trois rapports égaux, on arrive à

$$\left(\frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FB}}\right)^2 = \frac{\mathrm{FE}}{\mathrm{FP}} = \frac{1}{2}.$$

Et comme $\mathrm{FE} = \mathrm{BC}$, on aura bien la relation demandée : $\mathrm{BF}^3 = 2\mathrm{BC}^3$.

2) On remarquera que les triangles EFB et NMA sont isométriques, donc $\mathrm{AM} = \mathrm{FB}$.

3) On a

$$\mathrm{AF}^2 = (\mathrm{AM} + \mathrm{MF})^2 = \mathrm{AM}^2 + \mathrm{MF}^2 + 2\mathrm{AM}{\cdot}\mathrm{MF},$$

mais aussi

$$\mathrm{AF}^2 = \mathrm{FB}^2 + \mathrm{BA}^2 + 2\mathrm{FB}{\cdot}\mathrm{BC}$$

(par Al Kashi, façon Euclide, Livre II, prop. 12).

Donc, en égalant les second membres et soustrayant les carrés $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{FB}^2$, il reste

$$\mathrm{MF}^2 + 2\mathrm{AM}{\cdot}\mathrm{MF} = \mathrm{BA}^2 + 2\mathrm{FB}{\cdot}\mathrm{BC} = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{FB}{\cdot}\mathrm{BA} \qquad (2)$$

(car $2\mathrm{BC} = \mathrm{BA}$).

Mais

$$\mathrm{AM}{\cdot}\mathrm{MF} = \mathrm{FB}{\cdot}\mathrm{MF} = \mathrm{FE}{\cdot}\mathrm{FP}$$

d'après (1), donc

$$\mathrm{MF}^2 + 2\mathrm{AM}{\cdot}\mathrm{MF} = \mathrm{MF}^2 + 2\mathrm{FE}{\cdot}\mathrm{FP} = \mathrm{MF}^2 + \mathrm{BA}{\cdot}\mathrm{FP},$$

donc (2) devient :

$$\mathrm{MF}^2 + 2\mathrm{AM}{\cdot}\mathrm{MF} = \mathrm{BA}^2 + \mathrm{FP}{\cdot}\mathrm{BA}\ ;$$

mais

$$MF^2 = FB \cdot FP$$

par (1), d'où

$$FB \cdot FP + BA \cdot FP = BA \cdot (BA + FB)$$

ou encore

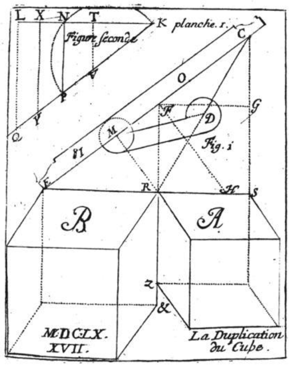
$$FP \cdot (FB + BA) = BA \cdot (FB + BA),$$

donc

$$FP = BA = 2BC = 2FE,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Nota. Claude Comiers est l'auteur en 1677 d'un ouvrage intitulé : La duplication du cube, la trisection de l'angle et l'inscription de l'heptagone régulier dans le cercle(1).



Exercice 506–2 Marie-Nicole Gras – Le Bourg d'Oisans *d'après les Olympiades suédoises 1982*

On considère un quadrilatère convexe ABCD et on suppose qu'il existe à l'intérieur de ce quadrilatère un point P tel que les aires des quatre triangles PAB, PBC, PCD et PDA soient égales.
Caractériser de tels quadrilatères et préciser la position du point P.

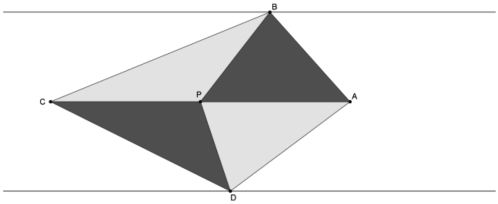
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Piriac), Maurice Bauval (Versailles), Frédéric de Ligt (Montguyon), Jean Gounon (Chardonnay), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône).

• Voici la solution de Maurice Bauval.
Les aires des quatre triangles PAB, PBC, PCD, PDA sont égales.
Fixons les trois points P, A, B. Les hauteurs issues de B et D dans les deux triangles de base [PA] sont égales donc D est sur la droite déduite de [PA] par l'homothétie de centre B et de rapport 2.
De même dans les deux triangles de base [PB] les hauteurs issues de A et C sont égales donc C est sur la droite déduite de [PB] par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

(*) L'ouvrage est téléchargeable sur Google books.

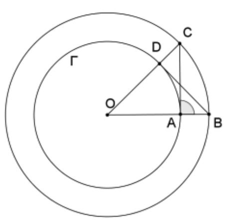
De même dans les deux triangles de base [PC] les hauteurs issues de B et D sont égales donc C est sur la droite déduite de [PB] par l'homothétie de centre A et de rapport 2.
Ces deux dernières droites se coupent au point symétrique de A par rapport à P.
Le point C est symétrique de A par rapport à P.
Ces conditions sont suffisantes pour l'égalité des aires des quatre triangles.

Le quadrilatère ABCD possède la propriété requise si et seulement si :
ou bien la diagonale [AC] passe par le milieu de [BD] et P est milieu de [AC],
ou bien la diagonale [BD] passe par le milieu de [AC] et P est milieu de [BD].



Exercice 506–3 Georges Lion – Wallis

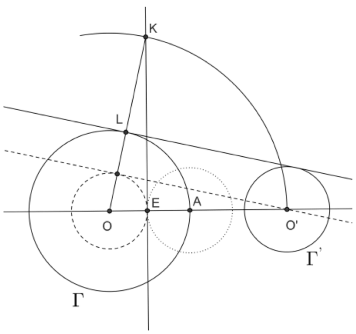
La figure ci-contre illustre l'idée d'Euclide dans III.17 pour construire la tangente menée de B au cercle Γ.

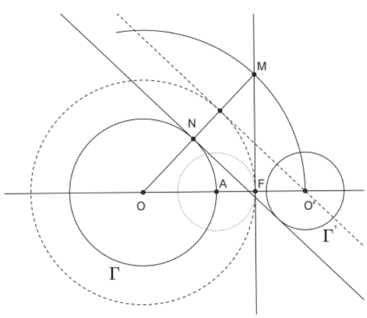


Généraliser l'idée d'Euclide pour construire les tangentes communes à deux cercles de centres O et O′, de rayons R et R′ tels que $OO' > R + R' > 2R'$, dont les points de contact avec le grand cercle sont d'un même côté de la droite (OO′).

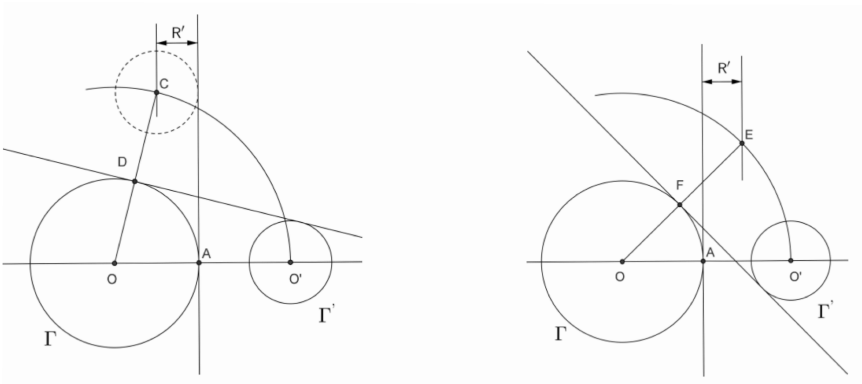
Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône), Frédéric de Ligt (Montguyon), Georges Lion (Wallis).

• Voici ci-dessous leurs constructions qui utilisent les classiques cercles auxiliaires de rayons R – R′ et R + R′.





• De façon anachronique, pour ma part j'ai plutôt associé la construction III.17 d'Euclide à une symétrie axiale et propose les constructions suivantes :



Exercice 506–4 *pioché de-ci, de-là*

Soient deux entiers naturels n et m tels que $n \geq m^2 \geq 16$. Prouver que $2^n \geq n^m$.

Solutions : Pierre Renfer (Saint Georges d'Orques), Marie-Nicole Gras (Le Bourg d'Oisans), Raymond Heitz (Piriac), Frédéric de Ligt (Montguyon), Jean Gounon (Chardonnay), Richard Beczkowski (Chalon sur Saône).

• Voici la solution de Richard Beczkowski.

Comparons les logarithmes népériens de 2^n et de n^m en utilisant $\sqrt{n} \geq m$:

$$n\ln(2) - m\ln(n) \geq n\ln(2) - \sqrt{n}\ln(n)$$

soit aussi

$$n\ln(2) - m\ln(n) \geq \sqrt{n}\left[\sqrt{n}\ln(2) - \ln(n)\right].$$

La fonction f définie sur $[16;+\infty[$ par

$$f(x) = \sqrt{x}\ln(2) - \ln(x)$$

a pour dérivée

$$f'(x) = \frac{\ln(2)}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}\left(\sqrt{x}\ln(2) - 2\right).$$

f' est positive (car $\sqrt{x}\ln(2) - 2 > 4\ln(2) - 2 > 0$) donc f est croissante de minimum $f(16)=0$.

f est donc positive ou nulle sur $[16;+\infty[$ et par conséquent $2^n \geq n^m$ puisque ces deux nombres sont dans le même ordre que leurs logarithmes népériens.